Известия вузов. Математика
2024, № 7, с. 85–105

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А. ШОУ

РЕЗУЛЬТАТЫ О ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ОБЩЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Аннотация. В данной статье изучается разностно-дифференциальный многочлен от трансцендентной целой функции. В теоремах 1, 2 находятся критерии существования бесконечного множества решений такого рода уравнения. В теоремах 3, 4 рассматривается дифференцирование k-го порядка для многочлена от трансцендентной целой функции и его разностный оператор, даются некоторые результаты о единственности при различных условиях с использованием понятия общего значения. Результаты обсуждаются с разных позиций и при различных условиях. Полученные результаты обобщают и улучшают результаты Жана–Лина и Бенерджи–Махумдера. Приведены замечания, указывающие на важность улучшения и обобщения предыдущих результатов.

Ключевые слова: разностный оператор, общее значение, трансцендентная целая функция, единственность.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-85-105

Введение, определения и результаты

На протяжении данной статьи все типы целых и мероморфных функций определены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Стандартные определения и обозначения $T(r,f)$, $m(r,f)$, $N(r,\infty;f)$, $\overline{N}(r,\infty;f)$, $S(r,f)$ и т.д. (см. [1]–[3]) взяты из теории распределения значений Неванлинны. Пусть $S(r,f)$ — любая функция вида $S(r,f)=o(T(r,f))$, где $r(\to\infty)\in\mathbb{R}^+\backslash S\subseteq\mathbb{R}^+$ и мера Лебега множества S конечна.

Определим порядок мероморфной функции $f(z)$

$$\sigma(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Зададим разностный оператор на $f(z)$

$$\Delta_\eta f=f(z+\eta)-f(z),$$

где $\eta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Для полноценного обсуждения предложенной тематики представим следующие стандартные определения из теории распределения значений Неванлинны.

Определение 1 ([3], определение 2.2). *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две непостоянные мероморфные функции и α — конечное комплексное число. Скажем, что f и g имеют общее значение α, включая кратность, если нули $f-\alpha$ и $g-\alpha$ совпадают значениями и кратностями.*

Поступила в редакцию 24.05.2023, после доработки 01.09.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Также скажем, что f и g имеют общее значение α, игнорируя кратность, если нули $f-\alpha$ и $g-\alpha$ совпадают только значениями.

Следующее определение задает характеристические функции, введенные И. Лахири.

Определение 2 ([4], определение 1.3)**.** *Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Обозначим функцию, подсчитывающую нули $f-\alpha$ с кратностями $\le k$, через $N(r,\alpha; f| \le k)$ ($\overline{N}(r,\alpha; f| \le k)$ — соответствующая редуцированная подсчитывающая функция), и функцию, подсчитывающую нули $f-\alpha$ с кратностями $\ge k$, — через $N(r,\alpha; f| \ge k)$ ($\overline{N}(r,\alpha; f| \ge k)$ — соответствующая редуцированная подсчитывающая функция).*

Определение 3 ([5])**.** *Подсчитывающую функцию нулей $f-\alpha$, в которой кратность m считается m раз при $m \le k$ и k раз при $m > k$, обозначим через $N(r,\alpha; f|k)$. Легко можно увидеть, что*

$$N(r,\alpha; f|k) = \overline{N}(r,\alpha; f) + \overline{N}(r,\alpha; f| \ge 2) + \ldots + \overline{N}(r,\alpha; f| \ge k).$$

И. Лахири также ввел понятие взвешенного общего значения, задающегося следующим образом.

Определение 4 ([5])**.** *Множество всех α-точек функции $f(z)$, где α-точка с кратностью m считается m раз при $m \le k$ и $k+1$ раз при $m > k$, обозначим через $E_k(\alpha, f)$. Если $E_k(\alpha, f) = E_k(\alpha, g)$, скажем, что $f(z)$ и $g(z)$ имеют общее значение α с весом k.*

В 2008 г. С.И. Жан и В.С. Лин [6] изучали неоднородные дифференциальные многочлены k-й степени от целой функции и, в контексте вопроса об общих значениях, получили следующие результаты о единственности дифференциального многочлена от целых функций.

Теорема A ([6], теорема 1)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две непостоянные целые функции и n, m, $k \in \mathbb{Z}^+$, где $n > m+2k+4$. Если $[f^n(af^m+b)]^{(k)}$ и $[g^n(ag^m+b)]^{(k)}$ имеют общее значение 1, включая кратность, где a, b — комплексные константы такие, что $|a|+|b| \ne 0$, то*

i) *при $ab \ne 0$ имеем $f(z) \equiv g(z)$;*

ii) *при $ab = 0$ имеем либо $f = tg$, где t — константа, удовлетворяющая условию $t^{n+m} = 1$, либо $f = c_1 e^{cz}$, $g = c_2 e^{-cz}$, где c, c_1, c_2 — три константы, удовлетворяющие условиям $(-1)^k a^2 (c_1 c_2)^{n+m} [(n+m)c]^{2k} = 1$ или $(-1)^k b^2 (c_1 c_2)^n [nc]^{2k} = 1$.*

Теорема B ([6], теорема 2)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две непостоянные целые функции и n, m, $k \in \mathbb{Z}^+$, где $n > m+2k+4$. Если $[f^n(f-1)^m]^{(k)}$ и $[g^n(g-1)^m]^{(k)}$ имеют общее значение 1, включая кратность, то*

i) *либо $f(z) \equiv g(z)$;*

ii) *либо $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению $R(f,g) \equiv 0$, где $R(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^n(\omega_1 - 1)^m - \omega_2^n(\omega_2 - 1)^m$.*

В 2018 г. А. Бенерджи и С. Махумдер [7] исследовали проблему взвешенных общих значений разностно-дифференциального многочлена от целой функции, ими получены следующие результаты.

Теорема C ([7], теорема 2)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две трансцендентные целые функции конечного порядка и $n, k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть также $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $F = [f^n \Delta_\eta f]^{(k)}$, $G = [g^n \Delta_\eta g]^{(k)}$, где $\Delta_\eta f \not\equiv 0$, $\Delta_\eta g \not\equiv 0$ и функции F и G имеют общее значение 1 с весом l. Тогда при выполнении одного из следующих условий*:

i) *$l \ge 2$ и $n > 2k+5$;*

ii) $l = 1$ *и* $n > \dfrac{5k}{2} + 6$;

iii) $l = 0$ *и* $n > 5k + 11$;

выполняется одно из следующих двух утверждений:

i) $f^n \Delta_\eta f = g^n \Delta_\eta g$;

ii) $f = a_1 e^{az}$ *и* $g = a_2 e^{-az}$, *где* a, a_1 *и* a_2 — *ненулевые константы такие, что*

$$(-1)^k (a_1 a_2)^{n+1} [(n+1)a]^{2k} (2 - e^{a\eta} - e^{-a\eta}) = 1.$$

Сконцентрируем внимание на распределении значений разностно-дифференциальных многочленов. Нами предложены и изучены в различных аспектах следующие результаты о разностно-дифференциальных многочленах порядка k от трансцендентной целой функции в том случае, когда две такие функции имеют общие значения.

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ — *трансцендентная целая функция конечного порядка и* n, m, $k \in \mathbb{Z}^+$, *где* $n \geq k + 2$ *и* $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Пусть также* a, b — *комплексные числа такие, что* $|a| + |b| \neq 0$ *и* $\Delta_\eta f \not\equiv 0$. *Тогда* $[f^n (a f^m + b) \Delta_\eta f]^{(k)} - 1 = 0$ *имеет бесконечно много решений.*

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ — *трансцендентная целая функция конечного порядка и* n, m, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Пусть также* a, b — *комплексные числа такие, что* $|a| + |b| \neq 0$ *и* $\Delta_\eta f \not\equiv 0$. *Если* $n \geq k + 2 (\geq 3)$, *где* $m \leq k + 1$, *или же* $n \geq 2k - m + 3$, *где* $m > k + 1$, *то* $[f^n (af + b)^m \Delta_\eta f]^{(k)} - 1 = 0$ *имеет бесконечно много решений.*

Замечание 1. *Теоремы* 1 *и* 2 *эквивалентны при* $m = 1$.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *и* $g(z)$ — *две трансцендентные целые функции конечного порядка и* $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$. *Пусть также* $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $[f^n (a f^m + b) \Delta_\eta f]^{(k)}$ *и* $[g^n (a g^m + b) \Delta_\eta g]^{(k)}$ *имеют общее значение* 1, *включая кратность, где* a, b — *комплексные числа такие, что*

$$|a| + |b| \neq 0, \quad \Delta_\eta f \not\equiv 0 \quad \text{и} \quad \Delta_\eta g \not\equiv 0.$$

Тогда

1) *при* $ab = 0$ *выполняется одно из следующих утверждений*:

i) *если* $a \neq 0$ *и* $n > m + 2k + 5$, *то*

a) $f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$, $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$, *где* ρ_1, ρ_2 *и* μ — *комплексные константы, удовлетворяющие соотношению*

$$(-1)^k a^2 (\rho_1 \rho_2)^{m+n+1} [\mu(m+n+1)]^{2k} [2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1,$$

или

b) $f(z) = t g(z)$, *где* $t^{m+n+1} = 1$, *если* t — *константа, или* $t^{m+n} = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta t g}$, *если* t — *переменная*;

ii) *если* $a = 0$ *и* $n > 2k + 5$, *то*

a) $f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$, $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$, *где* ρ_1, ρ_2 *и* μ — *комплексные константы, удовлетворяющие соотношению*

$$(-1)^k b^2 (\rho_1 \rho_2)^{n+1} [\mu(n+1)]^{2k} [2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1,$$

или

b) $f(z) = t g(z)$, *где* $t^{n+1} = 1$, *если* t — *константа, либо* $t^n = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta t g}$, *если* t — *переменная*;

2) *при* $ab \neq 0$ *и* $n > m + 2k + 5$ *имеем* $f(z) \equiv g(z)$ *или* $f(z) = h g(z)$, *где* h — *переменная и* $g^m = -\dfrac{b}{a} \dfrac{h^n \Delta_\eta h g - \Delta_\eta g}{h^{m+n} \Delta_\eta h g - \Delta_\eta g}$.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две трансцендентные целые функции конечного порядка и $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть также $\eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $[f^n(af+b)^m \Delta_\eta f]^{(k)}$ и $[g^n(ag+b)^m \Delta_\eta g]^{(k)}$ имеют общее значение 1, включая кратность, где a, b — комплексные числа такие, что*

$$|a| + |b| \neq 0, \quad \Delta_\eta f \not\equiv 0 \quad \text{и} \quad \Delta_\eta g \not\equiv 0.$$

Тогда

1) *при $ab = 0$ выполняется одно из следующих утверждений:*

i) *если $a \neq 0$ и $n > m + 2k + 5$ при $m \leq k + 1$ или $n > 4k - m + 5$ при $m > k + 1$, то*

a) *$f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$, $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$, где ρ_1, ρ_2 и μ — комплексные константы, удовлетворяющие соотношению*

$$(-1)^k a^{2m}(\rho_1\rho_2)^{m+n+1}[\mu(m+n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1,$$

или

b) *$f(z) = tg(z)$, где $t^{m+n+1} = 1$, если t — константа, либо $t^{m+n} = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$, если t — переменная;*

ii) *если $a = 0$ и $n > 2k + 5$, то*

a) *$f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$, $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$, где ρ_1, ρ_2 и μ — комплексные константы, удовлетворяющие соотношению*

$$(-1)^k b^{2m}(\rho_1\rho_2)^{n+1}[\mu(n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1,$$

или

b) *$f(z) = tg(z)$, где $t^{n+1} = 1$, если t — константа, либо $t^n = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$, если t — переменная;*

2) *если $ab \neq 0$ и $n > m + 2k + 5$ при $m \leq k + 1$ или $n > 4k - m + 5$ при $m > k + 1$, то $f(z) = hg(z)$, если h — константа, при этом $h^\chi = 1$, где*

$$\chi = GCD\{m + n + 1, m + n, \ldots, n + 1\},$$

или $f(z) = hg(z)$, если h — переменная, при этом f и g удовлетворяют алгебраическому уравнению $R(f, g) = 0$, где

$$R(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^n(a\omega_1 + b)^m \Delta_\eta \omega_1 - \omega_2^n(a\omega_2 + b)^m \Delta_\eta \omega_2.$$

Замечание 2. *При $m = 1$ теоремы 3 и 4 совпадают друг с другом.*

Замечание 3. *Если взять $\Delta_\eta f = \Delta_\eta g = 1$ в теореме 3, то из нее можно вывести теорему* A. *Поэтому теорема 3 является существенным улучшением теоремы* A.

Замечание 4. *Теорема* B *следует из теоремы 4 при $a = 1$, $b = -1$, $m = 1$ и $\Delta_\eta f = \Delta_\eta g = 1$. Поэтому теорема 4 является существенным улучшением теоремы* B.

Замечание 5. *Если взять $a = 1$, $b = 0$ и $m = 0$ в теореме 3, то из нее получается теорема* C. *Поэтому теорема 3 является существенным улучшением теоремы* C.

1. Леммы

Для доказательства наших результатов нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1 ([8], лемма 2). *Пусть $f(z)$ — непостоянная мероморфная функция,*

$$a_0(z), \quad a_1(z), \ldots, a_{n-1}(z), \quad a_n(z)(\neq 0)$$

— мероморфные функции такие, что $T(r, a_i) = S(r, f)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда

$$T(r, a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n) = nT(r, f) + S(r, f).$$

Лемма 2 ([3], теорема 1.30). *Пусть $f(z)$ — трансцендентная целая функция, $k \in \mathbb{Z}^+$ и $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тогда*

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq N(r,0;f) + N\big(r,\eta;f^{(k)}\big) - N\big(r,0;f^{(k+1)}\big) + S(r,f) \leq \\ &\leq N(r,0;f|k+1) + \overline{N}\big(r,\eta;f^{(k)}\big) - N\big(r,0;f^{(k+1)}|0\big) + S(r,f), \end{aligned}$$

где $N\left(r,0;f^{(k+1)}|0\right)$ — подсчитывающая функция, считающая только те точки, в которых $f^{(k+1)} = 0$, но $f(f^{(k)} - \eta) \neq 0$.

Лемма 3 ([3], теорема 1.8). *Пусть $f(z)$ — трансцендентная мероморфная функция и пусть $a_1(z)$, $a_2(z)$ — две мероморфные функции такие, что $T(r,a_i) = S(r,f)$ $(i = 1,2)$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда*

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,a_1;f) + \overline{N}(r,a_2;f) + S(r,f).$$

Лемма 4 ([3], теорема 1.24). *Пусть $f(z)$ — непостоянная мероморфная функция, $k \in \mathbb{Z}^+$ и $f^{(k)} \not\equiv 0$. Тогда*

$$N\big(r,0;f^{(k)}\big) \leq N(r,0;f) + k\overline{N}(r,\infty;f) + S(r,f).$$

Лемма 5 ([9]). *Пусть $f(z)$ — непостоянная мероморфная функция и $p,k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда*

$$N\big(r,0;f^{(k)}\big) \leq T\big(r,f^{(k)}\big) - T(r,f) + N(r,0;f|p+k) + S(r,f),$$

$$N\big(r,0;f^{(k)}\big) \leq k\overline{N}(r,\infty;f) + N(r,0;f|p+k) + S(r,f).$$

Лемма 6 ([10], следствие 2.5). *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка σ и пусть $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ — фиксированное число. Тогда для любого $\epsilon(>0)$ имеем*

$$m\left(r,\frac{f(z+\eta)}{f(z)}\right) + m\left(r,\frac{f(z)}{f(z+\eta)}\right) = O(r^{\sigma-1+\epsilon}) = S(r,f).$$

Лемма 7. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две непостоянные целые функции, $n,m,k \in \mathbb{Z}^+$, $n > k+2$, и a, b — комплексные константы такие, что $|a| + |b| \neq 0$. Пусть*

$$F = [f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}, \quad G = [g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g]^{(k)}, \tag{1}$$

где $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\Delta_\eta f \not\equiv 0$, $\Delta_\eta g \not\equiv 0$ и

$$H = \left[\frac{F^{(2)}}{F^{(1)}} - \frac{2F^{(1)}}{F-1}\right] - \left[\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} - \frac{2G^{(1)}}{G-1}\right]. \tag{2}$$

Если F и G имеют общее значение 1, включая кратность, и $H \not\equiv 0$, то

$$m\left(r,\frac{1}{F}\right) = N(r,0;G) - (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + S(r,f) + S(r,g).$$

Аналогичный результат верен и для $m\left(r,\dfrac{1}{G}\right)$.

Доказательство. Пусть α_0 — простой нуль функций $F-1$ и $G-1$. Тогда $H(\alpha_0) = 0$, поскольку F и G имеют общее значение 1, включая кратность. Теперь если $H \not\equiv 0$, то имеем

$$N(r,1;F|\leq 1) = N(r,1;G|\leq 1) \leq N(r,0;H) \leq T(r,H) + O(1) \leq \overline{N}(r,\infty;H) + S(r,f) + S(r,g). \tag{3}$$

Нули $F-1=0$ не могут быть полюсами $H(z)$, так как F и G имеют общее значение 1, включая кратность. Поскольку f и g — две непостоянные целые функции, то из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} N(r,1;F|\le 1) &\le \overline{N}(r,0;F|\ge 2)+\overline{N}(r,0;G|\ge 2)+\overline{N}\big(r,0;F^{(1)}|0\big)+ \\ &+ \overline{N}\big(r,0;G^{(1)}|0\big)+S(r,f)+S(r,f), \end{aligned} \tag{4}$$

где $N\big(r,0;F^{(1)}|0\big)$ обозначает функцию, подсчитывающую только те нули $F^{(1)}$, которые не являются нулями $F(F-1)$; функция $N\big(r,0;G^{(1)}|0\big)$ задается аналогично. Теперь из второй основной теоремы Неванлинны и леммы 4 получаем

$$T(r,F)\le \overline{N}(r,\infty;F)+\overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,1;F)-N(r,0;F^{(1)}|0)+S(r,f), \tag{5}$$

$$N\big(r,0;G^{(1)}\big)\le N(r,0;G)+S(r,g). \tag{6}$$

Из определения $N(r,0;G^{(1)}|0)$ можно вывести, что

$$\overline{N}\big(r,0;G^{(1)}|0\big)+\overline{N}(r,1;G|\ge 2)+N(r,0;G|\ge 2)-\overline{N}(r,0;G|\ge 2)\le N\big(r,0;G^{(1)}\big). \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\overline{N}\big(r,0;G^{(1)}\big)+\overline{N}(r,1;G|\ge 2)\le \overline{N}(r,0;G)+S(r,g). \tag{8}$$

Поскольку F и G имеют общее значение 1, включая кратность, то

$$\overline{N}(r,1;F)=N(r,1;F|\le 1)+\overline{N}(r,1;F|\ge 2)=N(r,1;F|\le 1)+\overline{N}(r,1;G|\ge 2). \tag{9}$$

Совмещая (5), (8), (9), можно показать, что

$$T(r,f)=\overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,0;G)+\overline{N}(r,0;F|\ge 2)+\overline{N}(r,0;G|\ge 2)+S(r,f)+S(r,g). \tag{10}$$

Из первой основной теоремы Неванлинны следует, что $T(r,F)=T\left(r,\dfrac{1}{F}\right)+S(r,f)$, и из неравенства (10) получаем

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{F}\right) &\le N(r,0;F)-[N(r,0;F|\ge 3)-2\overline{N}(r,0;F|\ge 3)]+N(r,0;G)- \\ &- [N(r,0;G|\ge 3)-2\overline{N}(r,0;F|\ge 3)]+S(r,f)+S(r,g). \end{aligned} \tag{11}$$

Предположим, что α_0 — нуль функции f кратности $l(\ge 1)$, тогда α_0 является нулем функции F кратности $nl-k$. Поскольку $n>k+2$, то $nl-k>(k+2)l-k=(l-1)k+2l\ge 2$, т. е. α_0 — нуль функции F кратности не меньше трех. Тогда получаем

$$N(r,0;F|\ge 3)-2\overline{N}(r,0;F|\ge 3)\ge (n-k-2)N(r,0;f), \tag{12}$$

$$N(r,0;G|\ge 3)-2\overline{N}(r,0;G|\ge 3)\ge (n-k-2)N(r,0;g). \tag{13}$$

Известно, что

$$m\left(r,\frac{1}{F}\right)=T\left(r,\frac{1}{F}\right)-N(r,0;F). \tag{14}$$

Объединяя неравенства (11)–(14), получаем требуемый результат

$$m\left(r,\frac{1}{F}\right)=N(r,0;G)-(n-k-2)N(r,0;f)-(n-k-2)N(r,0;g)+S(r,f)+S(r,g).$$

Аналогично можно показать, что

$$m\left(r,\frac{1}{G}\right)=N(r,0;F)-(n-k-2)N(r,0;g)-(n-k-2)N(r,0;f)+S(r,f)+S(r,g). \qquad \square$$

Лемма 8. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две непостоянные целые функции и пусть $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$, $n > k+2$, и a, b — комплексные константы такие, что $|a|+|b| \neq 0$. Пусть $F = [f^n(af+b)^m \Delta_\eta f]^{(k)}$ и $G = [g^n(ag+b)^m \Delta_\eta g]^{(k)}$, где $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\Delta_\eta f \not\equiv 0$, $\Delta_\eta g \not\equiv 0$ и*

$$H = \left[\frac{F^{(2)}}{F^{(1)}} - \frac{2F^{(1)}}{F-1}\right] - \left[\frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} - \frac{2G^{(1)}}{G-1}\right].$$

Если F и G имеют общее значение 1, включая кратность, и $H \not\equiv 0$, то

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) = N(r,0;G) - (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + S(r,f) + S(r,g).$$

Аналогичный результат верен и для $m\left(r, \frac{1}{G}\right)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Лемма 9. *Пусть f — трансцендентная целая функция конечного порядка, $n, m \in \mathbb{Z}^+$, $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и a, b — комплексные числа такие, что $|a|+|b| \neq 0$. Если $a \neq 0$, то*

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af^m+b)f) = (n+m+1)T(r,f) + S(r,f);$$

если же $a = 0$, то

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af^m+b)f) = (n+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Доказательство. Поскольку f — трансцендентная целая функция, то $f^n(af^m+b)\Delta_\eta f$ также является целой функцией. Предположим сначала, что $a \neq 0$, тогда по лемме 6 имеем

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = m(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = m(r, f^n) + m(r, af^m+b) + m(r, \Delta_\eta f) =$$
$$= nm(r,f) + mm(r,f) + m(r,f) + m\left(r, \frac{\Delta_\eta f}{f}\right) \leq (n+m+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Откуда

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) \leq (n+m+1)T(r,f) + S(r,f). \tag{15}$$

С другой стороны, используя лемму 6 и первую основную теорему Неванлинны, можно получить неравенства

$$\begin{aligned}
(n+m+1)T(r,f) = T(r, f^n(af^m+b)f) &= m(r, f^n(af^m+b)f) \leq \\
\leq\ & m(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + m\left(r, \frac{f}{\Delta_\eta f}\right) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + T\left(r, \frac{f}{\Delta_\eta f}\right) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + T\left(r, \frac{\Delta_\eta f}{f}\right) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + m\left(r, \frac{\Delta_\eta f}{f}\right) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + S(r,f).
\end{aligned}$$

Откуда

$$(n+m+1)T(r,f) = T(r, f^n(af^m+b)f) \leq T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) + S(r,f). \tag{16}$$

Совмещая (15) и (16), получаем

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af^m+b)f) = (n+m+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Если же $a = 0$, очевидно имеем

$$T(r, f^n(af^m+b)\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af^m+b)f) = (n+1)T(r,f) + S(r,f). \qquad \square$$

Лемма 10. *Пусть $f(z)$ — трансцендентная целая функция конечного порядка, $n, m \in \mathbb{Z}^+$, $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и a, b — комплексные числа такие, что $|a| + |b| \neq 0$. Если $a \neq 0$, то*

$$T(r, f^n(af+b)^m\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af+b)^m f) = (n+m+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Если же $a = 0$, то

$$T(r, f^n(af+b)^m\Delta_\eta f) = T(r, f^n(af+b)^m f) = (n+1)T(r,f) + S(r,f).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Лемма 11. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две целые функции, $n, m, k \in \mathbb{Z}^+$, $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и a, b — комплексные числа такие, что $|a| + |b| \neq 0$. Возьмем $F = [f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}$ и $G = [g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g]^{(k)}$, где $\Delta_\eta f \not\equiv 0$ и $\Delta_\eta g \not\equiv 0$. Если существуют две ненулевые комплексные константы β_1 и β_2 такие, что $\overline{N}(r,\beta_1;F) = \overline{N}(r,0;G)$ и $\overline{N}(r,\beta_2;G) = \overline{N}(r,0;F)$, то $n \leq m+2k+3$ при $a \neq 0$ или $n \leq 2k+3$ при $a = 0$.*

Доказательство. Поскольку f и g являются целыми, то F и G также являются целыми. Возьмем $F_1 = f^n(af^m+b)\Delta_\eta f$ и $G_1 = g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g$.

1) Пусть $a \neq 0$.

Ввиду второй основной теоремы Неванлинны

$$T(r,F) \leq \overline{N}(r,0;F) + \overline{N}(r,\beta_1;F) + S(r,F) \leq \overline{N}(r,0;F) + \overline{N}(r,0;G) + S(r,F). \tag{17}$$

Используя леммы 1, 5, 9, получаем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f) = T(r,F_1) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & T(r,F) - \overline{N}(r,0;F) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & N(r,0;G) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & N(r,0;G_1|k+1) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g) + m\overline{N}(r,0;g) + N(r,0;\Delta_\eta g|k+1) + (k+1)\overline{N}(r,0;f) + \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f) + N(r,0;\Delta_\eta f|k+1) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g) + m\overline{N}(r,0;g) + T(r,\Delta_\eta g) + (k+1)\overline{N}(r,0;f) + \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f) + T(r,\Delta_\eta f) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g) + m\overline{N}(r,0;g) + m(r,\Delta_\eta g) + (k+1)\overline{N}(r,0;f) + \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f) + m(r,\Delta_\eta f) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g) + m\overline{N}(r,0;g) + m(r,g) + m\left(r,\frac{\Delta_\eta g}{g}\right) + (k+1)\overline{N}(r,0;f) + \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f) + m(r,f) + m\left(r,\frac{\Delta_\eta f}{f}\right) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)T(r,g) + mT(r,g) + T(r,g) + (k+1)T(r,f) + \\
+\ & mT(r,f) + T(r,f) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (m+k+2)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned}$$

Откуда

$$(n+m+1)T(r,f) \leq (m+k+2)(T(r,g)+T(r,f))+S(r,f)+S(r,g). \tag{18}$$

Аналогично можно показать, что

$$(n+m+1)T(r,g) \leq (m+k+2)(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g). \tag{19}$$

Объединяя (18), (19), имеем

$$(n+m+1)(T(r,g)+T(r,f)) \leq 2(m+k+2)(T(r,g)+T(r,f))+S(r,f)+S(r,g),$$

$$[n-(m+2k+3)](T(r,g)+T(r,f)) \leq S(r,f)+S(r,g).$$

Отсюда $n \leq m+2k+3$.

2) Пусть $a=0$.

Аналогичными рассуждениями можно получить, что $n \leq 2k+3$. □

Лемма 12. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две целые функции, $n,m,k \in \mathbb{Z}^+$, $\eta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и a, b — комплексные числа такие, что $|a|+|b| \neq 0$. Возьмем $F=[f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k)}$ и $G=[g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g]^{(k)}$, где $\Delta_\eta f \not\equiv 0$ и $\Delta_\eta g \not\equiv 0$. Если существуют две ненулевые комплексные константы β_1 и β_2 такие, что $\overline{N}(r,\beta_1;F)=\overline{N}(r,0;G)$ и $\overline{N}(r,\beta_2;G)=\overline{N}(r,0;F)$, то*

i) *$n \leq m+2k+3$ при $m \leq k+1$ или $n \leq 4k-m+5$ при $m>k+1$, если $a \neq 0$;*

ii) *$n \leq 2k+3$, если $a=0$.*

Доказательство. Поскольку f и g — целые функции, то F и G также являются целыми функциями. Возьмем $F_1=f^n(af+b)^m\Delta_\eta f$ и $G_1=g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g$.

1) Пусть $a \neq 0$.

Ввиду второй основной теоремы Неванлинны

$$T(r,F) \leq \overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,\beta_1;F)+S(r,F) \leq \overline{N}(r,0;F)+\overline{N}(r,0;G)+S(r,F). \tag{20}$$

Используя леммы 1, 5, 9, получаем

$$(n+m+1)T(r,f)=T(r,F_1)+S(r,f) \leq T(r,F)-\overline{N}(r,0;F)+N(r,0;F_1|k+1)+S(r,f) \leq$$

$$\leq N(r,0;G)+N(r,0;F_1|k+1)+S(r,f) \leq N(r,0;G_1|k+1)+N(r,0;F_1|k+1)+S(r,f). \tag{21}$$

1.1) Пусть $m \leq k+1$.

Из (21) имеем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f) \leq N(r,0;G_1|k+1)+N(r,0;F_1|k+1)+S(r,f) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g)+m\overline{N}(r,0;g)+N(r,0;\Delta_\eta g|k+1)+(k+1)\overline{N}(r,0;f)+ \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f)+N(r,0;\Delta_\eta f|k+1)+S(r,f)+S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g)+m\overline{N}(r,0;g)+T(r,\Delta_\eta g)+(k+1)\overline{N}(r,0;f)+ \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f)+T(r,\Delta_\eta f)+S(r,f)+S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g)+m\overline{N}(r,0;g)+m(r,\Delta_\eta g)+(k+1)\overline{N}(r,0;f)+ \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f)+m(r,\Delta_\eta f)+S(r,f)+S(r,g) \leq \\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;g)+m\overline{N}(r,0;g)+m(r,g)+m\left(r,\frac{\Delta_\eta g}{g}\right)+(k+1)\overline{N}(r,0;f)+ \\
+\ & m\overline{N}(r,0;f)+m(r,f)+m\left(r,\frac{\Delta_\eta f}{f}\right)+S(r,f)+S(r,g) \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad (k+1)T(r,g) + mT(r,g) + T(r,g) + (k+1)T(r,f) + \\
&+ \quad mT(r,f) + T(r,f) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
&\leq \quad (m+k+2)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g),
\end{aligned}
$$

откуда

$$(n+m+1)T(r,f) \leq (m+k+2)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{22}$$

Аналогично можно показать, что

$$(n+m+1)T(r,g) \leq (m+k+2)(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{23}$$

Совмещая (22) и (23), имеем

$$(n+m+1)(T(r,g) + T(r,f)) \leq 2(m+k+2)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g),$$

$$[n - (m+2k+3)](T(r,g) + T(r,f)) \leq S(r,f) + S(r,g).$$

Отсюда $n \leq m + 2k + 3$.

1.2) Пусть $m > k + 1$.

Из (21) получаем

$$
\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f) \leq N(r,0;G_1|k+1) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad (k+1)\overline{N}(r,0;g) + (k+1)\overline{N}(r,0;ag+b) + N(r,0;\Delta_\eta g|k+1) + (k+1)\overline{N}(r,0;f) + \\
&+ \quad (k+1)\overline{N}(r,0;af+b) + N(r,0;\Delta_\eta f|k+1) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
&\leq \quad (2k+3)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Аналогично,

$$(n+m+1)T(r,g) \leq (2k+3)(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{25}$$

Объединяя (24) и (25), находим $n \leq 4k - m + 5$.

2) Пусть $a = 0$.

Рассуждениями, аналогичными подслучаю 1.1), можно получить неравенство $n \leq 2k+3$. $\square$

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $F_1 = f^n(af^m + b)\Delta_\eta f$ и $F = F_1^{(k)}$. Поскольку f — трансцендентная целая функция, то F_1 и F являются трансцендентными целыми функциями.

1) Пусть $a \neq 0$.

Ввиду леммы 9

$$(n+m+1)T(r,f) = T(r, f^n(af^m + b)\Delta_\eta f) + S(r,f).$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, получаем

$$
\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f) = T(r,F_1) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad N(r,0;f^n(af^m+b)\Delta_\eta f|k+1) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad N(r,0;f^n|k+1) + N(r,0;af^m+b|k+1) + N(r,0;\Delta_\eta f|k+1) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad (k+1)\overline{N}(r,0;f) + mN(r,0;f) + T(r,\Delta_\eta f) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad (m+k+1)\overline{N}(r,0;f) + m(r,\Delta_\eta f) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\
&\leq \quad (m+k+2)T(r,0;f) + N(r,1;F) + S(r,f),
\end{aligned}
$$

откуда

$$(n-k-1)T(r,f) \leq N(r,1;F) + S(r,f).$$

Поскольку $n \geq k+2$, то $F-1=0$, т. е. $[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}-1=0$ имеет бесконечно много решений.

2) Пусть $a=0$.

Ввиду леммы 9

$$(n+1)T(r,f)=T(r,f^n(af^m+b)\Delta_\eta f)+S(r,f).$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned}
&(n+1)T(r,f)=T(r,F_1)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & N(r,0;f^n(af^m+b)\Delta_\eta f|k+1)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & N(r,0;f^n|k+1)+N(r,0;af^m+b|k+1)+N(r,0;\Delta_\eta f|k+1)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;f)+T(r,\Delta_\eta f)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;f)+m(r,\Delta_\eta f)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & (k+2)T(r,0;f)+N(r,1;F)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Откуда

$$(n-k-1)T(r,f)\leq N(r,1;F)+S(r,f).$$

Поскольку $n \geq k+2$, то $F-1=0$, т. е. $[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}-1=0$ имеет бесконечно много решений. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $F_1=f^n(af+b)^m\Delta_\eta f$ и $F=F_1^{(k)}$. Поскольку f — трансцендентная целая функция, то F_1 и F также являются трансцендентными целыми функциями.

1) Пусть $a\neq 0$.

Тогда ввиду леммы 10

$$(n+m+1)T(r,f)=T(r,f^n(af+b)^m\Delta_\eta f)+S(r,f),$$

откуда, используя леммы 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f)=T(r,F_1)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & N(r,0;f^n(af+b)^m\Delta_\eta f|k+1)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & N(r,0;f^n|k+1)+N(r,0;(af+b)^m|k+1)+N(r,0;\Delta_\eta f|k+1)+N(r,1;F)+S(r,f).
\end{aligned}\tag{26}$$

1.1) Пусть $m\leq k+1$.

Тогда из (26) выводим

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f)\leq(k+1)\overline{N}(r,0;f)+mN(r,0;f)+T(r,\Delta_\eta f)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & (m+k+1)\overline{N}(r,0;f)+m(r,\Delta_\eta f)+N(r,1;F)+S(r,f)\leq\\
\leq\ & (m+k+2)\overline{N}(r,0;f)+N(r,1;F)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Откуда

$$(n-k-1)T(r,f)\leq N(r,1;F)+S(r,f).$$

Поскольку $n \geq k+2$, то $F-1=0$, т. е. $[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}-1=0$ имеет бесконечно много решений.

1.2) Пусть $m > k+1$.
Тогда из (26) выводим

$$\begin{aligned}&(n+m+1)T(r,f) \leq (k+1)\overline{N}(r,0;f) + (k+1)N(r,0;f) + T(r,\Delta_\eta f) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & 2(k+1)\overline{N}(r,0;f) + m(r,\Delta_\eta f) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & (2k+3)\overline{N}(r,0;f) + N(r,1;F) + S(r,f),\end{aligned}$$

откуда

$$[n-(2k-m+2)]T(r,f) \leq N(r,1;F) + S(r,f).$$

Поскольку $n \geq 2k-m+3$, то $F-1=0$, т. е. $[f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k)} - 1 = 0$ имеет бесконечно много решений.

2) Пусть $a=0$.
Тогда по лемме 10

$$(n+1)T(r,f) = T(r, f^n(af+b)^m\Delta_\eta f) + S(r,f).$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned}&(n+1)T(r,f) = T(r,F_1) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & N(r,0;f^n(af+b)^m\Delta_\eta f|k+1) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & N(r,0;f^n|k+1) + N(r,0;(af+b)^m|k+1) + N(r,0;\Delta_\eta f|k+1) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & (k+1)\overline{N}(r,0;f) + m(r,\Delta_\eta f) + N(r,1;F) + S(r,f) \leq \\ \leq\ & (k+2)T(r,0;f) + N(r,1;F) + S(r,f),\end{aligned}$$

откуда

$$(n-k-1)T(r,f) \leq N(r,1;F) + S(r,f).$$

Поскольку $n \geq k+2$, то $F-1=0$, т. е. $[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)} - 1 = 0$ имеет бесконечно много решений. □

Доказательство теоремы 3. Возьмем

$$F = [f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)}, \quad G = [g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g]^{(k)},$$
$$F_1 = f^n(af^m+b)\Delta_\eta f, \quad G_1 = g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g.$$

Тогда $F = F_1^{(k)}$ и $G = G_1^{(k)}$. Теперь по лемме 9

$$T(r,F_1) = (n+m+1)T(r,f) + S(r,f), \tag{27}$$
$$T(r,G_1) = (n+m+1)T(r,g) + S(r,g). \tag{28}$$

Также можно вывести

$$m\left(r,\frac{1}{F_1}\right) \leq m\left(r,\frac{1}{F}\right) + S(r,f). \tag{29}$$

Получаем

$$m\left(r,\frac{1}{F_1}\right) = T(r,F_1) - N(r,0;F_1) + S(r,f). \tag{30}$$

Разобьем доказательство теоремы на следующие случаи.

1) Пусть $H \not\equiv 0$.
Предположим сначала, что $a \neq 0$, тогда по лемме 7 имеем

$$m\left(r,\frac{1}{F}\right) = N(r,0;G) - (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + S(r,f) + S(r,g). \tag{31}$$

Снова по лемме 4 получаем

$$N(r,0;G) \le N(r,0;G_1) + S(r,f). \tag{32}$$

Используя неравенства (27), (29)–(32), имеем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,f) = T(r,F_1) + S(r,f) = \\
&= \quad m(r,\frac{1}{F_1}) + N(r,0;F_1) + S(r,f) \le \\
&\le \quad m(r,\frac{1}{F_1}) + N(r,0;F_1) + S(r,f) \le \\
&\le \quad N(r,0;G) - (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + \\
&+ \quad N(r,0;F_1) + S(r,f) + S(r,g) \le \\
&\le \quad N(r,0;G_1) - (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + \\
&+ \quad N(r,0;F_1) + S(r,f) + S(r,g) \le \\
&\le \quad nN(r,0;g) + mN(r,0;g) + N(r,0;\Delta_\eta g) - \\
&- \quad (n-k-2)N(r,0;f) - (n-k-2)N(r,0;g) + \\
&+ \quad nN(r,0;f) + mN(r,0;f) + N(r,0;\Delta_\eta f) + S(r,f) + S(r,g) \le \\
&\le \quad (k+2)N(r,0;g) + mN(r,0;g) + N(r,0;\Delta_\eta g) + (k+2)N(r,0;f) + \\
&+ \quad mN(r,0;f) + N(r,0;\Delta_\eta f) + S(r,f) + S(r,g) \le \\
&\le \quad (m+k+3)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned} \tag{33}$$

Аналогично можно показать, что

$$(n+m+1)T(r,g) \le (m+k+3)(T(r,g) + T(r,f)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{34}$$

Складывая (33) с (34), имеем

$$(n+m+1)(T(r,g) + T(r,f)) \le (2m+2k+6)(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g),$$

$$[n-(m+2k+5)](T(r,f) + T(r,g)) \le S(r,f) + S(r,g),$$

что является противоречием, так как $n > m+2k+5$.

Далее, если $a = 0$, то аналогичными рассуждениями получаем противоречие с тем, что $n > 2k+5$.

2) Пусть $H \equiv 0$.

Тогда $\left(\dfrac{F^{(2)}}{F^{(1)}-1} - \dfrac{2F^{(1)}}{F-1}\right) - \left(\dfrac{G^{(2)}}{G^{(1)}} - \dfrac{2G^{(1)}}{G-1}\right) = 0$. Дважды проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{F-1} = \frac{A}{G-1} + B, \tag{35}$$

где $A(\neq 0)$, B — константы. Рассмотрим теперь следующие подслучаи.

2.1) Пусть $B \neq 0$ и $A = B$. Тогда из (35) получаем

$$\frac{1}{F-1} = \frac{BG}{G-1}. \tag{36}$$

Если $B = -1$, то из (36) следует, что $FG = 1$. Тогда

$$[f^n(af^m + b)\Delta_\eta f]^{(k)}[g^n(ag^m + b)\Delta_\eta g]^{(k)} = 1. \tag{37}$$

Поскольку $f(z)$ и $g(z)$ — трансцендентные целые функции и $n > m+2k+5$, получаем

$$f(z) \neq 0; \quad g(z) \neq 0.$$

2.1.1) Пусть $ab = 0$.
Поскольку $|a| + |b| \neq 0$, то, по крайней мере, одно из чисел a или b ненулевое. Пусть $a \neq 0$ и $b = 0$. Тогда из (37) получим

$$\left[af^{m+n}\Delta_\eta f\right]^{(k)}\left[ag^{m+n}\Delta_\eta g\right]^{(k)} = 1. \tag{38}$$

Так как $n > m + 2k + 5$, то из (38) вытекает, что f и g не имеют нулей, и можно взять f и g следующим образом:

$$f = e^{\alpha(z)}, g = e^{\beta(z)},$$

где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — многочлены, отличные от константы. Теперь

$$f^{m+n}\Delta_\eta f = f^{m+n}f(z+\eta) - f^{m+n+1} = e^{(m+n)\alpha(z)+\alpha(z+\eta)} - e^{(m+n+1)\alpha(z)}.$$

Пусть

$$\alpha_1(z) = \alpha(z+\eta) - \alpha(z),$$

$$\alpha_2(z) = (m+n)\alpha(z) + \alpha(z+\eta).$$

Откуда

$$\left[f^{m+n+1}\right]^{(k)} = d_1\Big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}\Big)e^{(m+n+1)\alpha(z)},$$

$$\left[f^{m+n}f(z+\eta)\right]^{(k)} = d_2\Big(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}\Big)e^{\alpha_2(z)},$$

где d_1 и d_2 — дифференциальные многочлены от $\Big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}\Big)$ и $\Big(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}\Big)$ соответственно. Легко увидеть, что $d_1 \not\equiv 0$, $d_2 \not\equiv 0$ и $[af^{m+n}\Delta_\eta f]^{(k)} \not\equiv 0$. Тогда $T(r, d_i) = S(r, f)(i = 1, 2)$ и

$$\overline{N}(r, 0; d_2 e^{\alpha_1(z)} - d_1) = 0. \tag{39}$$

Из второй основной теоремы Неванлинны и неравенства (39) следует, что

$$T(r, e^{\alpha_1}) \leq \overline{N}(r, 0; e^{\alpha_1}) + \overline{N}(r, \infty; e^{\alpha_1}) + \overline{N}(r, 0; d_2 e^{\alpha_1} - d_1) + S(r, f) = S(r, f).$$

Отсюда α_1 — константа, возьмем $\alpha_1 = C$, тогда $\alpha(z+\eta) = \alpha(z) + C$ и $\deg(\alpha) = 1$. Аналогичным образом получим, что $\deg(\beta) = 1$. Тогда $f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$ и $g(z) = \rho_2 e^{\lambda z}$, где ρ_1, ρ_2, μ, λ — ненулевые константы. Снова из (38) имеем $\mu = -\lambda$. Тогда $f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$ и $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$. Значит, из (38) вытекает

$$(-1)^k a^2(\rho_1\rho_2)^{m+n+1}[\mu(m+n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1.$$

Снова если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение (38) имеет вид $[bf^n\Delta_\eta f]^{(k)}[bg^n\Delta_\eta g]^{(k)} = 1$ и, продолжая как и ранее, получим

$$f(z) = \rho_1 e^{\mu z}, \quad g(z) = \rho_2 e^{-\mu z} \quad \text{и} \quad (-1)^k b^2(\rho_1\rho_2)^{n+1}[\mu(n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1.$$

2.1.2) Пусть $ab \neq 0$.
Ввиду (37) возьмем $f = e^{\alpha(z)}$. Тогда

$$\begin{aligned} f^n(af^m + b)\Delta_\eta f &= af^{m+n}f(z+\eta) + bf^n f(z+\eta) - af^{m+n+1} - bf^{n+1} = \\ &= ae^{\alpha_2(z)} + be^{\alpha_3(z)} - ae^{\alpha_4(z)} - be^{\alpha_5(z)}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_2(z) = (m+n)\alpha(z) + \alpha(z+\eta),$$

$$\alpha_3(z) = n\alpha(z) + \alpha(z+\eta),$$

$$\alpha_4(z) = (m+n+1)\alpha(z),$$

$$\alpha_5(z) = (n+1)\alpha(z).$$

Тогда

$$[af^{m+n}f(z+\eta)]^{(k)} = d_2\Big(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}\Big)e^{\alpha_2(z)},$$

$$[bf^{n}f(z+\eta)]^{(k)} = d_3\Big(\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \ldots, \alpha_3^{(k)}\Big)e^{\alpha_3(z)},$$

$$[af^{m+n+1}]^{(k)} = d_4\Big(\alpha_4^{(1)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots, \alpha_4^{(k)}\Big)e^{\alpha_4(z)},$$

$$[bf^{n+1}]^{(k)} = d_5\Big(\alpha_5^{(1)}, \alpha_5^{(2)}, \ldots, \alpha_5^{(k)}\Big)e^{\alpha_5(z)},$$

где d_2, d_3, d_4 и d_5 — различные многочлены от $\Big(\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}\Big)$, $\Big(\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \ldots, \alpha_3^{(k)}\Big)$, $\Big(\alpha_4^{(1)}, \alpha_4^{(2)}, \ldots, \alpha_4^{(k)}\Big)$ и $\Big(\alpha_5^{(1)}, \alpha_5^{(2)}, \ldots, \alpha_5^{(k)}\Big)$ соответственно. Легко увидеть, что $d_i \not\equiv 0$ ($i = 2, 3, 4, 5$) и $F \not\equiv 0$, так как f и g — целые функции. Тогда

$$d_2e^{\alpha_2(z)} + d_3e^{\alpha_3(z)} - d_4e^{\alpha_4(z)} - d_5e^{\alpha_5(z)} \not\equiv 0. \tag{40}$$

Поскольку $\alpha(z)$ является целой функцией, то

$$T(r, \alpha^{(1)}) = m(r, \alpha^{(1)}) = m\left(r, \frac{(e^{\alpha})^{(1)}}{e^{\alpha}}\right) = m\left(r, \frac{f^{(1)}}{f}\right) = S(r, f).$$

Таким образом, имеем

$$T(r, \alpha_i^{(j)}) \le T(r, \alpha^{(1)}) + S(r, f) = S(r, f),$$

где $i = 2, 3, 4, 5,\ j = 1, 2, \ldots, k$, и тогда

$$T(r, d_i) = S(r, f). \tag{41}$$

Используя леммы 1 и 3, а также (40) и (41), получаем

$$T(r, f) \le T(r, d_2e^{\alpha_2(z)}) + S(r, f) \le$$

$$\le \overline{N}(r, 0; d_2e^{\alpha_2(z)}) + \overline{N}(r, 0; d_2e^{\alpha_2(z)} + d_3e^{\alpha_3(z)} - d_4e^{\alpha_4(z)} - d_5e^{\alpha_5(z)}) + S(r, f) = S(r, f).$$

Получили противоречие.

Теперь предположим, что $B \neq -1$. Тогда из (36) имеем $F = \dfrac{1}{B}\left[(1-B) - \dfrac{1}{G}\right]$, откуда

$$\overline{N}(r, 0; F) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{1-B}; G\right). \tag{42}$$

Используя лемму 5, (42) и вторую основную теорему Неванлинны, получаем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r, g) = T(r, G) + S(r, g) \le \\
\le\ & \overline{N}(r, 0; G) + \overline{N}(r, \frac{1}{1-B}; G) + \overline{N}(r, \infty; G) + S(r, g) \le \\
\le\ & \overline{N}(r, 0; G) + \overline{N}(r, 0; F) + S(r, g) \le \\
\le\ & N(r, 0; G_1|k+1) + N(r, 0; F_1|k+1) + S(r, f) + S(r, g) \le \\
\le\ & (m+k+2)(T(r, f) + T(r, g)) + S(r, f) + S(r, g).
\end{aligned} \tag{43}$$

Аналогично можно показать, что
$$(n+m+1)T(r,f) \le (m+k+2)(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g). \tag{44}$$
Совмещая (43) и (44), получаем
$$(n+m+1)(T(r,f)+T(r,g)) \le 2(m+k+2)(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g),$$
$$[n-(m+2k+3)](T(r,f)+T(r,g)) \le S(r,f)+S(r,g),$$
что является противоречием, так как $n > m+2k+5$.

2.2) Пусть $B \ne 0$ и $A \ne B$. Тогда из (35) получаем $F = \dfrac{(B+1)G-(B-A+1)}{BG+(A-B)}$, откуда $\overline{N}\left(r, \dfrac{B-A+1}{B+1}; G\right) = \overline{N}(r,0;F)$. Продолжая как и ранее, приходим к противоречию.

2.3) Пусть $B = 0$ и $A \ne 0$. Тогда из (35) получаем $F = \dfrac{G+A-1}{A}$ и $G = AF-(A-1)$. Если $A \ne 1$, то $\overline{N}\left(r, \dfrac{A-1}{A}; F\right) = \overline{N}(r,0;G)$ и $\overline{N}(r,1-A;G) = \overline{N}(r,0;F)$. Тогда ввиду леммы 11 получаем $n \le m+2k+3$ или $n \le 2k+3$, что противоречит условиям $n > m+2k+5$ или $n > 2k+5$ соответственно. Если $A = 1$, то $F = G$, т. е.
$$[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k)} = [g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g]^{(k)}.$$
Интегрируя один раз, получаем
$$[f^n(af^m+b)\Delta_\eta f]^{(k-1)} = [g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g]^{(k-1)} + c_{k-1},$$
где c_{k-1} — комплексная константа. Если $c_{k-1} \ne 0$, то ввиду леммы 11 имеем $n \le m+2k+3$ или $n \le 2k+3$, что противоречит условиям $n > m+2k+5$ или $n > 2k+5$ соответственно. Значит, $c_{k-1} = 0$. Повторяя этот процесс до k раз, получим
$$f^n(af^m+b)\Delta_\eta f = g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g. \tag{45}$$

2.3.1) Пусть $ab = 0$.

Если $ab = 0$ и $|a|+|b| \ne 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$. Предположим сначала, что $a \ne 0$ и $b = 0$. Пусть $f(z) = tg(z)$, где t — комплексная константа, тогда $\Delta_\eta f = t\Delta_\eta g$. Теперь из (45) получаем
$$af^{m+n}\Delta_\eta f = ag^{m+n}\Delta_\eta g \Rightarrow ag^{m+n}\Delta_\eta g(t^{m+n+1}-1) = 0.$$
Откуда $t^{m+n+1} = 1$.

Снова если t — переменная, то $\Delta_\eta f = \Delta_\eta tg$. Тогда из (45) получаем
$$ag^{m+n}(t^{m+n}\Delta_\eta tg - \Delta_\eta g) = 0.$$
Откуда $t^{m+n} = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$.

Если $a = 0$ и $b \ne 0$, то имеем $f(z) = tg(z)$, где t — комплексная константа и $t^{n+1} = 1$. Если t — переменная, то $t^n = \dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$.

2.3.2) Пусть $ab \ne 0$.

Предположим, что $f(z) = hg(z)$. Если h — константа и $h \ne 1$, то $\Delta_\eta hg = h\Delta_\eta g$. Из (45) получаем
$$(hg)^n(a(hg)^m+b)\Delta_\eta hg = g^n(ag^m+b)\Delta_\eta g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad ag^{m+n}\Delta_\eta g(h^{m+n+1}-1) = -bg^n\Delta_\eta g(h^{n+1}-1).$$

Откуда $g^m = -\dfrac{b}{a}\dfrac{h^{n+1}-1}{h^{m+n+1}-1}$. Поскольку g — целая функция, то все нули $h^{m+n+1}-1=0$ должны быть и нулями $h^{n+1}-1=0$, что невозможно. Отсюда $h=1$, и тогда $f(z)\equiv g(z)$. Если h — переменная, то $\Delta_\eta f = \Delta_\eta hg$, и тогда из (45) имеем

$$g^m = -\frac{b}{a}\frac{h^n\Delta_\eta hg - \Delta_\eta g}{h^{m+n}\Delta_\eta hg - \Delta_\eta g}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 4. Возьмем

$F = [f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k)}$, $G = [g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g]^{(k)}$, $F_1 = f^n(af+b)^m\Delta_\eta f$ и $G_1 = g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g$.

Тогда $F = F_1^{(k)}$ и $G = G_1^{(k)}$. Используя свойства бинома, получаем

$$(af+b)^m = (af)^m + \binom{m}{1}(af)^{m-1}b + \ldots + \binom{m}{i}(af)^{m-i}b^i + \ldots + b^m.$$

Теперь ввиду леммы 9

$$T(r,F_1) = (n+m+1)T(r,f) + S(r,f),$$
$$T(r,G_1) = (n+m+1)T(r,g) + S(r,g).$$

Также можно получить, что

$$m\left(r,\frac{1}{F_1}\right) \le m\left(r,\frac{1}{F}\right) + S(r,f).$$

Разобьем доказательство теоремы на следующие случаи.

1) Пусть $H \not\equiv 0$.

Используя лемму 8 и действуя аналогично случаю 1 теоремы 3, придем к противоречию.

2) Пусть $H \equiv 0$.

Тогда $\left(\dfrac{F^{(2)}}{F^{(1)}-1} - \dfrac{2F^{(1)}}{F-1}\right) - \left(\dfrac{G^{(2)}}{G^{(1)}} - \dfrac{2G^{(1)}}{G-1}\right) = 0$. Интегрируя дважды, получаем

$$\frac{1}{F-1} = \frac{A}{G-1} + B, \tag{46}$$

где $A(\ne 0)$, B — константы. Рассмотрим далее следующие подслучаи.

2.1) Пусть $B \ne 0$ и $A = B$. Тогда из (46) получаем

$$\frac{1}{F-1} = \frac{BG}{G-1}. \tag{47}$$

Если $B=-1$, то из (47) следует, что $FG=1$. Тогда

$$[f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k)}[g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g]^{(k)} = 1. \tag{48}$$

Поскольку $f(z)$ и $g(z)$ — трансцендентные целые функции и $n > m+2k+5$ или $n > 2k+5$, то имеем $f(z) \ne 0$ и $g(z) \ne 0$. Рассмотрим следующие случаи.

2.1.1) Пусть $ab = 0$.

Рассуждая аналогично подподслучаю 2.1.1 теоремы 3, найдем $f(z) = \rho_1 e^{\mu z}$ и $g(z) = \rho_2 e^{-\mu z}$, где ρ_1, ρ_2 и μ — комплексные константы, удовлетворяющие соотношениям

$$(-1)^k a^{2m}(\rho_1\rho_2)^{m+n+1}[\mu(m+n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1$$

или

$$(-1)^k b^{2m}(\rho_1\rho_2)^{n+1}[\mu(n+1)]^{2k}[2 - e^{\mu\eta} - e^{-\mu\eta}] = 1.$$

2.1.2) Пусть $ab \neq 0$.
Ввиду (48) возьмем $f = e^{\alpha(z)}$. Тогда

$$f^n(af+b)^m \Delta_\eta f = f^n\bigg((af)^m + \binom{m}{1}(af)^{m-1}b + \ldots + \binom{m}{i}(af)^{m-i}b^i + + \ldots + b^m)(f(z+\eta) - f(z)\bigg).$$

Введем сначала некоторые обозначения:

$$r_i = \binom{m}{i}a^{m-i}b^i,$$

$$(\eta\alpha)_{m-i}(z) = (n+m-i)\alpha(z) + \alpha(z+\eta),$$

$$\alpha_{m-i} = (n+1+m-i)\alpha(z),$$

где $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда

$$\left[r_i f^{n+m-i} f(z+\eta)\right]^{(k)} = p_i\left((\eta\alpha)^{(1)}_{m-i}, (\eta\alpha)^{(2)}_{m-i}, \ldots, (\eta\alpha)^{(k)}_{m-i}\right) e^{(\eta\alpha)_{m-i}(z)},$$

$$\left[r_i f^{n+1+m-i}\right]^{(k)} = q_i\left(\alpha^{(1)}_{m-i}, \alpha^{(2)}_{m-i}, \ldots, \alpha^{(k)}_{m-i}\right) e^{\alpha_{m-i}(z)},$$

где p_i и q_i — дифференциальные многочлены от $\left((\eta\alpha)^{(1)}_{m-i}, (\eta\alpha)^{(2)}_{m-i}, \ldots, (\eta\alpha)^{(k)}_{m-i}\right)$ и $\left(\alpha^{(1)}_{m-i}, \alpha^{(2)}_{m-i}, \ldots, \alpha^{(k)}_{m-i}\right)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ соответственно. Легко увидеть, что $p_i \not\equiv 0$, $q_i \not\equiv 0$ и

$$\sum_{i=0}^{m}\left(p_i e^{(\eta\alpha)_{m-i}(z)} - q_i e^{\alpha_{m-i}(z)}\right) \not\equiv 0. \tag{49}$$

Поскольку $\alpha(z)$ является целой функцией, то

$$T\big(r, \alpha^{(1)}\big) = m\big(r, \alpha^{(1)}\big) = m\left(r, \frac{(e^\alpha)^{(1)}}{e^\alpha}\right) = m\left(r, \frac{f^{(1)}}{f}\right) = S(r,f).$$

Таким образом, получаем

$$T\left(r, (\eta\alpha)^{(j)}_{m-i}\right) \leq T\big(r, \alpha^{(1)}\big) + S(r,f) = S(r,f),$$

$$T\left(r, \alpha^{(j)}_{m-i}\right) \leq T\big(r, \alpha^{(1)}\big) + S(r,f) = S(r,f),$$

где $i = 0, 1, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$T(r, p_i) = S(r,f) = T(r, q_i). \tag{50}$$

Используя леммы 1 и 3, а также (49) и (50), получаем

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq T\left(r, p_0 e^{(\eta\alpha)_m(z)}\right) + S(r,f) \leq \\ &\leq \overline{N}\left(r, 0; p_0 e^{(\eta\alpha)_m(z)}\right) + \overline{N}\left(r, 0; \sum_{i=0}^{m}\left(p_i e^{(\eta\alpha)_{m-i}(z)} - q_i e^{\alpha_{m-i}(z)}\right)\right) + S(r,f) \leq S(r,f), \end{aligned}$$

что является противоречием.

Предположим далее, что $B \neq -1$, тогда из (42) следует $F = \frac{1}{B}\left[(1-B) - \frac{1}{G}\right]$, откуда

$$\overline{N}(r,0;F) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{1-B}; G\right). \tag{51}$$

Пусть сначала $m \leq k+1$, тогда ввиду леммы 5, (51) и второй основной теоремы Неванлинны имеем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,g) = T(r,G) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r, \frac{1}{1-B}; G) + \overline{N}(r,\infty;G) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r,0;F) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & N(r,0;G_1|k+1) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (m+k+2)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned} \tag{52}$$

Аналогично можно показать, что

$$(n+m+1)T(r,f) \leq (m+k+2)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{53}$$

Объединяя (52) и (53), получаем

$$(n+m+1)(T(r,f)+T(r,g)) \leq 2(m+k+2)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g),$$

$$[n-(m+2k+3)](T(r,f)+T(r,g)) \leq S(r,f) + S(r,g).$$

Что является противоречием, так как $n > m+2k+5$.

Снова если $m > k+1$, то ввиду леммы 5, (51) и второй основной теоремы Неванлинны имеем

$$\begin{aligned}
&(n+m+1)T(r,g) = T(r,G) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r, \frac{1}{1-B}; G) + \overline{N}(r,\infty;G) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r,0;F) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & N(r,0;G_1|k+1) + N(r,0;F_1|k+1) + S(r,f) + S(r,g) \leq \\
\leq\ & (2k+3)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned} \tag{54}$$

Аналогично можно показать, что

$$(n+m+1)T(r,f) \leq (2k+3)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g). \tag{55}$$

Совмещая (54) и (55), имеем

$$(n+m+1)(T(r,f)+T(r,g)) \leq 2(2k+3)(T(r,f)+T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [n-(4k-m+5)](T(r,f)+T(r,g)) \leq S(r,f) + S(r,g).$$

Что является противоречием, так как $n > 4k-m+5$.

2.2) Пусть $B \neq 0$ и $A \neq B$. Этот случай аналогичен подслучаю 2.2 теоремы 3.

2.3) Пусть $B = 0$ и $A \neq 0$. Тогда из (46) получаем $F = \frac{G+A-1}{A}$ и $G = AF - (A-1)$. Если $A \neq 1$, то имеем $\overline{N}\left(r, \frac{A-1}{A}; F\right) = \overline{N}(r,0;G)$ и $\overline{N}(r,1-A;G) = \overline{N}(r,0;F)$. Тогда ввиду леммы 12 получаем $n \leq m+2k+3$ или $n \leq 4k-m+5$, или $n \leq 2k+3$, что противоречит неравенствам $n > m+2k+5$ или $n > 4k-m+5$, или $n > 2k+5$ соответственно. Если $A=1$, то $F=G$, т.е.

$$[f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k)} = [g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g]^{(k)}.$$

Интегрируя один раз, получаем

$$[f^n(af+b)^m\Delta_\eta f]^{(k-1)} = [g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g]^{(k-1)} + c_{k-1},$$

где c_{k-1} — комплексная константа. Если $c_{k-1}\neq 0$, то ввиду леммы 12 находим $n\leq m+2k+3$ или $n\leq 4k-m+5$, или $n\leq 2k+3$, что противоречит неравенствам $n>m+2k+5$ или $n>4k-m+5$, или $n>2k+5$ соответственно. Значит, $c_{k-1}=0$. Повторяя этот процесс до k раз, получим

$$f^n(af+b)^m\Delta_\eta f = g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g. \tag{56}$$

2.3.1) Пусть $ab=0$.

Продолжая аналогично подподслучаю 2.3.1 теоремы 3, получим $f(z)=tg(z)$, где $t^{m+n+1}=1$, если t — константа, и $t^{m+n}=\dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$, если t — переменная, или же $f(z)=tg(z)$, где $t^{n+1}=1$, если t — константа, и $t^n=\dfrac{\Delta_\eta g}{\Delta_\eta tg}$, если t — переменная.

2.3.2) Пусть $ab\neq 0$.

Сначала предположим, что $f(z)=hg(z)$. Если h — константа, то $\Delta_\eta hg = h\Delta_\eta g$. Тогда из (56) получим

$$\begin{aligned}
&(hg)^n(ahg+b)^m\Delta_\eta hg = g^n(ag+b)^m\Delta_\eta g \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & a^m g^{m+n}\Delta_\eta g(h^{m+n+1}-1) + \binom{m}{1}a^{m-1}bg^{m+n-1}\Delta_\eta g(h^{m+n}-1)+\ldots+\\
+\quad & \binom{m}{i}a^{m-i}b^ig^{m+n-i}\Delta_\eta g(h^{m+n+1-i}-1)+\ldots+b^mg^n\Delta_\eta g(h^{n+1}-1)=0.
\end{aligned}$$

Откуда $h^\chi=1$, где $\chi=GCD\{m+n+1, m+n, \ldots, n+1\}$. Если h — переменная, то из (56) получим, что f и g удовлетворяют алгебраическому уравнению $R(f,g)=0$, где

$$R(\omega_1,\omega_2)=\omega_1^n(a\omega_1+b)^m\Delta_\eta\omega_1 - \omega_2^n(a\omega_2+b)^m\Delta_\eta\omega_2. \qquad \square$$

3. Открытые вопросы

Исходя из наших результатов мы можем предложить следующие задачи.

1. Возможно ли еще улучшить n в теоремах 3 и 4?
2. Возможно ли заменить трансцендентные целые функции в теоремах 3 и 4 трансцендентными мероморфными функциями?
3. Какие результаты получатся при замене постоянного общего значения на переменное общее значение?
4. Какие результаты получатся в случае $l(\geq 0)$-общего значения в теоремах 3 и 4?

Литература

[1] Hayman W.K. *Meromorphic functions* (Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964).

[2] Yang L. *Value distribution theory* (Springer-Verlag and Sci. Press, 1993).

[3] Yi H.X., Yang C.C. *Uniqueness theory of meromorphic functions* (Sci. Press, Beijing, 1995).

[4] Lahiri I. *Value distribution of certain differential polynomials*, Int. J. Math. Math. Sci. **28**, 83–91 (2001).

[5] Lahiri I. *Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions*, Complex Var. Theory Appl. **46**, 241–253 (2001).

[6] Zhang X.Y., Lin W.C. *Uniqueness and value-sharing of entire functions*, J. Math. Anal. Appl. **343**, 938–950 (2008).
[7] Banerjee A., Majumder S. *Uniqueness of certain type of differential-difference and difference polynomials*, Tamkang J. Math. **49** (1), 1–24 (2018).
[8] Yang C.C. *On deficiencies of differential polynomials*. II, Math. Z. **125**, 107–112 (1972).
[9] Zhang J.L., Yang L.Z. *Some results related to a conjecture of R. Brück*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **8**, article 18 (2007).
[10] Chiang Y.M., Feng S.J. *On the Nevanlinna characteristic $f(z+\eta)$ and difference equations in complex plane*, Ramanujan J. **16**, 105–129 (2008).

Абхиджит Шоу

Высшая школа Балагарха,
Балагарх, Хугли, Западная Бенгалия 712501, Индия,

e-mail: ashaw2912@gmail.com

A. Shaw

Uniqueness results for the difference operators using the conception of sharing value

Abstract. In this article we considered a difference-differential polynomial of a transcendental entire function and established in the first two theorems criteria for infinitely many solutions for such type of equation. In the 3rd and 4th theorems we introduced k-th order differentiation of a polynomial of a transcendental entire function and its difference operator, and developed some uniqueness results in different aspects using the conception of sharing value. We elaborated our results with some remarks and analysed the results in different aspects and conditions. The results generalize and improve previous results of Zhang–Lin and Benerjee–Majumder. We introduced some notes to draw the gravity of improvement and generalisation of the previous results.

Keywords: difference operator, sharing value, transcendental entire function, uniqueness.

Abhijit Shaw

Balagarh High School,
Balagarh, Hooghly, West Bengal-712501, India,

e-mail: ashaw2912@gmail.com