

Краткое сообщение

Т.Х. РАСУЛОВ, М.Ш. ШАРИПОВА

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРАНЕЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ
МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Аннотация. Рассматривается 3×3 операторная матрица \mathcal{A}_μ со спектральным параметром $\mu > 0$, связанная с гамильтонианом системы с несохраняющимся числом и не более трех частиц на одномерной решетке. Описаны существенный и дискретный спектры операторной матрицы \mathcal{A}_μ . Установлено, что операторная матрица \mathcal{A}_μ имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра. Получены спектральные оценки для верхней и нижней границ операторной матрицы \mathcal{A}_μ с помощью кубической числовой области значений, вложения Гершгорина и классической теории возмущений.

Ключевые слова: операторная матрица, спектральная оценка, собственное значение, кубическая числовая область значения, вложения Гершгорина, классическая теория возмущения.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-6-88-93

ВВЕДЕНИЕ

Многие научно-прикладные проблемы, исследуемые в мире, приводятся к исследованиям спектральных свойств операторных матриц, элементы которых являются линейными операторами действующих в банаховых или гильбертовых пространствах. Вопросы, связанные с существенными и дискретными спектрами операторных матриц, в частности, гамильтонианов системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, являются актуальными проблемами в физике твердого тела, квантовой теории поля, статистической физике, квантовой механике и многих других. Поэтому развитие исследования операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц, является одним из приоритетных направлений.

В данной статье рассматривается операторная матрица \mathcal{A}_μ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$ в трехчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Эта операторная матрица связана с гамильтонианом системы с несохраняющимся числом и не более трех частиц на одномерной решетке. Найден существенный спектр операторной матрицы \mathcal{A}_μ . Описан дискретный спектр операторной матрицы \mathcal{A}_μ как множество нулей определителя Фредгольма и установлено, что оно имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне существенного спектра. Получены спектральные оценки для верхней и нижней границ операторной матрицы \mathcal{A}_μ с помощью кубической числовой области значений, вложения Гершгорина и классической теории возмущений.

Поступила в редакцию 13.03.2025, после доработки 13.03.2025. Принята к публикации 26.03.2025.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для операторов в гильбертовом пространстве в различных приложениях оказывается важным понятие *числовой области значений* (или *поля значений*). Ниже приводим определение, историю изучения, основные свойства и некоторые обобщения этого понятия.

Пусть $\mathcal{H}^{(1)}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}^{(1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(1)}$ — линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{H}^{(1)}$. Допустим (\cdot, \cdot) — скалярное произведение и $\|\cdot\|$ — норма в соответствующих гильбертовых пространствах.

Определение 1. Множество $\mathcal{W}(\mathcal{B}_1) := \{(\mathcal{B}_1 x, x) : x \in D(\mathcal{B}_1), \|x\| = 1\}$ называется *числовой областью значений* оператора \mathcal{B}_1 .

В общем случае множество $\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор \mathcal{B}_1 замкнут. Из определения видно, что множество $\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)$ является подмножеством комплексной плоскости, и геометрические свойства множества $\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)$ дают некоторую информацию об операторе \mathcal{B}_1 (см., например, [1]).

Понятие числовой области значений впервые введено в работе [2] для матриц и было доказано, что числовая область значений матрицы содержит его спектр, т. е. все ее собственные значения, а ее граница является выпуклой линией. В работе [3] показано, что множество $\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)$ является выпуклым. Далее, это свойство справедливо для линейных ограниченных операторов и спектры таких операторов содержатся в $\overline{\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)}$ (см. [4]).

Если $\mathcal{B}_1 \in L(\mathcal{H}^{(1)})$, то имеет место спектральное соотношение $\sigma_p(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{W}(\mathcal{B}_1)$, $\sigma(\mathcal{B}_1) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{B}_1)}$ для точечного спектра $\sigma_p(\mathcal{B}_1)$ и спектра $\sigma(\mathcal{B}_1)$ оператора \mathcal{B}_1 .

Надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда дает достаточно хорошую структуру. Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в таких случаях, в работе [5] введено понятие квадратичной числовой области значений для 2×2 операторных матриц.

Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{B}_2 \in L(\mathcal{H}^{(2)})$. Тогда оператор \mathcal{B}_2 всегда записывается в виде операторной матрицы второго порядка

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с линейными ограниченными операторами $B_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$. Заметим, что

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2^* \Leftrightarrow B_{11} = B_{11}^*, \quad B_{22} = B_{22}^*, \quad B_{21} = B_{12}^*.$$

Дадим определение квадратичной числовой области значений оператора \mathcal{B}_2 .

Определение 2. Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathcal{B}_2(f) := \begin{pmatrix} (B_{11}f_1, f_1) & (B_{12}f_2, f_1) \\ (B_{21}f_1, f_2) & (B_{22}f_2, f_2) \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}^{(2)},$$

таких, что $\|f_i\| = 1$, $i = 1, 2$, называется *квадратичной числовой областью значений* оператора $\mathcal{B}_2 \in L(\mathcal{H}^{(2)})$, соответствующей представлению (1) операторной матрицы \mathcal{B}_2 , и обозначается как $\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2)$, т. е.

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2) := \bigcup_{f \in \mathbb{S}^2} \sigma_p(\mathcal{B}_2(f)), \quad \mathbb{S}^2 := \{f = (f_1, f_2)^t \in \mathcal{H}^{(2)} : \|f_i\| = 1, i = 1, 2\}.$$

Отметим, что $\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{W}(\mathcal{B}_2)$. Если $\mathcal{B}_2 \in L(\mathcal{H}^{(2)})$, то $\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|\mathcal{B}_2\|\}$, и она замкнута, если $\dim \mathcal{H}^{(2)} < \infty$.

В отличие от числовой области значений, квадратичная числовая область значений состоит из не более двух (связанных) компонентов. Это следует из того факта, что множество всех матриц $\mathcal{B}_2(f)$, $f \in \mathbb{S}^2$, связано и собственные значения матриц непрерывны (см. [6]).

Следует отметить, что утверждение о том, что все матрицы $\mathcal{B}_2(f)$ имеют два разных собственных значения вовсе не означает, что $\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2)$ состоит из двух непересекающихся компонентов.

Одним из важных свойств квадратичной числовой области значений, подобно числовой области значений, является то, что она обладает свойством спектрального включения. В работе [7] доказаны следующие соотношения: $\sigma_p(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2)$, $\sigma(\mathcal{B}_2) \subset \overline{\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2)}$.

Поскольку квадратичная числовая область значений содержится в числовой области значений, это дает возможное наименьшее спектральное вложение

$$\sigma_p(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{W}(\mathcal{B}_2), \quad \sigma(\mathcal{B}_2) \subset \overline{\mathcal{W}^2(\mathcal{B}_2)} \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{B}_2)}.$$

Понятие квадратичной числовой области значений для 2×2 операторных матриц очевидным образом обобщается на случай 3×3 блочно-операторных матриц.

Пусть \mathcal{H}_i , $i = 1, 2, 3$, — гильбертовы пространства, и $\mathcal{H}^{(3)} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$. Тогда оператор $\mathcal{B}_3 \in L(\mathcal{H}^{(3)})$ всегда записывается в виде операторной матрицы

$$\mathcal{B}_3 := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

с линейными ограниченными операторами $B_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2, 3$. Обозначим

$$\mathbb{S}^3 := \left\{ f = (f_1, f_2, f_3)^t \in \mathcal{H}^{(3)} : \|f_j\| = 1, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Для каждого $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{S}^3$ определим 3×3 матрицу

$$\mathcal{B}_3(f) := \left((B_{ij}f_j, f_i) \right)_{i,j=1}^3 \in M_3(\mathbb{C}).$$

Определение 3. Множество

$$\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3) := \bigcup_{f \in \mathbb{S}^3} \sigma_p(\mathcal{B}_3(f))$$

называется *кубической числовой областью значений* операторной матрицы \mathcal{B}_3 (относительно блочно-операторного представления (2)).

Так как $\sigma_p(\mathcal{B}_3(f)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathcal{B}_3(f) - \lambda) = 0\}$, то для всех $f \in \mathbb{S}^3$ имеет место эквивалентное представление $\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f \in \mathbb{S}^3, \det(\mathcal{B}_3(f) - \lambda) = 0\}$.

Если $\mathcal{B}_3 \in M_3(\mathbb{C})$ — 3×3 матрица, то $\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3)$ совпадает с множеством собственных значений матрицы \mathcal{B}_3 . Надо отметить, что $\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3) \subset \mathcal{W}(\mathcal{B}_3)$. Если $\mathcal{B}_3 \in L(\mathcal{H}^{(3)})$, то

$$\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|\mathcal{B}_3\|\},$$

и она замкнута, если $\dim \mathcal{H}^{(3)} < \infty$. Если $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_3^*$, то $\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3) \subset \mathbb{R}$.

Следующие свойства [8] обобщают свойство спектрального включения для числовой и квадратично числовой области значений: $\sigma_p(\mathcal{B}_3) \subset \mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3)$, $\sigma(\mathcal{B}_3) \subset \overline{\mathcal{W}^3(\mathcal{B}_3)}$.

2. СПЕКТР ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Обозначим через \mathbb{T} одномерный тор. Пусть $\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}$ — одномерное пространство комплексных чисел, $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T})$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbb{T} , и $\mathcal{H}_3 := L_2(\mathbb{T}^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbb{T}^2 . Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_3 , т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$. Обычно пространство \mathcal{H} называют трехчастичным обрезанным подпространством пространства Фока $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}))$ над $L_2(\mathbb{T})$, т.е. $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2(\mathbb{T}^2) \oplus L_2(\mathbb{T}^3) \oplus \dots$.

Рассмотрим операторную матрицу \mathcal{A}_μ , $\mu > 0$, определенную в \mathcal{H} как

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} & 0 \\ \mu A_{12}^* & A_{22} & \mu A_{23} \\ 0 & \mu A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

с матричными элементами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} A_{11}f_1 &= \varepsilon f_1, \quad (A_{12}f_2) = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_2(t)dt; \\ (A_{22}f_2(x)) &= (\varepsilon + u(x))f_2(x), \quad (A_{23}f_3)(x) = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_3(x, t)dt; \\ (A_{33}f_3)(x, y) &= (\varepsilon + u(x) + u(y))f_3(x, y), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на \mathbb{T} .

Легко можно увидеть, что операторная матрица \mathcal{A}_μ , определенная по формуле (3) с элементами (4), является линейной, ограниченной и самосопряженной в \mathcal{H} .

Для изучения спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ введем следующую матрицу:

$$\mathcal{A}_\mu^{(1)} := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно знаменитой теореме Вейля о стабильности существенного спектра при конечномерных возмущениях имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) = [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$, где

$$m := \min_{k \in \mathbb{T}} u(k), \quad M := \max_{k \in \mathbb{T}} u(k).$$

Для фиксированного $\mu > 0$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$ функцию

$$\Delta_\mu(z) := \varepsilon - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)dt}{\varepsilon + u(t) - z}.$$

Обычно функцию $\Delta_\mu(\cdot)$ называют определителем Фредгольма, соответствующим операторной матрице $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$. Легко можно показать, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(z) = 0$. Поэтому для дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M] : \Delta_\mu(z) = 0\}.$$

Видно, что функция $\Delta_\mu(\cdot)$ обладает свойством монотонности, поэтому оператор $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ имеет не более двух простых собственных значения, одно из которых расположено левее $\varepsilon + m$, а другое правее $\varepsilon + M$. Положив

$$\Sigma_\mu := [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ u(k) + \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) \right\},$$

в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ рассмотрим регулярную функцию

$$\Omega_\mu(z) := \varepsilon - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t) dt}{\Delta_\mu(z - u(t))}.$$

Сформулируем первый основной результат работы.

Теорема 1. а) *Существенный спектр операторной матрицы \mathcal{A}_μ совпадает с множеством Σ_μ и состоит из объединения не более чем трех отрезков.*

б) *Имеет место равенство $\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu : \Omega_\mu(z) = 0\}$.*

с) *Операторная матрица \mathcal{A}_μ имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра.*

При каждом $f \in \mathbb{S}^3$ введем обозначения: $a_{ij}(f) = (A_{ij}f_j, f_i)$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$P_\mu(f) := -\frac{1}{6} \left\{ (a_{11}(f) - a_{22}(f))^2 + (a_{11}(f) - a_{33}(f))^2 + (a_{22}(f) - a_{33}(f))^2 \right\} - \\ - \mu^2 |a_{12}(f)|^2 - \mu^2 |a_{23}(f)|^2;$$

$$Q_\mu(f) := -\frac{2}{27} (a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f))^3 + \frac{1}{3} (a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f)) (a_{11}(f)a_{22}(f) + \\ + a_{22}(f)a_{33}(f) + a_{11}(f)a_{33}(f) - \mu^2 |a_{12}(f)|^2 - \mu^2 |a_{23}(f)|^2) + a_{11}(f)a_{22}(f)a_{33}(f) + \\ + \mu^2 |a_{12}(f)|^2 a_{33}(f) + \mu^2 |a_{23}(f)|^2 a_{11}(f);$$

$$\Phi_\mu(f) := \arccos \left(-\frac{3Q_\mu(f)}{2P_\mu(f)} \sqrt{-\frac{3}{P_\mu(f)}} \right);$$

$$E_\mu^{(k)}(f) := \frac{1}{3} (a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f)) + 2\sqrt{-\frac{P_\mu(f)}{3}} \cos \frac{\Phi_\mu(f) + 2\pi k}{3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Теперь мы готовы к формулировке второго основного результата.

Теорема 2. *Для кубической числовой области значений операторной матрицы \mathcal{A}_μ имеет место равенство*

$$\mathcal{W}^3(\mathcal{A}_\mu) = \bigcup_{k=1}^3 \bigcup_{f \in \mathbb{S}^3} \{E_\mu^{(k)}(f)\}.$$

Кроме того, для границ операторной матрицы \mathcal{A}_μ справедливы оценки

$$\min \sigma(\mathcal{A}_\mu) \geq \varepsilon + m - 2\sqrt{\frac{m^2 + 2\mu^2 \|v\|^2}{3}}, \quad \max \sigma(\mathcal{A}_\mu) \leq \varepsilon + M + 2\sqrt{\frac{M^2 + 2\mu^2 \|v\|^2}{3}}.$$

Замечание 1. В силу теоремы Гершгорина [9] имеют место неравенства

$$\min \sigma(\mathcal{A}_\mu) \geq \min \{ \varepsilon - \mu \|v\|, \varepsilon + m - 2\mu \|v\|, \varepsilon + 2m - \mu \|v\| \}, \\ \max \sigma(\mathcal{A}_\mu) \leq \max \{ \varepsilon - \mu \|v\|, \varepsilon + M - 2\mu \|v\|, \varepsilon + 2M - \mu \|v\| \}.$$

Замечание 2. Классическая теория возмущений дает нижнюю границу

$$\min \sigma(\mathcal{A}_\mu) \geq \begin{cases} \varepsilon - \sqrt{2}\mu \|v\|, & \text{если } m \geq 0; \\ \varepsilon + 2m - \sqrt{2}\mu \|v\|, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

Нижняя и верхняя границы спектра, обеспечиваемые кубической числовой областью значений, являются более точными, чем границы, обеспечиваемые вложениями Гершгорина и классической теорией возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gustafson K.E., Rao D.K.M. *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices* (Universitext. Springer, New York, 1997).
- [2] Toeplitz O. *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér*, Math. Z. **2** (1–2), 187–197 (1918).
- [3] Hausdorff F. *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z. **3** (1), 314–316 (1919).
- [4] Wintner A. *Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen*, Math. Z. **30** (1), 228–281 (1929).
- [5] Langer H., Tretter C. *Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices*, J. Oper. Theory **39**, 339–359 (1998).
- [6] Kato T. *Perturbation theory for linear operators* (Classics Math., Springer, Berlin, 1995).
- [7] Langer H., Markus A., Matsaev V., Tretter C. *A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range*, Linear Algebra Appl. **330**, 89–112 (2001).
- [8] Tretter C., Wagenhofer M. *The Block Numerical Range of an $n \times n$ Block Operator Matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **24** (4), 1003–1017 (2003).
- [9] Rasulov T.H., Tretter C. *Spectral inclusion for unbounded diagonally dominant $n \times n$ operator matrices*, Rocky Mountain J. Math. **48** (1), 279–324 (2018).

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Мубина Шодмоновна Шарипова

Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан

e-mail: m.sh.sharipova@buxdu.uz

T.H. Rasulov and M.Sh. Sharipova

Spectral estimates for the bounds of an operator matrix of order three

Abstract. In this paper we consider 3×3 operator matrix \mathcal{A}_μ with spectral parameter $\mu > 0$ related with the Hamiltonian of a system with nonconserved and no more than three particles on a one-dimensional lattice. Essential and discrete spectra of the operator matrix \mathcal{A}_μ are described. It is established that the operator matrix \mathcal{A}_μ has at most four simple eigenvalues outside of the essential spectrum. Spectral estimates for the lower and upper bounds of the operator matrix \mathcal{A}_μ are obtained using cubic numerical range, Gershgorin enclosures and classical perturbation theory.

Keywords: operator matrix, spectral estimate, eigenvalue, cubic numerical range, Gershgorin enclosures, classical perturbation theory.

Tulkin Husenovich Rasulov

Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Mubina Shodmonovna Sharipova

Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan

e-mail: m.sh.sharipova@buxdu.uz