Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 8, с. 27–33 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С. ДЕМИР

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТЕЙ ЯДЕР ФЕЙЕРА НА $L^2(\mathbb{R})$

Аннотация. Пусть $K_n(x)$ — ядро Фейера, заданное формулой

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{-ijx},$$

и $\sigma_n f(x) = (K_n * f)(x)$, где $f * g$ обозначает свертку f и g. Пусть последовательность $\{n_k\}$ лакунарна. Тогда ряд

$$\mathcal{G}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right)$$

сходится безусловно для любой $f \in L^2(\mathbb{R})$. Пусть (n_k) — лакунарная последовательность и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Положим

$$\mathcal{R}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right).$$

Тогда существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{R}f\|_2 \leq C\|f\|_2$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, т. е. $\mathcal{R}f$ имеет сильный тип $(2,2)$. Как частный случай, отсюда следует, что $\mathcal{G}f$ также имеет сильный тип $(2,2)$.

Ключевые слова: безусловная сходимость, ядро Фейера.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-27-33

1. Предварительные сведения

Несмотря на то, что ядра Фейера давно применяются в анализе Фурье, беглый взгляд на литературу в этой области показывает недостаточную изученность вопроса. Например, вариационные неравенства для ядер Фейера изучались в 2004 году Р.Л. Джонсом Г. Вангом [1]. С тех пор не вышло каких-либо значимых работ по этой теме. В настоящей работе изучается безусловная сходимость ядер Фейера и доказывается, что разность свертки с ядрами Фейера для лакунарной последовательности сходится безусловно при любых $f \in L^2(\mathbb{R})$. Для доказательства этого нашего результата мы сначала оцениваем преобразование Фурье, а затем используем эту оценку для доказательства требуемого неравенства безусловной сходимости.

Поступила в редакцию 23.08.2023, после доработки 23.08.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховом пространстве X называется безусловно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ сходится при любых ϵ_n, где $\epsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховом пространстве X называется слабо безусловно сходящимся, если для любого функционала $x^* \in X^*$ скалярный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)$ безусловно сходится.

Предложение. *Для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *в банаховом пространстве* X *следующие условия эквивалентны:*

(i) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *является слабо безусловно сходящимся,*

(ii) *существует константа* C *такая, что для любой* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| \le C \|\{c_n\}\|_{\infty}.$$

Доказательство. См. ([2], с. 59). □

Следствие 1. Пусть X — банахово пространство. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд в $L^p(X)$, $1 < p < \infty$, то следующие утверждения эквивалентны:

(i) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ безусловно сходится;

(ii) существует константа C такая, что для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \right\|_p \le C \|\{c_n\}\|_{\infty}.$$

Доказательство. Известно (см. [2], с. 66), что любой слабо безусловно сходящийся ряд в слабо секвенциально полном пространстве является безусловно сходящимся. Поскольку $L^p(X)$ является слабо секвенциально полным пространством при $1 < p < \infty$, то утверждение следует из предложения. □

Определение 2. Последовательность (n_k) целых чисел называется лакунарной, если существует константа $\alpha > 1$ такая, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \alpha$$

для всех $k = 1, 2, 3, \dots$.

2. Результаты

Через $K_n(x)$ обозначим ядро Фейера, задаваемое формулой

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{-ijx}.$$

Положим $\sigma_n f(x) = (K_n * f)(x)$, где $f * g$ обозначает свертку f и g.

Наш основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{n_k\}$ *лакунарна. Тогда ряд*

$$\mathcal{G}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right)$$

сходится безусловно для любой $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^\infty$, зададим

$$T_N f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right).$$

Для доказательства безусловной сходимости $\mathcal{G}f$ для любых $f \in L^2(\mathbb{R})$ нам нужно проверить, что для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ существует константа $C > 0$ такая, что

$$\sup_N \|T_N f\|_2 \le C \|\{c_n\}\|_\infty$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, так как отсюда будет вытекать выполнение условия следствия 1 для $\mathcal{G}f$.

Пусть

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(K_{n_{k+1}}(x) - K_{n_k}(x)\right).$$

Очевидно, имеем

$$|\widehat{S}_N(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} \left(\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right)\right| \le \sum_{k=1}^{N} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|.$$

Сначала мы хотим показать существование константы $C > 0$ такой, что

$$|\widehat{S}_N(x)| \le C$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Преобразование Фурье ядра Фейера задается формулой

$$\widehat{K}_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n+1}, & \text{если } |x| \le n; \\ 0, & \text{если } |x| > n. \end{cases}$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и пусть k_0 — первое такое k, что $|x| \le n_k$, положим

$$I(x) = \sum_{k=1}^{N} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|.$$

Тогда имеем

$$I(x) = \sum_{k=1}^{n_{k_0-1}} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right| + \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right| = I_1(x) + I_2(x).$$

Очевидно, получаем $I_1(x) = 0$, поскольку $\widehat{K}_n(x) = 0$ при $|x| > n$, поэтому для оценки $|\widehat{S}_N(x)|$ достаточно оценить

$$I_2(x) = \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|.$$

Имеем

$$I_2(x) = \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right| = \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \left|1 - \frac{|x|}{n_{k+1}+1} + \frac{|x|}{n_k+1} - 1\right| =$$

$$= \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \left|-\frac{|x|}{n_{k+1}+1} + \frac{|x|}{n_k+1}\right| \le \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{|x|}{n_{k+1}+1} + \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{|x|}{n_k+1} \le$$

$$\le \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{|x|}{n_{k+1}} + \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{|x|}{n_k} \le \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{n_{k_0}}{n_{k+1}} + \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{n_{k_0}}{n_k}.$$

С другой стороны, поскольку последовательность $\{n_k\}$ лакуарна, то существует вещественное число $\alpha > 1$ такое, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \alpha$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем

$$\frac{n_{k_0}}{n_k} = \frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}} \cdot \frac{n_{k_0+1}}{n_{k_0+2}} \cdot \frac{n_{k_0+2}}{n_{k_0+3}} \cdots \frac{n_{k-1}}{n_k} \le \frac{1}{\alpha^k}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{n_{k_0}}{n_k} \le \sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{1}{\alpha^k} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=n_{k_0}}^{N} \frac{n_{k_0}}{n_{k+1}} \le \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

что доказывает неравенство

$$I_2(x) \le 2\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Поскольку оценка не зависит от выбора $x \in \mathbb{R}$, доказанное нами верно для всех $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, существует константа $C > 0$ такая, что

$$|\widehat{S}_N(x)| \le C \tag{$*$}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$.

Теперь мы имеем

$$\|T_N f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{N} c_k \left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{N} \left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx = \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |S_N * f(x)|^2\, dx =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{S_N * f}(x)|^2\,dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) = \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{S}_N(x)|^2 \cdot |\hat{f}(x)|^2\,dx \le$$

$$\le C\|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\,dx \quad (\text{ввиду } (*)) = C\|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) =$$

$$= C\|\{c_n\}\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Таким образом, получаем

$$\sup_N \|T_N f\|_2 \le \sqrt{C}\|\{c_n\}\|_\infty \|f\|_2,$$

что завершает доказательство. □

Теорема 2. *Пусть* (n_k) *— лакунарная последовательность и* $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$. *Определим*

$$\mathcal{R}f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right).$$

Тогда существует константа $C > 0$ *такая, что*

$$\|\mathcal{R}f\|_2 \le C\|f\|_2$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, *т. е.* $\mathcal{R}f$ *имеет сильный тип* $(2,2)$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 мы показали, что для данного $N \in \mathbb{N}$ существует константа $C_1 > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^N \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right| \le C_1$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу, получаем

$$\sum_{k=1}^\infty \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right| \le C_1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеем

$$\|\mathcal{R}f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^N c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^\infty c_k \left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx \le$$

$$\le \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^\infty \left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^\infty \left|\left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} \left|\left(K_{n_{k+1}} * f(x) - K_{n_k} * f(x)\right)\right|^2 dx =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} \left|\left(\widehat{K_{n_{k+1}} * f}(x) - \widehat{K_{n_k} * f}(x)\right)\right|^2 dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|^2 |\hat{f}(x)|^2\,dx =$$

$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\widehat{K}_{n_{k+1}}(x) - \widehat{K}_{n_k}(x)\right|^2 |\hat{f}(x)|^2\,dx \le \|\{c_n\}\|_\infty^2 C_1 \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\,dx =$$
$$= \|\{c_n\}\|_\infty^2 C_1 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) = \|\{c_n\}\|_\infty^2 C_1 \|f\|_2^2.$$

Это означает, что существует константа $C > 0$ такая, что
$$\|\mathcal{R}f\|_2 \le C\|f\|_2$$
для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, т. е. $\mathcal{R}f$ имеет сильный тип $(2,2)$. $\square$

Следствие 2. Пусть (n_k) — лакунарная последовательность. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что
$$\|\mathcal{R}f\|_2 \le C\|f\|_2$$
для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, т. е. $\mathcal{R}f$ имеет сильный тип $(2,2)$.

Доказательство. Если взять $c_k = 1$ для всех k в определении $\mathcal{R}f$, то получим
$$\mathcal{G}f = \mathcal{R}f,$$
и доказательство следует из теоремы 2. $\square$

Литература

[1] Jones R.L., Wang G. *Variational inequalities for the Fejér and Poisson kernels*, Trans. AMS **356** (11), 4493–4518 (2004).

[2] Wojtaszczyk P. *Banach spaces for analysts* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).

Сакин Демир

Университет Агры Ибрагима Чечена,
г. Агры, 04100, Турция,

`e-mail:` sakin.demir@gmail.com

S. Demir

Unconditional convergence of the differences of Fejér kernels on $L^2(\mathbb{R})$

Abstract. Let $K_n(x)$ denote the Fejér kernel given by

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{-ijx}$$

and let $\sigma_n f(x) = (K_n * f)(x)$, where as usual $f * g$ denotes the convolution of f and g. Let the sequence $\{n_k\}$ be lacunary. Then the series

$$\mathcal{G}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right)$$

converges unconditionally for all $f \in L^2(\mathbb{R})$. Let (n_k) be a lacunary sequence, and $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Define

$$\mathcal{R}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\sigma_{n_{k+1}} f(x) - \sigma_{n_k} f(x)\right).$$

Then there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|\mathcal{R}f\|_2 \leq C\|f\|_2$$

for all $f \in L^2(\mathbb{R})$, i.e., $\mathcal{R}f$ is of strong type $(2,2)$. As a special case it follows that $\mathcal{G}f$ also is of strong type $(2,2)$.

Keywords: unconditional convergence, Fejér kernel.

Sakin Demir

Agri Ibrahim Cecen University,
Ağrı, 04100 Turkey,

`e-mail:` sakin.demir@gmail.com