

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

О РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПОРОЖДЕННОМ ШЕСТИУГОЛЬНИКОМ

Аннотация. Пусть D — шестиугольник, у которого два развернутых и четыре прямых угла. Рассматривается семиэлементное разностное уравнение с голоморфными коэффициентами, порожденное им. Решение отыскивается в классе функций, голоморфных вне “половины” границы ∂D и исчезающих на бесконечности. Оно представляется в виде интеграла типа Коши по “половине” границы с неизвестной плотностью. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: многоэлементные функциональные уравнения, метод равносильной регуляризации, проблема моментов для целых функций.

УДК: 517.18

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-20-26

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривались линейные разностные уравнения (л.р.у.) с постоянными коэффициентами, связанные с правильным шестиугольником. Также были указаны их приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Цель данной статьи — исследовать л.р.у. с голоморфными коэффициентами в случае, когда шестиугольник D имеет три пары параллельных и равных сторон. Если на $\Gamma = \partial D$ выбрать направление обхода, то эти стороны имеют противоположную ориентацию.

Пусть D — шестиугольник с вершинами $t_1 = -1 - i$, $t_2 = -i$, $t_3 = 1 - i$, $t_4 = 1 + i$, $t_5 = i$, $t_6 = i - 1$ и сторонами ℓ_j , перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы Γ (ℓ_1 — отрезок с концами t_1 и t_2). Другими словами, квадрат с вершинами t_1 , t_3 , t_4 , t_6 интерпретируем как шестиугольник с четырьмя прямыми и двумя развернутыми углами. Такой выбор сделан для определенности и сокращения возникающих далее громоздких вычислений. Введем шесть преобразований $\sigma_1(z) = z + 2i + 1$, $\sigma_2(z) = z + 2i - 1$, $\sigma_3(z) = z - 2$, $\sigma_k = \sigma_{k-3}^{-1}$, $k = \overline{4, 6}$, и кусочно-линейный инволютивный сдвиг $\alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in \ell_j; j = \overline{1, 6}\}$, разрывный в вершинах и изменяющий ориентацию Γ . Множество D , если к нему добавить множества $\overline{\ell_1} \cup \ell_5 \cup \ell_6$, является фундаментальной областью двоякопериодической группы, построенной по примитивным периодам $w_1 = 2$ и $w_2 = 2i + 1$. Каждая вершина является общей для трех конгруэнтных шестиугольников, сходящихся в этой точке. Поскольку это число нечетно, нельзя построить лакунарный аналог тэта-ряда Пуанкаре [2], не содержащий в качестве одного из слагаемых ядра Коши, как это сделано, например, в работах [3]–[4]. Поэтому впредь вместо всей границы Γ возьмем его “половину” Ω , удовлетворяющую трем условиям:

Поступила в редакцию 03.07.2023, после доработки 03.07.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

1) Ω — кусочно-гладкая кривая (или конечная совокупность таких кривых Ω_j), причем $\overline{\Omega_k} \cap \overline{\Omega_m} = \emptyset$ при $k \neq m$;

2) $\overline{\Omega} \cup \alpha(\overline{\Omega}) = \Gamma$ (с точностью до узлов Ω и вершин Γ);

3) если D_1 — выпуклая оболочка Ω , то $D \setminus D_1 \neq \emptyset$.

Впервые такой подход был предложен в статье [5]. В выборе Ω имеется некоторый произвол (более подробно по этому поводу см. [1]), но здесь ограничимся случаем, когда $\Omega = \cup \ell_k$, $k = 1, 5, 6$.

Рассмотрим л.р.у.

$$f(z) + \sum_{j=1}^6 G_j(z) f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

при следующих предположениях.

1) Решение $f(z)$ голоморфно вне Ω и $f(\infty) = 0$. На любом компакте из Ω граничные значения $f^\pm(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, а в узлах Ω могут быть, самое большое, логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B .

2) Коэффициенты $G_j(z)$ голоморфны в $\overline{D}$ ($\forall j \ G_j(z) \in A[D]$).

3) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и $g^+(t) \in H(\Gamma)$.

По поводу нетривиальности уравнения (1) даже в простейшем случае, когда все его коэффициенты постоянны, см. [1]. Определяющим здесь является несвязность множества

$$D_0 = C \setminus \bigcup_{k=1}^6 \sigma_k^{-1}(D). \quad (2)$$

Оно распадается на две связные компоненты, одной из которых является шестиугольник D , а второй содержит бесконечно удаленную точку.

Статья состоит из трех частей. В первой части указаны ограничения на коэффициенты, позволяющие провести регуляризацию л.р.у., а так же выяснить вопрос о равносильности этой регуляризации. Во второй части проведено полное исследование уравнения (1) в частном случае, когда

$$G_1(z) = 2^{-1}(1 - i - z); \quad G_j(z) = -1, \quad j = 2, 3, 5; \quad G_4(z) = 1, \quad G_6(z) = 0. \quad (3)$$

В третьей части рассмотрены приложения к проблеме моментов для ц.ф.э.т.

1. УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Будем искать решение задачи (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (4)$$

с неизвестной плотностью. С учетом (4) имеем

$$(1) \Rightarrow (E\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} A(z, \tau) \varphi(\tau) = g(z), \quad z \in D, \quad (5)$$

где

$$A(z, \tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_{k=1}^6 G_j(z) (\tau - \sigma_j(z))^{-1}.$$

При $z \rightarrow t$ ($t \in \Omega$), используя (5), по формуле Ю.В. Сохоцкого получим

$$(E^+ \varphi)(t) \equiv 2^{-1} \varphi(t) + (E\varphi)(t) = g^+(t), \quad (6)$$

где особый интегральный оператор $(E\varphi)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. При $z \rightarrow \alpha(t)$ имеем

$$(E^+\varphi)(\alpha(t)) \equiv -2^{-1}G(t)\varphi(t) + (E\varphi)(\alpha(t)) = g^+(\alpha(t)). \quad (7)$$

Здесь $G(t) = \{G_4(t+2i+1), t \in \ell_1; G_2(t-2i+1), t \in \ell_5; G_3(t+2), t \in \ell_6\}$. Из равенств (6) и (7) вытекает $G(t)(E^+\varphi)(t) - (E^+\varphi)(\alpha(t)) = (T\varphi)(t)$, причем

$$(T\varphi)(t) \equiv G(t)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = G(t)g^+(t) - g^+(\alpha(t)). \quad (8)$$

Определим характер особенностей ядра

$$K(t, \tau) = G(t)A(t, \tau) - A(\alpha(t), \tau). \quad (9)$$

Рассмотрим три случая расположения точки t на сторонах Ω . Договоримся выписывать только те слагаемые из ядра (9), которые могут обращаться в бесконечность при данном t .

1) $t \in \ell_1$. Тогда $K(t, \tau) = h_1(t)(\tau - t - 2i - 1)^{-1} + h_2(t)(\tau - t - 2i + 1)^{-1} + \dots$, где $h_1(t) = G_4(t+2i+1)G_1(t) - 1$, $h_2(t) = G_4(t+2i+1)G_2(t) - G_3(t+2i+1)$. Первое выписанное слагаемое может обратиться в бесконечность при $t \rightarrow -i-1+0, \tau \rightarrow i+0$. Потребуем, чтобы $h_1(-i-1) = 0$. Тогда с учетом того, что функция $h_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица, получим $|h_1(t)(\tau - t - 2i - 1)^{-1}| \leq \mu < \infty$, где μ — постоянная Липшица, поскольку точки τ и $t+2i+1$ лежат на прямой $\text{Im } t = 1$ по разные стороны от точки i . Второе слагаемое может обратиться в бесконечность при $t \rightarrow -i-0, \tau \rightarrow i-1$. Потребуем, чтобы $h_2(-i) = 0$. Если $\tau \rightarrow i-1-0$, то точки τ и $t+2i-1$ лежат на прямой $\text{Im } t = 1$ по разные стороны от точки $i-1$. Если же $\tau \rightarrow -1+i+0$, то точки $\tau, i-1, t+2i-1$ — вершины треугольника с прямым углом при вершине $i-1$. В обоих случаях $|\tau - t - 2i + 1| > |t + i|$.

2) $t \in \ell_5$. Тогда $K(t, \tau) = h_3(t)(\tau - t + 2i - 1)^{-1} + h_4(t)(\tau - t + 2i + 1)^{-1} + \dots$, где $h_3(t) = G_2(t-2i+1)G_5(t) - 1$, $h_4(t) = G_2(t-2i+1)h_4(t) - G_3(t-2i+1)$.

При условии $h_3(i-1) = 0, h_4(i) = 0$ ограниченность ядра (9) доказывается аналогичными рассуждениями, приведенными в случае 1).

3) $t \in \ell_6$. Тогда $K(t, \tau) = h_5(\tau - t - 2i - 1)^{-1} + h_6(t)(\tau - t_2i - 1)^{-1} + \dots$. Здесь $h_5(t) = G_3(t+2)G_1(t) - G_2(t+2)$, $h_6(t) = G_5(t)G_3(t+2) - G_4(t+2)$.

Пусть $h_5(-1-i) = 0, h_6(1-i) = 0$. Первое слагаемое может обратиться в бесконечность при $t \rightarrow -1-i-0, \tau \rightarrow i+0$. Точки $\tau, i, t+2i+1$ — вершины треугольника с прямым углом при вершинах i , т. е. $|\tau - t - 2i - 1| > |t + i + 1|$, откуда все и следует. Ограниченность второго слагаемого доказывается аналогично.

Итак, справедлива

Теорема 1. Пусть $G(t) \neq 0, t \in \bar{\Omega}$, и выполнены условия

$$G_4(i)G_1(-1-i) = 1, \quad G_4(1+i)G_2(-i) = G_3(1+i), \quad G_2(-i)G_5(i-1) = 1,$$

$$G_2(1-i)G_4(i) = G_3(1-i), \quad G_3(1-i)G_1(-i-1) = G_2(1-i), \quad G_5(i-1)G_3(1+i) = G_4(1+i).$$

Тогда ядро (9) ограничено, а интегральное уравнение (8) есть уравнение Фредгольма второго рода.

Замечание 1. Теорема 1 не содержит ограничений на функцию $G_6(t)$. Это связано с тем, что $\sigma_6(\bar{\Omega}) \cup \bar{\Omega} = \emptyset$. Если в правой части соотношения (2) убрать множество $\sigma_6^{-1}(\Omega)$, то множество D_0 останется несвязным, причем D и бесконечно удаленная точка принадлежат разным связным компонентам.

Замечание 2. Кроме двух наборов постоянных коэффициентов, при которых уравнение (1) допускает регуляризацию, рассмотренных в статье [1], существуют и другие. Опишем их при данном выборе Ω . Пусть $G_j(z) = \lambda_j$, $j = \overline{1, 5}$. Тогда $\lambda_1 = \beta$, $\lambda_2 = \gamma$, $\lambda_3 = \gamma\beta^{-1}$, $\lambda_4 = \beta^{-1}$, $\lambda_5 = \gamma^{-1}$, где β и γ — произвольные параметры ($\gamma\beta \neq 0$).

Замечание 3. Условие $\forall j G_j(z) \in A[D]$ можно ослабить. Достаточно потребовать голоморфность этих функций в D , $G_j^+(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $\mu \in (0, 1)$. Тогда интегральный оператор в формуле (8) вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$ ([6], с. 128). У него слабые полярные особенности в узлах Ω , как это следует из приведенных выше оценок.

Теперь осуществим обратный переход от интегрального уравнения (8) к задаче (1). Уравнение (8) имеет $N < \infty$ условий разрешимости. Пусть они все выполнены и $\varphi(t)$ — его решение. Тогда

$$(8) \Rightarrow G(t)h^+(t) = h^+[\alpha(t)], \quad t \in \Omega, \quad (10)$$

где $h(z) = (E\varphi)(z) - g(z)$. Итак, (8) $\Leftrightarrow$ (1) только в том случае, если однородная краевая задача Карлемана (10) имеет лишь тривиальное решение $h(z) \equiv 0$. Другими словами, необходимо рассматривать индекс $\varkappa$ коэффициента $G(t)$.

Пусть

$$\alpha + i\gamma = (2\pi i)^{-1} [\ln G(t_1 + 0) - \ln G(t_1 - 0) - \\ - \ln G(t_2 - 0) + \ln G(t_5 + 0) + \ln G(t_6 + 0) - \ln G(t_6 - 0)].$$

Подразумевается, что на каждой стороне Ω выбрана некоторая непрерывно изменяющаяся ветвь логарифма. Выберем целое число $\varkappa$ так, чтобы $0 \leq \alpha - \varkappa \leq 1$. При $\varkappa \leq 0$ имеем $h(z) \equiv 0$. При $\varkappa > 0$ однородная задача (10) имеет $\varkappa$ линейно независимых решений [7].

Теорема 2. При $\varkappa \leq 0$ задача (1) имеет N условий разрешимости, которые являются условиями разрешимости уравнения (8). Если $\varkappa > 0$, то условий разрешимости $N + \varkappa$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим частный случай задачи (1) с коэффициентами (3). Они удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Покажем, что интегральное уравнение (8) разрешимо. Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$T\varphi = 0. \quad (11)$$

Применим к нему принцип сжимающих отображений в банаховом пространстве $\tilde{C}$ — множестве функций $\varphi(t) \in C(\bar{\ell}_j)$, $j = 1, 5, 6$, с нормой $M = \max |\varphi(t)|$, $t \in \bar{\Omega}$.

Пусть $M = \varphi(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in \Omega$. Определим положительное число $\ell_j = d_j \max |K(\tilde{t}, \tau)|$, $\tau \in \bar{\ell}_j$. Здесь $d_1 = d_5 = 1$, $d_6 = 2$. Если

$$\lambda = \sum_{j=1,5,6} \mu_j < 2\pi, \quad (12)$$

то $M = 0$.

Лемма. Однородное уравнение (11) имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in \ell_1$ и $u = \tau - \tilde{t}$. Тогда $K(\tilde{t}, \tau) = K_1(\tilde{t}, \tau) + K_2(\tilde{t}, \tau)$, где

$$K_1(\tilde{t}, \tau) = (G_1(\tilde{t}) - 1)(u - t - 2i - 1)^{-1}, \\ K_2(\tilde{t}, \tau) = (u + 2i + 1)^{-1} - (u + 2)^{-1} - (u + 2i - 1)^{-1} - \\ - G_1(\tilde{t} + 2i + 1)(u - 4i - 2)^{-1} + (u - 4i)^{-1} + (u - 2)^{-1}.$$

1) $\tau \in \ell_1$. Значит, $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.96 \Rightarrow \mu_1 = 0, 96$.

- 2) $\tau \in \ell_6$. Значит, $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.77 \Rightarrow \mu_6 = 1, 54$.
 3) $\tau \in \ell_5$. Значит, $|K_1(\tilde{t}, \tau)| < 0.5$ и $|K_2(\tilde{t}, \tau)| < 0, 77 \Rightarrow \mu_5 = 1.27$.
 Итак, в данном случае $\lambda = 3.77$.
 Пусть $\tilde{t} \in \ell_5$. Тогда

$$K(\tilde{t}, \tau) = (u - 2i + 1)^{-1} - G_1(\tilde{t}) (\tau - t - 2i - 1)^{-1} + (u + 2)^{-1} - \\ - G_1(\tilde{t} - 2i + 1) (u - 2)^{-1} - (u + 4i)^{-1} + (u + 4i - 2)^{-1}.$$

- 1) $\tau \in \ell_1$. Имеем $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.7 \Rightarrow \mu_1 = 0.7$.
 2) $\tau \in \ell_6$. Имеем $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.86 \Rightarrow \mu_2 = 1.72$.
 3) $\tau \in \ell_5$. Имеем $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.67 \Rightarrow \mu_5 = 0.67$. В этом случае $\lambda = 3.03$.

Пусть $\tilde{t} \in \ell_6$. Тогда $K(\tilde{t}, \tau) = K_3(\tilde{t}, \tau) + K_4(\tilde{t}, \tau)$, где $K_3(\tilde{t}, \tau) = [1 - G_1(\tilde{t})] (u - 2i - 1)^{-1}$, $K_4(\tilde{t}, \tau) = (u - 2i + 1)^{-1} + (u + 2)^{-1} - (u + 2i + 1)^{-1} - (u - 2)^{-1} - G_1(\tilde{t} + 2) (u - 2i - 3)^{-1} + (u + 2i - 3)^{-1}$.

- 1) $\tau \in \ell_1$. Здесь $|K(\tilde{t}, \tau)| < 0.94 \Rightarrow \mu_1 = 0.94$.
 2) $\tau \in \ell_6$. Здесь $|K(\tilde{t}, \tau)| < 1.36 \Rightarrow \mu_2 = 2.72$.
 3) $\tau \in \ell_5$. Здесь $|K_3(\tilde{t}, \tau)| < 0, 5$ и $|K_4(\tilde{t}, \tau)| < 1.35$, т. е. $|K(\tilde{t}, \tau)| < 1.85 \Rightarrow \mu_5 = 1.85$.

В данном случае $\lambda = 5.51$. Итак, оценка (12) выполняется при всех t , т. е. $\varphi(t) \equiv 0$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Теорема 3. *Линейно разностное уравнение (1) с коэффициентами (3) разрешимо и имеет единственное решение. Однородное линейно разностное уравнение (1) ($g(z) \equiv 0$) имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Достаточно заметить, что однородная задача Карлемана (10) имеет лишь тривиальное решение. $\square$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Укажем приложения л.р.у. (1) с коэффициентами (3) к проблеме моментов для ц.ф.э.т. Решение $f(z) \in B$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю ([7], §1) с верхней функцией $F(z)$. Сопряженной индикаторной диаграммой ц.ф.э.т. $F(z)$ является, вообще говоря, прямоугольник D_1 с вершинами t_1, t_2, t_5, t_6 . Пусть точки z и z_0 из множества $D \setminus \overline{D_1}$ и

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k (z - z_0)^k}{k!}, \quad (13)$$

причем у степенного ряда радиус сходимости $R = \max(|z_0 - t_5|, |z_0 - t_6|)$. Перепишем соотношение (1) в виде

$$\sum_{m=1}^4 \int_{\arg \tau = \theta_m} F(\tau) H_m(z, \tau) d\tau = g(z), \quad z \in D. \quad (14)$$

Здесь

$$H_1(z, \tau) = \exp(-z\tau) + G_1(z) \exp[-\sigma_1(z)\tau] - \exp[-\sigma_5(z)\tau], \quad \theta_1 = 0; \\ H_2(z, \tau) = -\exp[-\sigma_2(z)\tau], \quad \theta_2 = 3\pi/2; \quad H_3(z, \tau) = -\exp[-\sigma_3(z)\tau], \quad \theta_3 = \pi; \\ H_4(z, \tau) = \exp[-\sigma_4(z)\tau], \quad \theta_4 = \pi/2.$$

С учетом (13) приравняем коэффициенты Тейлора в точке z_0 левой и правой частей равенства (14). Тогда

$$\sum_{m=1}^4 \int_{\arg z=\theta_m} F(\tau) \frac{\partial^k}{\partial z^k} H_m(z, \tau) \Big|_{z=z_0} d\tau = c_k, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (15)$$

Теорема 4. Проблема моментов (15) в классе ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижними функциями $f(z) \in B$, разрешима и имеет единственное решение.

Замечание 4. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является некоторое “меньшее” выпуклое множество $Q \subset D_1$, возможен, но малоинтересен (см. [1]). Тогда л.р.у. переопределено: оно выполняется не только при $z \in D$, но и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Для этого необходимо, но не достаточно, чтобы свободный член был аналитически продолжим из D в эту окрестность. Тогда решение $f(z)$ можно найти в явном виде и останется только проверить, удовлетворяет ли оно (1). Для набора коэффициентов (3) следует учесть, что если $\lim_{z \rightarrow \infty} (zf(z)) = C$, то для нижней функции $zf(z) - C$ верхней будет $F'(z)$.

Замечание 5. Ограничения теоремы 1 существенно зависят от выбора множества Ω . Пусть, например, $\Omega = \cup \ell_j$, $j = 1, 2, 6$. Тогда сопряженной индикаторной диаграммой будет треугольник с вершинами t_1, t_3, t_6 . Аналог теоремы 1 не будет содержать ограничений на коэффициент $G_1(z)$, поскольку $\sigma_1(\overline{\Omega}) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Вообще говоря, Ω можно выбрать так, что любая точка $\tau \in \Gamma$ будет ее узлом.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Garif'yanov F. N., Strezhneva E. V. *Interpolation Problems for Entire Functions Induced by Regular Hexagons*, Siberian Math. J. **59** (1), 59–64 (2018), DOI: 10.1134/S003744661801007X.
- [2] Aksent'eva E. P., Garif'yanov F. N. *On Lacunary Analogs of the Poincare Theta-Series and Their Applications*, Siberian Math. J. **43** (5), 787–794 (2002), DOI: 10.1023/A:1020191219922.
- [3] Гарифьянов Ф.Н. *Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра*, Изв. вузов. Матем. (4), 11–15 (2001).
- [4] Garif'yanov F. N. *Absolutely representing systems of elliptic functions*, Math. Notes **59** (6), 676–680 (1996), DOI: 10.1007/BF02307220.
- [5] Garif'yanov F. N., Modina S. A. *The Carleman kernel and its applications*, Siberian Math. J. **53** (6), 1263–1273 (2012), DOI: 10.1134/S0037446612060055.
- [6] Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям* (Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, М., 1959).
- [7] Зверович Э.И., *Метод локально-конформного склеивания*, ДАН ССР **205** (4), 767–770 (1972).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: strezh@yandex.ru

F.N. Garif'yanov and E.V. Strezhneva

On a difference equation with holomorphic coefficients generated by a hexagon

Abstract. Let D be a hexagon with two straight and four right angles. We consider a seven-element difference equation with holomorphic coefficients generated by this hexagon. A method for regularizing this equation is proposed. The solution is sought in the class of functions holomorphic outside the "half" of the boundary ∂D and vanishing at infinity. It is represented as a Cauchy-type integral over the "half" of the boundary with an unknown density. Applications to the problem of moments for entire functions of exponential type (e.f.e.t.) are indicated.

Keywords: multi-element functional equations, equivalent regularization method, moment problem for entire functions.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

*Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,*

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Elena Vasil'evna Strezhneva

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
10 K. Marx str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: strezh@yandex.ru