

Ф. АЧАБ, А. ХАФДАЛЛА, И. РЕЗЗОУТ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Исследуется обратная задача, состоящая в определении неизвестных локальных изменений плотности населения, независимо от отсутствующей начальной возрастной структуры населения, на основе известных измерений состояния. Основная идея заключается в преобразовании исследования обратной задачи в задачу оптимального управления с неполными данными. Предложенный метод решения такого рода задач — это управление без сожалений, аппроксимированное последовательностью управлений с малым сожалением. Мы доказываем существование и единственность последовательности управлений с малым сожалением, которая слабо сходится к единственному управлению без сожалений. Локальные изменения будут охарактеризованы спаренной системой оптимальности.

Ключевые слова: задача идентификации, возрастная структура населения, неполные данные, управление без сожалений, спаренная система оптимальности.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-3-19

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее значимых областей экологии является динамика популяций, изучающая изменения в составе численности популяции по возрасту и размеру с течением времени. Эта область привлекает внимание многих ученых (см., например, [1]–[3]).

Такие элементы как рождаемость, смертность и миграция влияют на изменение численности населения, и эти изменения могут иметь как положительные, так и отрицательные последствия для здоровья окружающей среды.

Рост населения положительно влияет на экономическое развитие, увеличивает количество общественного транспорта и водоснабжение. С другой стороны, наличествует и негативное влияние — это увеличение загрязнения воздуха и ухудшение качества воды, а также распространение болезней, что связано с отсутствием инфраструктуры и экологических услуг, поэтому нам необходимы соответствующие услуги и хорошее планирование для достижения устойчивого роста.

Решение обратной задачи о возрастной структуре популяции может быть осуществлено различными методами. Например, авторы работы [4] используют кумулятивную формулировку для определения функции выживания и воспроизводства индивидуального поведения, в [5] используется метод характеристик для определения физиологической структуры собранной популяции, а в [6] — система оптимального управления для определения источника. С другой точки зрения, в нашей работе мы ставим перед собой цель определить

источник в популяции с возрастной структурой иным способом, когда желательно найти локальные изменения плотности популяции без учета недостающей информации. Существует несколько причин отсутствия информации при моделировании структурированных по возрасту популяций. Одной из основных таких причин является наличие периода в начальном состоянии задачи, другой причиной является сложность: структурированные по возрасту популяции являются сложными по своей природе и могут быть трудно моделируемыми из-за взаимодействия различных демографических, социальных и экономических факторов. Эта сложность может затруднить разработку точных и надежных моделей. Среди затрудняющих факторов при моделировании можно также отметить отсутствие опыта: информационное моделирование возрастной структуры населения требует сочетания демографических, статистических и вычислительных навыков. Отсутствие экспертов с такими навыками может ограничить разработку информационных моделей. Ограниченные ресурсы также усложняют моделирование: разработка информационных моделей структурированных по возрасту популяций может быть ресурсоемкой, и многие организации могут не иметь финансовых ресурсов для инвестирования в такие проекты. Наконец, может просто отсутствовать интерес к разработке информационных моделей структурированных по возрасту популяций. Демографические исследования и моделирование населения могут не являться приоритетными для некоторых организаций или правительств, что может привести к ограничению инвестиций в эту область.

В данной работе мы исследуем идентификацию источника в обратной задаче динамики населения с возрастной структурой, когда необходимо определить локальные изменения плотности населения, что важно по целому ряду причин, включая городское планирование, управление ресурсами и здравоохранение. Мы полагаем, что знание некоторых измерений состояния позволяет определить источник с помощью системы оптимального управления. Таким образом, обратная задача трансформируется в задачу оптимального управления, эта идея также используется в [6]. Сложность в нашей работе связана с отсутствием начального возраста популяции, когда классический метод теории оптимального управления непригоден, так как он дает нам управление, зависящее от этих неопределенностей. Мы решили использовать управление без сожалений, представленное [7], оно ограничивает нас управлением в жестком наборе, который мы должны создать, но с помощью метода управления с малыми сожалениями мы расширили набор, чтобы найти системы оптимальности, характеризующие неизвестные источники. Это понятие развивалось многими авторами, например, в [8] предложено понятие управления с малым сожалением для нелинейных задач. Также в [9] доказывается эквивалентность между понятиями управления без сожалений и управления по Парето. В работах [10]–[12] рассматривается понятие управления с малым сожалением в дробных задачах. В [13] авторы объединили понятия управления без сожалений и среднего управления в задаче об уравнении электромагнитных волн. В [14] управление без сожалений было обобщено на абстрактные системы, в [15] это понятие было использовано в задаче о термоупругом теле с недостающими данными. Также в [16] использовано управление без сожалений для определения неизвестных параметров. В [17] авторы используют регулярность Тихонова для разрешения вопроса об управляемости в дробной вырожденной и сингулярной задаче.

Данная статья организована следующим образом: сначала мы преобразуем обратную задачу в задачу оптимального управления с неполными данными, затем применяем метод управления без сожалений, после чего ослабляем нашу задачу методом спаренной последовательности управлений с малым сожалением, которая слабо сходится к единственному

управлению без сожалений, и, наконец, характеризуем оба метода с помощью системы оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начнем этот раздел с представления нашей обратной задачи для спаренной линейной модели динамики населения с возрастной структурой, преобразуем ее в задачу оптимального управления и затем решим эту задачу. Рассматривается следующая обратная задача (1) нахождения неизвестной пары источников в динамике структурированной по возрасту популяции с разрывными коэффициентами диффузии и отсутствующими начальными условиями, связанными с какого-либо рода измерениями.

Пусть Ω — открытая ограниченная область $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) с границей Γ класса C^2 , T — положительная константа, A — естественная жизнь индивидуума. Введем обозначения $Q = \Omega \times (0, T) \times (0, A)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $Q_A = \Omega \times (0, A)$ и $\Sigma = \Gamma \times (0, T) \times (0, A)$, $Dy = y_t + y_a$, $Dz = z_t + z_a$, тогда

$$\begin{aligned} Dy &= \operatorname{div}(r(x)\nabla y) + a(x)y + b(x)z + f_1(x, t, a), \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz &= \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z) + \tilde{a}(x)z + \tilde{b}(x)z + f_2(x, t, a), \quad (x, t, a) \in Q; \\ y(x, 0, a) &= y_0(x, a), \quad z(x, 0, a) = z_0(x, a), \quad (x, a) \in Q_A; \\ y(x, t, 0) &= y_0(x, t), \quad z(x, t, 0) = z_0(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y(x, t, a) &= z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

где измерения $y(x, t, a)$ и $z(x, t, a)$ представляют возрастную плотность в момент времени t в точке x , диффузивность (y, z) определяется коэффициентами r и $\tilde{r}$, коэффициенты $a, \tilde{a}$ и $b, \tilde{b}$ — это скорости естественного роста y и z соответственно, все вышеупомянутые коэффициенты удовлетворяют предположению из работы [18], функции $f_1(t, a, x), f_2(t, a, x)$ являются неизвестными источниками, представляющими локальное изменение плотности популяции, а $(y_0(x, a), z_0(x, a))$ — начальное распределение возрастов популяции, предполагаемое неизвестным.

Предложение ([18]). Если $(f_1, f_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ и $(y_0 = y_0(x, a), z_0 = z_0(x, a)) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)$, то спаренная система (1) имеет единственное спаренное непрерывное решение, обозначаемое

$$(y, z) = (y(t, f_1, y_0), z(t, f_2, z_0)) = (y(t, a, x, f_1, y_0), z(t, a, x, f_2, z_0)) \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Постановка проблемы. Наша обратная задача состоит в выявлении локальных изменений плотности населения, что может предоставить важную информацию о различных демографических и социальных явлениях. Возрастная структура населения — это распределение людей по различным возрастным группам, она является ключевым фактором роста и снижения численности населения. Понимание изменений в возрастной структуре населения может помочь лучше понять динамику населения и факторы, способствующие росту или снижению численности населения, такие как рождаемость, смертность, миграция и старение. Например, если население демонстрирует тенденцию к старению, это может указывать на снижение уровня рождаемости и увеличение продолжительности жизни, что может иметь значительные последствия для экономики и системы здравоохранения. С другой стороны, если население демонстрирует тенденцию к омоложению, это может указывать на высокий уровень рождаемости и более низкую продолжительность жизни, что также может иметь важные последствия для распределения ресурсов и развития.

Кроме того, выявление локальных изменений в возрастной структуре населения может предоставить важную информацию для планирования и разработки политики. Например, если в местной области наблюдается особенно быстрая тенденция к старению, политикам может понадобиться принять меры для решения потенциальных проблем в системах здравоохранения и пенсионного обеспечения или планировать удовлетворение потребностей стареющего населения. Вкратце, понимание изменений в возрастной структуре населения может предоставить ценные сведения о демографических и социальных тенденциях и способствовать планированию и разработке политики в различных областях.

Математически наша задача заключается в следующем: определить (f_1, f_2) для данного наблюдения $(y(t, f_1, y_0), z(t, f_2, z_0)) = (y_{obs}, z_{obs})$.

1.1. Преобразование обратной задачи в задачу оптимального управления с отсутствующими данными. Исходную пару (f_1, f_2) заменяя парой управлений (v_1, v_2) и спаренные начальные условия (y_0, z_0) — спаренными функциями (g_1, g_2) , получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} Dy &= \operatorname{div}(r(x)\nabla y) + a(x)y + b(x)z + v_1(x, t, a), \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz &= \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z) + \tilde{a}(x)z + \tilde{b}(x)z + v_2(x, t, a), \quad (x, t, a) \in Q; \\ y(x, 0, a) &= g_1(x, a), \quad z(x, 0, a) = g_2(x, a), \quad (x, a) \in Q_A; \\ y(x, t, 0) &= y_0(x, t), \quad z(x, t, 0) = z_0(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y(x, t, a) &= z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

где (g_1, g_2) являются неизвестными функциями. Наша цель состоит в том, чтобы определить функции управления (v_1, v_2) , не учитывая недостающие начальные условия, используя метод управления без сожалений. Пусть задано наблюдение

$$(y(t, v_1, g_1), z(t, v_2, g_2)) = (y_{obs}, z_{obs}),$$

где (y_{obs}, z_{obs}) — заданные наблюдения в $L^2(Q)$ и $y(t, v_1, g_1) = y(t, a, x, v_1, g_1)$, $z(t, v_2, g_2) = z(t, a, x, v_2, g_2)$, со следующей функцией потерь:

$$J(v_1, v_2, g_1, g_2) = \|y(t, v_1, y_0) - y_{obs}\|_{L^2(Q)}^2 + \|z(t, v_2, z_0) - z_{obs}\|_{L^2(Q)}^2 + N \left(\|v_1\|_{L^2(Q)}^2 + \|v_2\|_{L^2(Q)}^2 \right), \quad (3)$$

где $N > 0$. Наша цель — решить задачу оптимального управления с недостающими данными:

$$\begin{aligned} &\text{найти пару } (u_1, u_2) \in (L^2(Q))^2 \text{ такую, что} \\ J(u_1, u_2, g_1, g_2) &= \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} J(v_1, v_2, g_1, g_2). \end{aligned}$$

2. МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ БЕЗ СОЖАЛЕНИЙ ДЛЯ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ С НЕДОСТАЮЩИМИ ДАННЫМИ

Займемся оптимальным управлением спаренной системы с отсутствующим начальным условием для идентификации неизвестной пары источников. Недавно была опубликована статья [18], посвященная исследованию оптимального управления спаренной системой с недостающими данными. В данной ситуации мы не можем использовать классический подход к оптимальному управлению, поэтому, как уже упоминалось ранее, метод управления без сожалений полезен для приведения задачи к классическому случаю.

В общем случае задача (2) не имеет смысла, поэтому мы попытаемся решить следующую задачу:

$$\inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} \sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} (J(v_1, v_2, g_1, g_2)).$$

Здесь $J(v_1, v_2, g_1, g_2)$ не ограничено сверху. Еще одна идея, предложенная в [7], заключается в том, чтобы искать только такие управления, для которых $(v_1, v_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$,

$$J(v_1, v_2, g_1, g_2) \leq J(0, 0, g_1, g_2) \quad \forall (g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A). \quad (4)$$

Это обеспечивает существование $\sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} (J(v_1, v_2, g_1, g_2))$. В общем случае мы можем решить следующую задачу:

$$\inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} \sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} (J(v_1, v_2, g_1, g_2) - J(0, 0, g_1, g_2)). \quad (5)$$

Определение 1. Назовем (u_1, u_2) парой управлений без сожалений для задачи (1) и (3) тогда и только тогда, когда она является решением задачи (5).

Лемма. Для любых $(u_1, u_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))$ и $(g_1, g_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ задача (6) эквивалентна задаче

$$\inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} \left(J(v_1, v_2, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + 2 \sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} \left(\int_0^A \int \xi(0, x, a) g_1 dx da + \int_0^A \int \varsigma(0, x, a) g_2(a, x) dx da \right) \right),$$

где $(\xi, \varsigma) = (\xi(t, x, a), \varsigma(t, x, a))$ — решение следующих обратных спаренных уравнений:

$$\begin{aligned} -D\xi - \operatorname{div}(r(x)\nabla\xi) - a(x) - b(x)\varsigma &= y(t, v_1, 0) - y(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ -D\varsigma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\varsigma) - \tilde{b}(x)\xi - \tilde{b}(x)\varsigma &= z(t, v_2, 0) - z(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ \xi(x, t, a) &= 0, \quad \varsigma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ \xi(x, t, A) &= 0, \quad \varsigma(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ \xi(x, t, a) &= \varsigma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Ввиду линейности (y, z) можно записать

$$\begin{aligned} y(t, v_1, g_1) &= y(t, 0, g_1) + y(t, v_1, 0) - y(t, 0, 0), \\ z(t, v_2, g_2) &= z(t, 0, g_2) + z(t, v_2, 0) - z(t, 0, 0), \end{aligned}$$

где $(y(t, 0, g_1), z(t, 0, g_2))$, $(y(t, v_1, 0), z(t, v_2, 0))$ и $(y(t, 0, 0), z(t, 0, 0))$ — решения следующих систем соответственно:

$$\begin{aligned} Dy(t, 0, g_1) &= \operatorname{div}(r(x)\nabla y(t, 0, y_0)) + a(x)y(t, 0, y_0) + b(x)y(t, 0, y_0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz(t, 0, g_2) &= \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z(t, 0, z_0)) + a(x)z(t, 0, z_0) + b(x)z(t, 0, z_0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ y(x, 0, a) &= g_1(x, a), \quad z(x, 0, a) = g_2(x, a), \quad (x, a) \in Q_A; \\ y(x, t, 0) &= y(x, t), \quad z(x, t, 0) = z(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y(x, t, a) &= z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dy(t, v_1, 0) &= \operatorname{div}(r(x)\nabla y(t, v_1, 0)) + a(x)y(t, v_1, 0) + b(x)z(t, v_1, 0) + v_1, \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz(t, v_2, 0) &= \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z(t, v_2, 0)) + \tilde{a}(x)y(t, v_1, 0) + \tilde{b}(x)z(t, v_2, 0) + v_2, \quad (x, t, a) \in Q; \\ y(x, 0, a) &= 0, \quad z(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ y(x, t, 0) &= y(x, t), \quad z(x, t, 0) = z(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y(x, t, a) &= z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Dy(t, 0, 0) &= \operatorname{div}(k(x)\nabla y(t, 0, 0)) + \mu(x)y(t, 0, 0) + \alpha(x)z(t, 0, 0), \quad (t, a, x) \in Q; \\ Dz(t, 0, 0) &= \operatorname{div}(\tilde{k}(x)\nabla z(t, 0, 0)) + \tilde{\mu}(x)y(t, 0, 0) + \tilde{\alpha}(x)z(t, 0, 0), \quad (t, a, x) \in Q; \\ y(x, 0, a) &= 0, \quad z(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ y(x, t, 0) &= y(x, t), \quad z(x, t, 0) = z(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y(x, t, a) &= z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Простыми вычислениями получаем

$$J(v_1, v_2, g_1, g_2) - J(0, 0, g_1, g_2) = J(v_1, v_2, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + 2(y(t, v_1, 0) - y(t, 0, 0), y(t, 0, g_1) - y(t, 0, 0))_{L^2(Q_A)} + 2(z(t, v_2, 0) - z(t, 0, 0), z(t, 0, g_2) - z(t, 0, 0))_{L^2(Q_A)}.$$

Используя присоединенное спаренное состояние (ξ, ς) решения (6), интегрирование по частям и формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_Q (-D\xi - \operatorname{div}(r(x)\nabla\xi) - a(x)\xi - b(x)\varsigma) (y(t, 0, g_1) - y(t, 0, 0)) dx da dt = \\ &= \int_0^A \int_\Omega \xi(x, 0, a) g_1(x, a) dx da - \int_Q (y(t, v_1, 0) - y(t, 0, 0)) (y(t, 0, g_1) - y(t, 0, 0)) dx da \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (-D\xi - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\xi) - \tilde{a}(x)\xi - \tilde{b}(x)\varsigma) (z(t, 0, g_2) - z(t, 0, 0)) dx da dt = \\ &= \int_0^A \int_\Omega \varsigma(x, 0, a) g_2(x, a) dx da - \int_Q (z(t, v_2, 0) - z(t, 0, 0)) (z(t, 0, g_2) - z(t, 0, 0)) dx da. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2, g_1, g_2) - J(0, 0, g_1, g_2) &= J(v_1, v_2, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + \\ &+ 2 \int_0^A \int_\Omega \xi(x, 0, a) g_1(x, a) dx da + 2 \int_0^A \int_\Omega \varsigma(x, 0, a) g_2(x, a) dx da. \end{aligned}$$

□

Управление без сожалений существует только в том случае, если $g_1(x, a)$ и $g_2(x, a)$ являются элементами соответствующих ядер $(\xi(x, 0, a), \varsigma(x, 0, a))$ в $L^2(Q_A)$. Поскольку сложно проверить это предположение, мы ослабляем нашу задачу, вводя квадратичное возмущение в неравенство (4):

$$J(v_1, v_2, g_1, g_2) \leq J(0, 0, g_1, g_2) + \gamma \left(\|g_1(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|g_2(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right),$$

где $\gamma > 0$, $\forall (g_1, g_2) \in (L^2(Q_A))^2$. Тогда предыдущая задача на $\inf \sup$ переходит в следующую:

$$\inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} \left(\begin{aligned} &J(v_1, v_2, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + \\ &2 \sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} \left(\int_0^A \int_\Omega \xi(x, 0, a) g_1(x, a) dx da + \int_0^A \int_\Omega \varsigma(x, 0, a) g_2(x, a) dx da - \right. \\ &\left. - \gamma \left(\|g_1(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|g_2(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right) \right) \end{aligned} \right).$$

Используя преобразование Лежандра [19], получаем

$$\sup_{(g_1, g_2) \in L^2(Q_A) \times L^2(Q_A)} \left(\int_0^A \int_{\Omega} \xi(x, 0, a) g_1(x, a) dx da + \int_0^A \int_{\Omega} \varsigma(x, 0, a) g_2(x, a) dx da - \right. \\ \left. - \gamma \left(\|g_1(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|g_2(x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right) \right) = \frac{1}{2\gamma} \left(\|\xi(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|\varsigma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right).$$

Подставляя этот результат в последнюю задачу на $\inf \sup$, получаем

$$\inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} J_{\gamma}(v_1, v_2),$$

где

$$J_{\gamma}(v_1, v_2) = J(v_1, v_2, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + \frac{1}{\gamma} \left(\|\xi(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|\varsigma(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right). \quad (7)$$

Таким образом, предыдущая задача эквивалентна следующей стандартной задаче оптимального управления:

$$\forall \gamma > 0 \text{ найти пару } (u_1^{\gamma}, u_2^{\gamma}) \in (L^2(Q))^2 \text{ такую, что} \\ J_{\gamma}(u_1^{\gamma}, u_2^{\gamma}) = \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q))^2} J_{\gamma}(v_1, v_2). \quad (8)$$

Определение 2. Назовем $(u_1^{\gamma}, u_2^{\gamma}) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))$ парой управлений с малым сожалением для задачи (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи (7).

Теорема 1. Существует уникальная пара управлений с малым сожалением, обозначаемая как $(u_1^{\gamma}, u_2^{\gamma}) \in (L^2(Q))^2$, которая является решением задачи (8) и (7). Более того, когда γ стремится к нулю, пара управлений с малым сожалением слабо сходится к уникальной паре управлений без сожаления.

Доказательство. Из определения J_{γ} получаем

$$J_{\gamma}(v_1, v_2) \geq -J(0, 0, 0, 0) = \text{const},$$

значит, существует $d_{\gamma} = \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} J_{\gamma}(v_1, v_2)$. Пусть (v_{n1}, v_{n2}) — минимизирующая спаренная последовательность, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\gamma}(y, z, v_{n1}, v_{n2}) = \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q))} J_{\gamma}(v_1, v_2) = d_{\gamma},$$

тогда снова имеем

$$-J(0, 0, 0, 0) \leq J_{\gamma}(v_{n1}, v_{n2}) = J(v_{n1}, v_{n2}, 0, 0) - J(0, 0, 0, 0) + \\ + \frac{1}{\gamma} \left(\|\xi_n(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|\varsigma_n(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right) \leq d_{\gamma} + 1 = C_{\gamma},$$

откуда можно вывести оценки

$$\|v_{n1}\|_{L^2(Q)} \leq C_{\gamma}, \quad \|v_{n2}\|_{L^2(Q)} \leq C_{\gamma}, \\ \|\xi_n(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq C_{\gamma} \sqrt{\gamma}, \quad \|\varsigma_n(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq C_{\gamma} \sqrt{\gamma}, \quad (9)$$

где C_{γ} — константа, не зависящая от n . В условиях (9) мы можем выделить подпоследовательность (v_{n1}, v_{n2}) такую, что при n , стремящемся к ∞ , имеем $(v_{n1}, v_{n2}) \rightharpoonup (u_1^{\gamma}, u_2^{\gamma})$ слабо

в $L^2(Q)$. Во-первых, мы знаем, что $(y_n, z_n) = (y(t, v_{n1}, 0), z(t, v_{n2}, 0))$ являются решениями следующих спаренных систем:

$$\begin{aligned} Dy_n - \operatorname{div}(r(x)\nabla y_n) - a(x)y_n - b(x)z_n &= v_{n1}, \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz_n - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z_n) - \tilde{a}(x)y_n - \tilde{b}(x)z_n &= v_{n2}, \quad (x, t, a) \in Q; \\ y_n(x, 0, a) &= 0, \quad z_n(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ y_n(x, t, 0) &= y_n(x, t), \quad z_n(x, t, 0) = z_n(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y_n(x, t, a) &= z_n(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Начиная с умножения первого уравнения в (10) на y_n и интегрирования по Ω , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |y_n|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{da} \int_{\Omega} |y_n|^2 dx + \int_{\Omega} r(x) |\nabla y_n|^2 dx &= \\ = \int_{\Omega} v_{n1} y_n dx + \int_{\Omega} a(x) |y_n|^2 dx + \int_{\Omega} b(x) z_n y_n dx. \end{aligned}$$

Аналогично поступим со вторым уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{da} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{k}(x) |\nabla z_n|^2 dx &= \\ = \int_{\Omega} v_{n2} z_n dx + \int_{\Omega} \tilde{a}(x) |z_n|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{b}(x) y_n z_n dx. \end{aligned}$$

Складывая два последних равенства, интегрируя по $(0, t) \times (0, a)$, применяя затем неравенство Коши–Шварца и неравенство Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{\Omega} (|y_n|^2 + |z_n|^2) dx d\alpha + \int_0^t \int_{\Omega} (|y_n|^2 + |z_n|^2) dx ds &\leq \iiint_Q (|v_{n1}|^2 + |v_{n2}|^2) dx d\alpha ds + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (|y_n(x, t)|^2 + |z_n(x, t)|^2) dx ds + c_1 \iiint_Q (|y_n|^2 + |z_n|^2) dx d\alpha ds, \end{aligned}$$

где

$$c_1 = |b_1 + \tilde{a}_1 + \beta - 1|, \quad \beta = 2 \max(a_1, \tilde{b}_1).$$

Далее, используя лемму Гронуолла, имеем

$$\|y_n\|_{L^\infty(0, t, L^2(Q_A))} \leq C_\gamma, \quad \|z_n\|_{L^\infty(0, A, L^2(Q_A))} \leq C_\gamma.$$

Используя условия (9) и интегрируя по Q , мы выводим, что

$$\begin{aligned} \|Dy_n - \operatorname{div}(k(x)\nabla y_n) - \mu(x)y_n - \alpha(x)z_n\|_{L^2(Q)} &\leq C_\gamma, \\ \|Dz_n - \operatorname{div}(\tilde{k}(x)\nabla z_n) - \tilde{\mu}(x)y_n - \tilde{\alpha}(x)z_n\|_{L^2(Q)} &\leq C_\gamma, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} y_n &\rightharpoonup y^\gamma \text{ слабо в } L^\infty(Q), \quad z_n \rightharpoonup z^\gamma \text{ слабо в } L^\infty(Q), \\ Dy_n - \operatorname{div}(k(x)\nabla y_n) - \mu(x)y_n - \alpha(x)z_n &\rightharpoonup h_1 \text{ слабо в } L^2(Q), \\ Dz_n - \operatorname{div}(\tilde{k}(x)\nabla z_n) - \tilde{\mu}(x)y_n - \tilde{\alpha}(x)z_n &\rightharpoonup h_2 \text{ слабо в } L^2(Q), \end{aligned}$$

а ввиду непрерывности вложения $L^\infty(Q)$ в $L^2(Q)$ имеем

$$y_n \rightharpoonup y^\gamma \text{ слабо в } L^2(Q) \text{ и } z_n \rightharpoonup z^\gamma \text{ слабо в } L^2(Q). \quad (11)$$

Также имеем

$$\begin{aligned} Dy_n - \operatorname{div}(r(x)\nabla y_n) - a(x)y_n - b(x)z_n &\rightharpoonup Dy^\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla y^\gamma) - a(x)y^\gamma - b(x)z^\gamma \text{ в } D'(Q), \\ Dz_n - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z_n) - \tilde{a}(x)y_n - \tilde{b}(x)z_n &\rightharpoonup Dz^\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z^\gamma) - \tilde{a}(x)y^\gamma - \tilde{b}(x)z^\gamma \text{ в } D'(Q), \end{aligned}$$

где $D'(Q)$ — пространство, двойственное к $D(Q) = C_0^\infty(Q)$.

В силу единственности предела получаем

$$\begin{aligned} Dy^\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla y^\gamma) - a(x)y^\gamma - b(x)z^\gamma &= u_1^\gamma \text{ в } Q, \\ Dz^\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z^\gamma) - \tilde{a}(x)y^\gamma - \tilde{b}(x)z^\gamma &= u_2^\gamma \text{ в } Q. \end{aligned}$$

Также из (11) и начальных условий в (10) выводим, что

$$\begin{aligned} y^\gamma(x, 0, a) &= 0, \quad z^\gamma(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A, \\ y^\gamma(x, t, 0) &= y^\gamma(x, t), \quad z^\gamma(x, t, 0) = z^\gamma(x, t), \quad (x, t) \in Q_t. \end{aligned}$$

Умножив теперь два равенства из (10) на $(\phi, \varphi) \in D(Q) \times D(Q)$, где

$$\begin{aligned} \phi(x, t, a) &= 0, \quad \varphi(x, t, a) = 0, \quad \phi(x, t, A) = 0, \\ \varphi(x, t, A) &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \phi(x, t, a) = \varphi(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

и проинтегрировав по Q , получим

$$y^\gamma = z^\gamma = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Во-вторых, имеем $(\xi_n, \varsigma_n) = (\xi(v_{n1}^\gamma), \varsigma(v_{n2}^\gamma))$ — решение следующей спаренной присоединенной системы:

$$\begin{aligned} -D\xi_n - \operatorname{div}(r(x)\nabla \xi_n) - a(x)\xi_n - b(x)\varsigma_n &= y(t, v_{n1}, 0) - y(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ -D\varsigma_n - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla \varsigma_n) - \tilde{a}(x)\xi_n - \tilde{b}(x)\varsigma_n &= z(t, v_{n2}, 0) - z(t, 0, 0), \quad (t, a, x) \in Q; \\ \xi_n(x, t, a) &= 0, \quad \varsigma_n(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ \xi_n(x, t, A) &= 0, \quad \varsigma_n(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ \xi_n(x, t, a) &= \varsigma_n(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Нам нужно показать сходимость пары (ξ_n, ς_n) к $(\xi^\gamma, \varsigma^\gamma)$. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему спаренному состоянию, получаем

$$\|\xi_n\|_{L^\infty(0,t,H^1(Q_A))} \leq C_\gamma, \quad \|\varsigma_n\|_{L^\infty(0,t,H^1(Q_A))} \leq C_\gamma,$$

откуда выводим

$$\xi_n \rightharpoonup \xi^\gamma \text{ слабо в } L^2(Q), \quad \varsigma_n \rightharpoonup \varsigma^\gamma \text{ слабо в } L^2(Q)$$

и

$$\begin{aligned} D\xi^\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla \xi^\gamma) - a(x)\xi^\gamma - b(x)\varsigma^\gamma &= y(t, v_1^\gamma, 0) - y(t, 0, 0) \text{ в } Q, \\ D\varsigma^\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla \varsigma^\gamma) - \tilde{a}(x)\xi^\gamma - \tilde{b}(x)\varsigma^\gamma &= z(t, u_2^\gamma, 0) - z(t, 0, 0) \text{ в } Q, \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi^\gamma(x, 0, a) &= 0, \quad \varsigma^\gamma(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A, \\ \xi^\gamma(x, t, 0) &= \xi(x, t), \quad \varsigma^\gamma(x, t, 0) = \varsigma^\gamma(x, t), \quad (x, t) \in Q_t, \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$\xi^\gamma = \varsigma^\gamma = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Более того, функция потерь J_γ является полунепрерывной снизу:

$$J_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{(v_{n1}, v_{n2}) \in (L^2(Q))^2} J_\gamma(v_{n1}, v_{n2}) = \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q))^2} J_\gamma(v_1, v_2) = d_\gamma,$$

отсюда

$$J_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma) = \inf_{(v_1, v_2) \in (L^2(Q))^2} J_\gamma(v_1, v_2).$$

Из строгой выпуклости J_γ следует, что (u_1^γ, u_2^γ) — единственная точка минимума для J_γ . $\square$

2.1. Полная характеристика спаренного управления с малым сожалением. На этом этапе мы рассмотрим, как использование критерия оптимальности Эйлера первого порядка может быть использовано для характеристики управления с малым сожалением.

Здесь важным свойством является условие оптимальности первого порядка для J_γ :

$$J'_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma)(v_1 - u_1^\gamma, v_2 - u_2^\gamma) = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q).$$

Это эквивалентно

$$\begin{aligned} J'_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma)(v_1 - u_1^\gamma, v_2 - u_2^\gamma) &= (y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs}, y(t, v_1 - u_1^\gamma, 0))_{L^2(Q)} + \\ &+ (z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs}, z(t, v_2 - u_2^\gamma, 0))_{L^2(Q)} + N \left((u_1^\gamma, v_1 - u_1^\gamma)_{L^2(Q)} + (u_2^\gamma, v_2 - u_2^\gamma)_{L^2(Q)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \left((\xi(x, 0, a)(u_1^\gamma), \xi(x, 0, a)(v_1 - u_1^\gamma))_{L^2(Q_A)} + (\varsigma(x, 0, a)(u_2^\gamma), \varsigma(x, 0, a)(v_2 - u_2^\gamma))_{L^2(Q_A)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим новое спаренное состояние $(\rho_\gamma, \mu_\gamma) = (\rho(u_1^\gamma, 0)(x, t, a), \mu_\gamma(u_2^\gamma, 0)(x, t, a))$, задаваемое условиями

$$\begin{aligned} D\rho_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho_\gamma) - a(x)\rho_\gamma - b(x)\mu_\gamma &= 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\ D\mu_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu_\gamma) - \tilde{a}(x)\rho_\gamma - \tilde{b}(x)\mu_\gamma &= 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\ \rho_\gamma(x, 0, a) &= \frac{1}{\gamma}\xi(x, 0, a)(u_1^\gamma), \quad \mu_\gamma(x, 0, a) = \frac{1}{\gamma}\varsigma(x, 0, a)(u_2^\gamma), \quad (x, a) \in Q_A; \\ \rho_\gamma(x, t, 0) &= 0, \quad \mu_\gamma(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ \rho_\gamma(x, t, a) &= \mu_\gamma(x, t, a) = 0 \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned}$$

Умножая два первых равенства на $\xi(v_1 - u_1^\gamma)$ и $\varsigma(v_2 - u_2^\gamma)$ соответственно, применяя вторую формулу Грина и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (D\rho_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho_\gamma) - a(x)\rho_\gamma - b(x)\mu_\gamma)\xi(v_1 - u_1^\gamma)dx dadt = \\ &= \int_Q \rho_\gamma(t) y(t, v_1 - u_1^\gamma, 0)dx dadt - \frac{1}{\gamma} \iint_{Q_A} \xi(x, 0, a)(u_1^\gamma) \xi(x, 0, a)(v_1 - u_1^\gamma)dx da \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (D\mu_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu_\gamma) - \tilde{a}(x)\rho_\gamma - \tilde{b}(x)\mu_\gamma)\varsigma(v_2 - u_2^\gamma)dx dadt = \\ &= \int_Q \mu_\gamma(t) z(t, v_2 - u_2^\gamma, 0)dx dadt - \frac{1}{\gamma} \iint_{Q_A} \varsigma(x, 0, a)(u_2^\gamma) \varsigma(x, 0, a)(v_2 - u_2^\gamma)dx da. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J'_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma)(v_1 - u_1^\gamma, v_2 - u_2^\gamma) &= (y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs} + \rho_\gamma(t), y(t, v_1 - u_1^\gamma, 0))_{L^2(Q)} + \\ &+ (z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs} + \varsigma_\gamma(t), z(t, v_2 - u_2^\gamma, 0))_{L^2(Q)} + \\ &+ N \left((u_1^\gamma, v_1 - u_1^\gamma)_{L^2(Q)} + (u_2^\gamma, v_2 - u_2^\gamma)_{L^2(Q)} \right)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Повторно вводим спаренные присоединенные состояния $(p_\gamma, q_\gamma) = (p(u_1^\gamma), q(u_2^\gamma))$:

$$\begin{aligned} -Dp_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla p_\gamma) - a(x)p_\gamma - b(x)q_\gamma &= y(t, u_1^\gamma, 0) - y_d + \rho_\gamma(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\ -Dq_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q_\gamma) - \tilde{a}(x)p_\gamma - \tilde{b}(x)q_\gamma &= z(t, u_2^\gamma, 0) - z_d + \varsigma_\gamma(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\ p_\gamma(x, t, a) &= 0, \quad q_\gamma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ p_\gamma(x, t, A) &= 0, \quad q_\gamma(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ p_\gamma(x, t, a) &= q_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Снова легко получить, что

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_Q (-Dp_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla p_\gamma) - a(x)p_\gamma - b(x)q_\gamma) y(t, v_1 - u_1^\gamma, 0) dx da dt = \\ &= \iiint_Q p_\gamma(v_1 - u_1^\gamma) dx da dt - \int_Q (y(t, u_1^\gamma, 0) - y_d + \rho_\gamma(t)) y(t, v_1 - u_1^\gamma, 0) dx da dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_Q (-Dq_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q_\gamma) - \tilde{a}(x)p_\gamma - \tilde{b}(x)q_\gamma) z(t, v_2 - u_2^\gamma, 0) dx da dt = \\ &= \iiint_Q q_\gamma(v_2 - u_2^\gamma) dx da dt - \int_Q (z(t, u_2^\gamma, 0) - z_d + \varsigma_\gamma(t)) z(t, v_2 - u_2^\gamma, 0) dx da dt, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} J'_\gamma(u_1^\gamma, u_2^\gamma)(v_1 - u_1^\gamma, v_2 - u_2^\gamma) &= (p_\gamma + Nu_1^\gamma, v_1 - u_1^\gamma)_{L^2(Q)} + (q_\gamma + Nu_2^\gamma, v_2 - u_2^\gamma)_{L^2(Q)} = 0 \\ &\forall (v_1, v_2) \in L^2(Q) \times L^2(Q). \end{aligned}$$

Наконец, спаренная система оптимальности, характеризующая спаренное управление с малым сожалением, такова:

$$\begin{aligned} Dy_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla y_\gamma) - a(x)y_\gamma - b(x)z_\gamma &= u_1^\gamma, \quad (x, t, a) \in Q; \\ Dz_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z_\gamma) - \tilde{a}(x)y_\gamma - \tilde{b}(x)z_\gamma &= u_2^\gamma, \quad (x, t, a) \in Q; \\ y_\gamma(x, 0, a) &= 0, \quad z_\gamma(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ y_\gamma(x, t, 0) &= y_\gamma(x, t), \quad z_\gamma(x, t, 0) = z_\gamma(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ y_\gamma(x, t, a) &= z_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -D\xi_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla \xi_\gamma) - a(x)\xi_\gamma - b(x)\varsigma_\gamma &= y(t, u_1^\gamma, 0) - y(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ -D\varsigma_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla \varsigma_\gamma) - \tilde{a}(x)\xi_\gamma - \tilde{b}(x)\varsigma_\gamma &= z(t, u_2^\gamma, 0) - z(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\ \xi_\gamma(x, t, a) &= 0, \quad \varsigma_\gamma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ \xi_\gamma(x, t, A) &= 0, \quad \varsigma_\gamma(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ \xi_\gamma(x, t, a) &= \varsigma_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\rho_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla \rho_\gamma) - a(x)\rho_\gamma - b(x)\mu_\gamma &= 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\ D\mu_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla \mu_\gamma) - \tilde{a}(x)\rho_\gamma - \tilde{b}(x)\mu_\gamma &= 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\ \rho_\gamma(x, 0, a) &= \frac{1}{\gamma} \xi(x, 0, a)(u_1^\gamma), \quad \mu_\gamma(x, 0, a) = \frac{1}{\gamma} \varsigma(x, 0, a)(u_2^\gamma), \quad (x, a) \in Q_A; \\ \rho_\gamma(x, t, 0) &= 0, \quad \mu_\gamma(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ \rho_\gamma(x, t, a) &= \mu_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Dp_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla p_\gamma) - a(x)p_\gamma - b(x)q_\gamma = y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs} + \rho_\gamma 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& -Dq_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q_\gamma) - \tilde{a}(x)p_\gamma - \tilde{b}(x)q_\gamma = z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs} + \varsigma_\gamma(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\
& p_\gamma(x, t, a) = 0(t), \quad q_\gamma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\
& p_\gamma(x, t, A) = 0, \quad q_\gamma(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\
& p_\gamma(x, t, a) = q_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma,
\end{aligned}$$

при этом

$$(p_\gamma + Nu_1^\gamma, v_1 - u_1^\gamma)_{L^2(Q)} + (q_\gamma + Nu_2^\gamma, v_2 - u_2^\gamma)_{L^2(Q)} = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q)).$$

2.2. Полная характеристика спаренного управления без сожалений. Теперь покажем, что последовательность спаренных управлений с малым сожалением сходится к уникальному спаренному управлению без сожалений. Исходя из этого предположения, мы можем построить систему оптимальности спаренного управления без сожалений.

Теорема 2. *Последовательность спаренных управлений с малым сожалением (u_1^γ, u_2^γ) сходится к уникальному спаренному управлению без сожалений (u_1, u_2) , которое характеризуется следующей спаренной системой оптимальности:*

$$\begin{aligned}
& Dy - \operatorname{div}(r(x)\nabla y) - a(x)y - b(x)z = u_1, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& Dz - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla z) - \tilde{a}(x)y - \tilde{b}(x)z = u_2, \quad (t, a, x) \in Q; \\
& y(x, 0, t) = 0, \quad z(x, 0, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_A; \\
& y(x, t, 0) = y(x, t), \quad z(x, t, 0) = z(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\
& y(x, t, a) = z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D\xi - \operatorname{div}(r(x)\nabla \xi) - a(x)\xi - b(x)\varsigma = y(t, u_1, 0) - y(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\
& -D\varsigma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla \varsigma) - \tilde{a}(x)\xi - \tilde{b}(x)\varsigma = z(t, u_2, 0) - z(t, 0, 0), \quad (x, t, a) \in Q; \\
& \xi(x, t, a) = 0, \quad \varsigma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\
& \xi(x, t, A) = 0, \quad \varsigma(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\
& \xi(x, t, a) = \varsigma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D\rho - \operatorname{div}(r(x)\nabla \rho) - a(x)\rho - b(x)\mu = 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& D\mu - \operatorname{div}(\tilde{k}(x)\nabla \mu) - \tilde{a}(x)\rho - \tilde{b}(x)\mu = 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& \rho(x, 0, a) = \lambda, \quad \mu(x, 0, a) = \delta, \quad (x, a) \in Q_A; \\
& \rho(x, t, 0) = 0, \quad \mu(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\
& \rho(x, t, a) = \mu(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Dp - \operatorname{div}(r(x)\nabla p) - a(x)p - b(x)q = y(t, u_1, 0) - y_{obs} + \rho(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\
& -Dq - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q) - \tilde{a}(x)p - \tilde{b}(x)q = z(t, u_2) - z_{obs} + \mu(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\
& p(x, t, a) = 0, \quad q(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\
& p(x, t, A) = 0, \quad q(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\
& p(x, t, a) = q(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma,
\end{aligned}$$

при этом

$$(p + Nu_1, v_1 - u_1)_{L^2(Q)} + (q + Nu_2, v_2 - u_2)_{L^2(Q)} = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q)).$$

Здесь (u_1, u_2) — наилучшее приближение неизвестной пары источников, т. е. $(u_1, u_2) \simeq (f_1, f_2)$.

Доказательство. Предполагая, что (u_1^γ, u_2^γ) является минимумом J_γ , имеем

$$J_\gamma(y, z, u_1^\gamma, u_2^\gamma) \leq J_\gamma(y, z, 0, 0) = 0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \|y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs}\|_{L^2(Q)}^2 + \|z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs}\|_{L^2(Q)}^2 + N \left(\|u_1^\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_2^\gamma\|_{L^2(Q)}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{\gamma} \left(\|\xi_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|\varsigma_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \right) \leq J(y, z, 0, 0, 0, 0) = \text{const}, \end{aligned}$$

отсюда получаем оценки

$$\begin{aligned} & \|u_1^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|u_2^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ & \|y(t, u_1^\gamma, 0)\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|z(t, u_2^\gamma, 0)\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ & \|\xi_\gamma(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq C\sqrt{\gamma}, \quad \|\varsigma_\gamma(0, x, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq C\sqrt{\gamma}, \end{aligned}$$

где C — константа, не зависящая от γ . Имеем

$$\begin{aligned} & Dy_\gamma - \text{div}(r(x)\nabla y_\gamma) - a(x)y_\gamma - b(x)z_\gamma = u_1^\gamma, \quad (x, t, a) \in Q; \\ & Dz_\gamma - \text{div}(\tilde{r}(x)\nabla z_\gamma) - \tilde{a}(x)y_\gamma - \tilde{b}(x)z_\gamma = u_2^\gamma, \quad (x, t, a) \in Q; \\ & y_\gamma(x, 0, a) = 0, \quad z_\gamma(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ & y_\gamma(x, t, 0) = y_\gamma(x, t), \quad z_\gamma(x, t, 0) = z_\gamma(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ & y_\gamma(x, t, a) = z_\gamma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Умножая предыдущую спаренную систему на спаренное состояние (y_γ, z_γ) , интегрируя по Q и применяя неравенство Коши–Шварца, получаем

$$\begin{aligned} & \|y_\gamma\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|z_\gamma\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|y_\gamma\|_{L^2(Q_t)}^2 + \|z_\gamma\|_{L^2(Q_t)}^2 \leq \|u_1^\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_2^\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + \|y_\gamma\|_{L^2(Q_t)}^2 + \\ & + \|z_\gamma\|_{L^2(Q_t)}^2 + c_1 \left(\|y_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + c_2 \|z_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 \right), \end{aligned}$$

тогда по лемме Гронуолла

$$\|y_\gamma\|_{L^\infty(0,t,H^1(Q_A))} \leq C, \quad \|z_\gamma\|_{L^\infty(0,t,H^1(Q_A))} \leq C.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \|Dy_\gamma - \text{div}(k(x)\nabla y_\gamma) - \mu(x)y_\gamma - \alpha(x)z_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ & \|Dz_\gamma - \text{div}(\tilde{k}(x)\nabla z_\gamma) - \tilde{\mu}(x)y_\gamma - \tilde{\alpha}(x)z_\gamma\|_{L(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Из этой оценки, действуя аналогично доказательству теоремы 1, можно получить следующие слабые сходимости:

$$\begin{aligned} & u_1^\gamma \rightharpoonup u_1 \text{ в } L^2(Q), \quad u_2^\gamma \rightharpoonup u_2 \text{ в } L^2(Q), \\ & y_\gamma \rightharpoonup y \text{ в } L^2(Q), \quad z_\gamma \rightharpoonup z \text{ в } L^2(Q) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & Dy_\gamma - \text{div}(r(x)\nabla y_\gamma) - a(x)y_\gamma - b(x)z_\gamma \rightharpoonup Dy - \text{div}(r(x)\nabla y) - a(x)y - b(x)z \text{ в } Q; \\ & Dz_\gamma - \text{div}(\tilde{r}(x)\nabla z_\gamma) - \tilde{a}(x)y_\gamma - \tilde{b}(x)z_\gamma \rightharpoonup Dz - \text{div}(\tilde{r}(x)\nabla z) - \tilde{a}(x)y - \tilde{b}(x)z \text{ в } Q; \\ & y(x, 0, a) = 0, \quad z(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A; \\ & y(x, t, 0) = y(x, t), \quad z(x, t, 0) = z(x, t), \quad (x, t) \in Q_t; \\ & y(x, t, a) = z(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Итак, имеем оценки

$$\begin{aligned} & \|\xi_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|\varsigma_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ & \|-D\xi_\gamma - \text{div}(k(x)\nabla \xi_\gamma) - \mu(x)\xi_\gamma - \alpha(x)\varsigma_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ & \|-D\varsigma_\gamma - \text{div}(\tilde{k}(x)\nabla \varsigma_\gamma) - \tilde{\mu}(x)\xi_\gamma - \tilde{\alpha}(x)\varsigma_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \end{aligned}$$

откуда выводим

$$\begin{aligned}
& \xi_\gamma \rightharpoonup \xi \text{ слабо в } L^2(Q), \quad \varsigma_\gamma \rightharpoonup \varsigma \text{ слабо в } L^2(Q), \\
& -D\xi_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\xi_\gamma) - a(x)\xi_\gamma - b(x)\varsigma_\gamma \rightharpoonup -D\xi - \operatorname{div}(r(x)\nabla\xi) - a(x)\xi - b(x)\varsigma \text{ в } Q, \\
& -D\varsigma_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\varsigma_\gamma) - \tilde{a}(x)\xi_\gamma - \tilde{b}(x)\varsigma_\gamma \rightharpoonup -D\varsigma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\varsigma) - a(x)\xi - b(x)\varsigma \text{ в } Q, \\
& \xi(x, t, a) = 0, \quad \varsigma(x, t, a) = 0, \quad (x, a) \in Q_A, \\
& \xi(x, t, 0) = 0, \quad \varsigma(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in Q_t, \\
& \xi(x, t, a) = \varsigma(x, t, a) = 0 \text{ на } \Sigma, \\
& \xi_\gamma(x, 0, a) \rightharpoonup 0 \text{ сильно в } L^2(Q_A), \quad \varsigma_\gamma(x, 0, a) \rightharpoonup 0 \text{ сильно в } L^2(Q_A).
\end{aligned}$$

Это означает, что пара (u_1, u_2) является управлением без сожалений. Оставшаяся часть доказательства разделена на два шага.

Шаг первый. Справедливы следующие важные оценки, полученные аналогично предыдущим состояниям:

$$\begin{aligned}
& \|\rho_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|\mu_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\
& \|D\rho_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho_\gamma) - a(x)\rho_\gamma - b(x)\mu_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\
& \|D\mu_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu_\gamma) - \tilde{a}(x)\rho_\gamma - \tilde{b}(x)\mu_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\
& \frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq \frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \leq C, \\
& \frac{1}{\gamma} \|\varsigma_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)} \leq \frac{1}{\gamma} \|\varsigma_\gamma(x, 0, a)\|_{L^2(Q_A)}^2 \leq C,
\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
& \rho_\gamma \rightharpoonup \rho \text{ слабо в } L^2(Q), \quad \mu_\gamma \rightharpoonup \mu \text{ слабо в } L^2(Q), \\
& D\rho_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho_\gamma) - a(x)\rho_\gamma - b(x)\mu_\gamma \rightharpoonup D\rho - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho) - a(x)\rho - b(x)\mu \text{ в } Q, \\
& D\mu_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu_\gamma) - \tilde{a}(x)\rho_\gamma - \tilde{b}(x)\mu_\gamma \rightharpoonup D\mu - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu) - \tilde{a}(x)\rho - \tilde{b}(x)\mu \text{ в } Q, \\
& \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma(x, 0, a) \rightharpoonup \lambda \text{ слабо в } Q_A, \quad \frac{1}{\gamma} \varsigma_\gamma(x, 0, a) \rightharpoonup \delta \text{ слабо в } Q_A.
\end{aligned}$$

Получаем следующую спаренную систему с управлением (ρ, μ) :

$$\begin{aligned}
& D\rho - \operatorname{div}(r(x)\nabla\rho) - a(x)\rho - b(x)\mu = 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& D\mu - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla\mu) - \tilde{a}(x)\rho - \tilde{b}(x)\mu = 0, \quad (x, t, a) \in Q; \\
& \rho(x, 0, a) = \lambda, \quad \mu(x, 0, a) = \delta, \quad (x, a) \in Q_A; \\
& \rho(x, t, 0) = 0, \quad \mu(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\
& \rho(t, a, x) = \mu(t, a, x) = 0 \text{ на } \Sigma.
\end{aligned}$$

Шаг второй. Мы знаем, что при $(\rho, \mu) \in (L^2(Q))^2$ и $(y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs}, z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs}) \in (L^2(Q))^2$ имеем $(y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs} + \rho_\gamma, z(t, u_2, 0) - z_{obs} + \mu_\gamma) \in (L^2(Q))^2$. Легко получить, что

$$\begin{aligned}
& \|p_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|q_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\
& \|Dp_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla p_\gamma) - a(x)p_\gamma - b(x)q_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C, \\
& \|Dq_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q_\gamma) - \tilde{a}(x)p_\gamma - \tilde{b}(x)q_\gamma\|_{L^2(Q)} \leq C.
\end{aligned}$$

Уже привычным способом можно вывести следующие сходимости:

$$\begin{aligned}
& p_\gamma \rightharpoonup p \text{ слабо в } L^2(Q), \quad q_\gamma \rightharpoonup q \text{ слабо в } L^2(Q), \\
& Dp_\gamma - \operatorname{div}(r(x)\nabla p_\gamma) - a(x)p_\gamma - b(x)q_\gamma \rightharpoonup Dp - \operatorname{div}(r(x)\nabla p) - a(x)p - b(x)q \text{ слабо в } Q, \\
& Dq_\gamma - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q_\gamma) - \tilde{a}(x)p_\gamma - \tilde{b}(x)q_\gamma \rightharpoonup Dq - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q) - \tilde{a}(x)p - \tilde{b}(x)q \text{ слабо в } Q,
\end{aligned}$$

отсюда

$$\|y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs}\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad \|z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs}\|_{L^2(Q)} \leq C,$$

значит,

$$\begin{aligned} y(t, u_1^\gamma, 0) - y_{obs} + \rho_\gamma(t) &\rightharpoonup y - y_{obs} + \rho(t) \text{ слабо в } Q, \\ z(t, u_2^\gamma, 0) - z_{obs} + \varsigma_\gamma(t) &\rightharpoonup z - z_{obs} + \varsigma(t) \text{ слабо в } Q. \end{aligned}$$

Используя те же рассуждения, что и в предыдущих спаренных состояниях, и переходя к пределу, получаем спаренную систему с управлением (p, q) :

$$\begin{aligned} -Dp - \operatorname{div}(r(x)\nabla p) - a(x)p - b(x)q &= y - y_{obs} + \rho(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\ -Dq - \operatorname{div}(\tilde{r}(x)\nabla q) - \tilde{a}(x)p - \tilde{b}(x)q &= z - z_{obs} + \varsigma(t), \quad (x, t, a) \in Q; \\ p(x, t, a) = 0, \quad q(x, t, a) = 0, \quad (x, t) \in Q_A; \\ p(x, t, A) = 0, \quad q(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in Q_t; \\ p(x, t, a) = q(x, t, a) = 0 &\text{ на } \Sigma, \end{aligned}$$

где условие оптимальности задается равенством

$$(p + Nu_1, v_1 - u_1)_{L^2(Q)} + (q + Nu_2, v_2 - u_2)_{L^2(Q)} = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in (L^2(Q) \times L^2(Q)).$$

□

Замечание. В случае, когда мы берем конечное измерение

$$(y(T, v_1, g_1), z(T, v_2, g_2)) = (y_{obs}, z_{obs}),$$

будем предполагать, что начальное условие (g_1, g_2) принадлежит $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, чтобы обеспечить непрерывность пары $(y(t, v_1, g_1), y(t, v_2, g_2))$ и ее принадлежность $L^2(0, T, H^2(\Omega)) \times L^2(0, T, H^2(\Omega))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что мы идентифицировали неизвестный источник в спаренной системе, применяя управление с малым сожалением. Новая идея, используемая нами в этой работе, заключается в преобразовании исследования обратной задачи в задачу оптимального управления с отсутствующими данными для определения источника. Методы управления без сожалений и управления с малым сожалением предоставляют нам приближенную характеристику неизвестного источника. Будущие исследования, связанные с этой статьей, включают численное моделирование системы оптимальности, а также, возможно, применение этой идеи в системах с задержкой времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шапиро А.П., Луппов С.П. *Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии* (Наука, М., 1983).
- [2] Ainseba B., Anita S. *Local exact controllability of the age-dependent population dynamics with diffusion*, Abstract and Appl. Anal. **6** (6), 357–368 (2001).
- [3] Kang H., Ruan S., Yu X. *Age-Structured Population Dynamics with Nonlocal Diffusion*, J. Dynamics and Diff. Equat. **34** (2), 789–823 (2022).
- [4] Gyllenberg M., Osipov A., Pääväranta L. *The inverse problem of linear age-structured population dynamics*, J. Evolution Equat. **2**, 223–239 (2002).
- [5] Andrusyak R.V. *Inverse problem for a physiologically structured population model with variable-effort harvesting*, Open Math. **15** (1), 433–445 (2017).
- [6] Yang L., Yu J.N., Deng Z.C. *An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation.*, Appl. Math. Model. **32** (10), 1984–1995 (2008).
- [7] Lions J.L. *Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Sér. 1, Math. **315** (12), 1253–1257 (1992).
- [8] Nakoulima O., Omrane A., Velin J. *No-regret control for nonlinear distributed systems with incomplete data*, J. Math. Pures et Appl. **81** (11), 1161–1189 (2002).

- [9] Nakoulima O., Omrane A., Velin J. *On the Pareto Control and No-Regret Control for Distributed Systems with Incomplete Data*, SIAM J. Control and Optimization **42** (4), 1167–1184 (2003).
- [10] Baleanu D., Joseph C., Mophou G. *Low-regret control for a fractional wave equation with incomplete data*, Advances Diff. Equat. (1), 1–20 (2016).
- [11] Dinakar V., Balan N.B., Balachandran K. *Identification of Source Terms in a Coupled Age-structured Population Model with Discontinuous Diffusion Coefficients*, AIMS Math. **2** (1), 81–95 (2017).
- [12] Djida J., Soh P.F., Mophou G.M. *Optimal control of diffusion equation with missing data governed by Dirichlet fractional Laplacian*, arXiv: Anal. PDEs (2018).
- [13] Hafdallah A., Ayadi A. *Optimal control of electromagnetic wave displacement with an unknown velocity of propagation*, Int. J. Control **92** (11), 2693–2700 (2018).
- [14] Hafdallah A. *On the optimal control of linear systems depending upon a parameter and with missing data*, Nonlinear Stud. **27** (2), 457–469 (2020).
- [15] Hafdallah A., Ayadi A. *Optimal control of a thermoelastic body with missing initial conditions*, Int. J. Control **93** (7), 1570–1576 (2018).
- [16] Achab F., Iqbal B., Rezzoug I., Oussaeif T., Adel O. *Solvability and Weak Controllability of Fractional Degenerate Singular Problem*, JRC **5** (2) (2024).
- [17] Hafdallah A. *Identification of diffusion coefficient in a semi-linear parabolic equation with incomplete initial condition: a no-regret control method*, J. Control and Decision (2023), doi.org/10.1080/23307706.2023.2284142.
- [18] Laouar C., Ayadi A., Hafdallah A. *Optimal Control of a Partially Known Coupled System of BOD and DO*, Int. J. Anal. and Appl. **19** (6), 984–996 (2021).
- [19] Touchette H. *Legendre–Fenchel transforms in a nutshell*, 2005. URL: <https://appliedmaths.sun.ac.za/~htouchette/archive/notes/lfth2.pdf>.

Фатма Ачаб

Университет Ларби Бен Мхиди,
г. Оум-Эль Буаги, 04000, Алжир,
e-mail: achab.fatma@univ-oeb.dz

Абделхак Хафдалла

Университет Шахида Шейха Ларби Тбесси,
ул. Константина, г. Тебесса, 12002, Алжир,
e-mail: abdelhak.hafdallah@univ-tebessa.dz

Имад Реззоуг

Университет Ларби Бен Мхиди,
г. Оум-Эль Буаги, 04000, Алжир,
e-mail: imadrezzoug@gmail.com

F. Achab, A. Hafdallah, and I. Rezzoug

Identification of the local changes in age-structured population dynamics with missing initial condition

Abstract. In this paper, we study an inverse problem consisting of determining the unknown local changes of a population densities independent of the missing initial population age distribution from the knowledge of some measurement in the state. The main idea is to transform the study of the inverse problem into an optimal control problem with incomplete data. To solve this kind of problem, we use the method of no-regret control approximated by a sequence of low-regret control. We show the existence and uniqueness of the sequence of low-regret control, which converges weakly to the unique no-regret control. The local changes are characterized by a coupled optimality system.

Keywords: identification problem, age-structured population, incomplete data, no-regret control, coupled optimality system.

Fatma Achab

*University of Larbi Ben Mhidi,
Oum El Bouaghi, 04000 Algeria,*

e-mail: achab.fatma@univ-oeb.dz

Abdelhak Hafdallah

*Echahid Cheikh Larbi Tbessi University,
Constantine str., Tebessa, 12002 Algeria,*

e-mail: abdelhak.hafdallah@univ-tebessa.dz

Imad Rezzoug

*University of Larbi Ben Mhidi,
Oum El Bouaghi, 04000 Algeria,*

e-mail: imadrezzoug@gmail.com