

П.С. СОЛОВЬЁВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Аннотация. Исследуется симметричная вариационная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве с конусом. Предложены и обоснованы новые достаточные условия на билинейные формы, гильбертово пространство и конус вариационной задачи, гарантирующие существование единственного нормированного положительного собственного элемента, соответствующего положительному простому минимальному собственному значению. Полученные абстрактные результаты иллюстрируются на примере обобщенной задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка.

Ключевые слова: собственное значение, собственный элемент, симметричная задача на собственные значения, гильбертово пространство, конус, самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор, принцип максимума, положительная собственная функция.

УДК: 519.63

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-77-84

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений приводят к вариационным задачам следующего вида: требуется найти число λ и ненулевой элемент u гильбертова пространства V , для которых справедливо вариационное тождество

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad (1)$$

при любом элементе v из пространства V , где a — положительно определенная ограниченная билинейная форма, b — вполне непрерывная билинейная форма. В конкретных приложениях в качестве пространства V выступает соответствующее пространство Соболева при решении дифференциального уравнения или прямое произведение пространств Соболева при решении системы дифференциальных уравнений.

Введем компактный оператор $T : V \rightarrow V$ по формуле $a(Tu, v) = b(u, v)$ для любых $u, v \in V$. Тогда вариационную задачу (1) можно представить в виде операторной задачи

$$Tu = \mu u, \quad (2)$$

где $\mu = 1/\lambda$ есть собственное значение оператора T , λ есть характеристическое значение оператора T .

Поступила в редакцию 02.07.2023, после доработки 28.08.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

В случае конечномерного пространства V операторная задача (2) сводится к матричной задаче на собственные значения. Матрица с положительными элементами определяет оператор, переводящий любой ненулевой элемент множества векторов K с неотрицательными координатами в элемент множества $\overset{\bullet}{K}$ векторов с положительными координатами. Теорема существования положительного собственного вектора для матрицы с положительными элементами впервые была установлена немецким математиком О. Перроном в 1907 г. [1]. В этой теореме утверждается, что существует единственный нормированный собственный вектор с положительными координатами, которому соответствует единственное максимальное по модулю положительное простое собственное значение.

Обобщение теоремы Перрона для неразложимых матриц с неотрицательными элементами получено немецким математиком Ф.Г. Фробениусом в 1912 г. [2]. Теорема Перрона для матриц с положительными элементами была перенесена учеником Фробениуса, немецким математиком Р. Йентчем, в 1912 г. [3] на интегральные уравнения следующего вида:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy \quad (3)$$

с положительным непрерывным ядром $K(x, y)$, $x, y \in \Omega = (a, b)$. В упрощенной форме теорема Йентча приводит к следующему результату. Интегральное уравнение (3) имеет только одну нормированную положительную на интервале Ω собственную функцию $u(x)$, соответствующую положительному простому характеристическому числу λ , которое является единственным наименьшим по модулю характеристическим значением. Заметим, что интегральное уравнение (3) можно рассматривать как операторное уравнение (2) с несамосопряженным компактным оператором T в банаховом пространстве V непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с конусом K неотрицательных на Ω функций и подмножеством $\overset{\bullet}{K}$ положительных на Ω функций. Оператор T является сильно положительным, т.е. переводит любой ненулевой элемент множества K в элемент множества $\overset{\bullet}{K}$. Заметим, что в данном случае конус K имеет внутренние элементы, т.е. является телесным, а множество $\overset{\bullet}{K}$ — это подмножество внутренних элементов конуса K .

В работах М.А. Рутмана и М.Г. Крейна [4], [5] теорема Йентча была обобщена на случай сильно положительного несамосопряженного компактного оператора T , действующего в банаховом пространстве V с телесным конусом K и подмножеством внутренних элементов $\overset{\bullet}{K}$. Здесь установлено, что существует единственный нормированный собственный элемент в $\overset{\bullet}{K}$ и соответствующее простое собственное значение, являющееся единственным наибольшим по модулю собственным значением оператора T . М.А. Рутман и М.Г. Крейн [4], [5] также установили существование хотя бы одного собственного элемента из конуса для компактного оператора, оставляющего инвариантным воспроизводящий конус и имеющего ненулевое собственное значение. В этом случае существует положительное собственное значение с максимальным модулем и, по крайней мере, один соответствующий собственный элемент из конуса.

В книге ([6], с. 400–409) приведено упрощенное изложение результатов [4], [5] для самосопряженного компактного оператора в гильбертовом пространстве.

Результаты работ [4], [5] усилены для положительного неразложимого компактного оператора T в банаховом пространстве V , являющемся банаховой решеткой ([7], с. 63). Здесь установлено, что спектральный радиус такого оператора положителен и совпадает с един-

ственным максимальным по модулю простым собственным значением, которому соответствует положительный собственный элемент из конуса K . Эти результаты позволяют интегральное уравнение (3) с положительным почти всюду на области $\Omega \times \Omega$ ядром $K(x, y)$ из пространства $L_2(\Omega \times \Omega)$ трактовать как задачу на собственные значения (2) для положительного неразложимого компактного оператора в банаховом пространстве $V = L_2(\Omega)$, являющемся банаховой решеткой. Заметим, что в данном случае конус K состоит из неотрицательных почти всюду на Ω функций, а множество $\dot{K}$ — это подмножество квазивнутренних элементов конуса K , включающее положительные почти всюду на Ω функции ([8], с. 78).

Дальнейшие обобщения приведенных известных результатов для исходной вариационной задачи (1) с приложениями к обобщенным решениям в пространствах Соболева натолкнулись на следующие трудности. Во-первых, в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ конус неотрицательных почти всюду на Ω функций не является телесным ([9], с. 22). Это не позволяет воспользоваться результатами в пространствах с телесным конусом [4], [5]. Во-вторых, пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ является векторной, но не банаховой решеткой ([10], с. 149). Поэтому невозможно также применить результаты в пространствах с банаховой решеткой ([7], с. 63) для обобщенных решений в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$.

Чтобы преодолеть возникшие трудности, в настоящей статье предложены и обоснованы новые достаточные условия на билинейные формы, гильбертово пространство и конус симметричной вариационной задачи на собственные значения (1), гарантирующие существование в конусе единственного нормированного собственного элемента, соответствующего положительному простому минимальному собственному значению. Этот результат является усилением результатов теоремы 6.1 ([5], с. 49) и теоремы 14.6.1 ([6], с. 400) для задачи (1). Полученные теоретические результаты иллюстрируются на примере обобщенной задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, V есть вещественное бесконечномерное гильбертово пространство, в котором определены скалярное произведение (u, v) и норма $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$, $u, v \in V$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

1) Пространство V является векторной решеткой с конусом положительных элементов K . При этом каждому элементу $v \in V$ поставлены в соответствие единственные элементы $v^+, v^-, |v| \in K$, $v = v^+ - v^-$, $|v| = v^+ + v^-$, v^+ — положительная часть элемента v , v^- — отрицательная часть элемента v , $|v|$ — модуль элемента v ([10], с. 146).

Определим симметричные билинейные формы $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям.

2) Билинейная форма a является положительно определенной и ограниченной, т.е. существуют положительные постоянные α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1\|v\|^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2\|v\|^2$ для любого элемента $v \in V$.

3) Билинейная форма b является положительной и вполне непрерывной, т.е. $b(v, v) > 0$ для $v \in V \setminus \{0\}$ и $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$ при $i \rightarrow \infty$ для $v_i \rightarrow v$ в V при $i \rightarrow \infty$. Здесь символ $\rightarrow$ обозначает слабую сходимость в гильбертовом пространстве V .

4) Выполняется неравенство $b(u, v) \geq 0$ для любых $u, v \in K$.

5) Справедливы соотношения $a(v^+, v^-) = b(v^+, v^-) = 0$ для любого $v \in V$.

6) Множество $\dot{K} = \{u : u \in K, b(u, v) > 0 \forall v \in K \setminus \{0\}\}$ не пусто.

7) Если $u \in K \setminus \{0\}$, $a(u, v) \geq 0$ для любого $v \in K$, то $u \in K^*$, где K^* — непустое подмножество множества K .

Сформулируем вариационную задачу на собственные значения

$$\lambda \in \mathbb{R}, u \in V \setminus \{0\} : \quad a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

Известно ([11], с. 98), что существуют конечнократные собственные значения λ_k , $k = 1, 2, \dots$, задачи (4), занумерованные с учетом кратности, причем $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Этим собственным значениям соответствуют собственные элементы u_k , $k = 1, 2, \dots$, $a(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Справедливо вариационное свойство

$$\lambda_1 = R(u_1) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(v), \quad (5)$$

где функционал Рэлея определяется соотношением $R(v) = a(v, v)/b(v, v)$ для любого элемента $v \in V \setminus \{0\}$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–7). Тогда минимальное собственное значение λ_1 задачи (4) является положительным простым и соответствует единственному нормированному положительному собственному элементу $|u_1| \in K^*$, причем других нормированных положительных собственных элементов в конусе K нет.

Доказательство. Согласно условиям 1) и 5) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} b(u_1, u_1) &= b(u_1^+ - u_1^-, u_1^+ - u_1^-) = b(u_1^+, u_1^+) + b(u_1^-, u_1^-) - 2b(u_1^+, u_1^-) = \\ &= b(u_1^+, u_1^+) + b(u_1^-, u_1^-) + 2b(u_1^+, u_1^-) = b(u_1^+ + u_1^-, u_1^+ + u_1^-) = b(|u_1|, |u_1|) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично получим $a(u_1, u_1) = a(|u_1|, |u_1|) = \lambda_1$. Поэтому из вариационного свойства (5) выводим, что на элементе $|u_1|$ достигается минимум функционала Рэлея, т. е.

$$\lambda_1 = R(u_1) = R(|u_1|) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(v).$$

Следовательно, элемент $|u_1| \in K$ является собственным элементом, соответствующим минимальному собственному значению λ_1 , и справедливо тождество

$$a(|u_1|, v) = \lambda_1 b(|u_1|, v) \quad \forall v \in V.$$

Отсюда с учетом свойства 4) получим соотношения

$$a(|u_1|, v) = \lambda_1 b(|u_1|, v) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

В силу предположения 7) выводим $|u_1| \in K^*$.

Пусть существуют два линейно независимых собственных элемента v_1 и v_2 , соответствующих минимальному собственному значению λ_1 . Тогда найдутся также собственные элементы $w_1 = |w_1|$ и $w_2 = |w_2|$ из K^* , соответствующие минимальному собственному значению λ_1 , $b(w_1, w_2) = b(|w_1|, |w_2|) = 0$, что противоречит неравенству $b(|w_1|, |w_2|) > 0$ для элементов $|w_1|, |w_2| \in K^*$. Таким образом, исходные собственные элементы v_1 и v_2 являются линейно зависимыми, а соответствующее собственное значение λ_1 является простым, и выполняется неравенство $\lambda_1 < \lambda_2$.

Предположим, что существует собственный элемент u_i , принадлежащий конусу K и соответствующий собственному значению λ_i при $\lambda_1 < \lambda_i$ для $i > 1$. Тогда в силу ортогональности получим соотношение $b(u_i, u_1) = b(u_i, |u_1|) = 0$, но это противоречит свойству билинейной

формы $b(u_i, |u_1|) > 0$ для элемента $|u_1| \in K^*$. В результате установлена единственность нормированного собственного элемента в конусе K . $\square$

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Обратимся к приложению абстрактных результатов теоремы 1 к обобщенной задаче на собственные значения для самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка: требуется найти числа λ и ненулевые функции $u(x), x \in \Omega$, такие, что

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) + a_0(x)u(x) &= \lambda b_0(x)u(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

где Ω есть открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной по Липшицу границей Γ ([12], с. 66), $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $x \in \Omega$, дифференциальной задачи (6) предполагаются заданными вещественными измеримыми существенно ограниченными функциями, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \leq \tilde{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}, \\ 0 &\leq a_0(x) \leq \tilde{\alpha}_2, \quad 0 < b_0(x) \leq \tilde{\beta}_2, \end{aligned} \quad (7)$$

с положительными постоянными $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\beta}_2$ при почти всех $x \in \Omega$.

Сформулируем обобщенную постановку дифференциальной задачи (6). Обозначим через $L_2(\Omega)$ вещественное пространство Лебега ([12] с. 22) с нормой

$$|v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

через $W_2^1(\Omega)$ обозначим вещественное пространство Соболева ([12], с. 44) с нормой

$$\|v\|_1 = (|v|_0^2 + |v|_1^2)^{1/2}, \quad |v|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Определим вещественное гильбертово пространство

$$V = \{v : v \in W_2^1(\Omega), v(x) = 0, x \in \Gamma\}$$

с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|_1$. Введем симметричные билинейные формы

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i v(x) + a_0(x)u(x)v(x) \right) dx, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} b_0(x)u(x)v(x) dx \end{aligned}$$

для произвольных функций $u, v \in V$. Обобщенная постановка дифференциальной задачи на собственные значения (6) приводит к следующей вариационной задаче на собственные значения:

$$\lambda \in \mathbb{R}, u \in V \setminus \{0\} : \quad a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (8)$$

Зададим конус K в пространстве V , состоящий из неотрицательных почти всюду в области Ω функций $v \in V$.

Через B будем обозначать открытый шар в $\mathbb{R}^n$.

Пусть G_1 и G_2 есть множества из $\mathbb{R}^n$. Множество G_1 называется строго вложенным в множество G_2 , если замыкание множества G_1 компактно и вложено в G_2 . При этом используется обозначение $G_1 \Subset G_2$.

Из определения множества $\overset{\bullet}{K}$ согласно свойству 6) выводим, что положительные почти всюду на Ω функции принадлежат множеству $\overset{\bullet}{K}$.

Введем множество $\overset{*}{K}$, состоящее из функций u множества $\overset{\bullet}{K}$, удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{ess.} \inf_{x \in B} u(x) > 0$$

для любого шара $B \Subset \Omega$. Функции из множества $\overset{*}{K}$ являются положительными почти всюду функциями, не приближающимися сколь угодно близко к нулю внутри области Ω .

Для задач вида (6) и (8) результат существования положительной собственной функции хорошо известен ([13], с. 204; [14]–[17]). В следующей теореме показано, что этот результат также является следствием общих результатов теоремы 1.

Теорема 2. *Минимальное собственное значение задачи (8) является положительным простым и соответствует единственной нормированной положительной почти всюду в области Ω собственной функции, принадлежащей множеству $\overset{*}{K}$, причем других нормированных положительных почти всюду в области Ω собственных функций нет.*

Доказательство. Проверим выполнение условий 1)–7) для задачи (8).

Условие 1) выполнено, так как пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ является векторной решеткой согласно ([10], с. 149; [18], с. 47; [19], с. 108).

Учитывая условия (7) на коэффициенты задачи (8) и компактность вложения пространства V в пространство $L_2(\Omega)$, убеждаемся в справедливости условий 2) и 3).

Условие 4) проверяется непосредственно с помощью определения билинейной формы b и условия (7) на коэффициенты задачи. Свойство 5) следует из ([18], с. 47).

Множества $\overset{\bullet}{K}$ и $\overset{*}{K}$ из условий 6) и 7) являются непустыми, так как множество $\overset{\bullet}{K}$ содержит непрерывную функцию из V , положительную почти всюду в Ω , а множество $\overset{*}{K}$ содержит непрерывную функцию из V , положительную всюду в Ω .

Условие 7) устанавливается с помощью сильного принципа максимума для дифференциального оператора задачи (6). Действительно, с помощью замены u на $-u$ из теоремы 8.19 ([13], с. 190) получим следующую формулировку сильного принципа максимума. Если $u \in W_2^1(\Omega)$, $a(u, v) \geq 0$ при произвольной функции $v \in K$, и для некоторого шара $B \Subset \Omega$ справедливо соотношение

$$\operatorname{ess.} \inf_{x \in B} u(x) = \operatorname{ess.} \inf_{x \in \Omega} u(x) \leq 0,$$

то функция u постоянна почти всюду в Ω .

Пусть теперь $u \in K \setminus \{0\}$, $a(u, v) \geq 0$ при произвольной функции $v \in K$. Тогда для любого шара $B \Subset \Omega$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ess. inf}_{x \in B} u(x) > 0.$$

Для доказательства этого неравенства предположим противное, т. е. существует шар $B \Subset \Omega$ такой, что

$$\operatorname{ess. inf}_{x \in B} u(x) = \operatorname{ess. inf}_{x \in \Omega} u(x) = 0.$$

Тогда согласно сильному принципу максимума функция u равна нулю почти всюду в Ω . Полученное противоречие устанавливает выполнение условия 7).

Таким образом, условия 1)–7) выполнены для задачи (8), и поэтому результат теоремы следует из теоремы 1. $\square$

Заметим, что результат теоремы 2 является усилением результатов работ ([13], с. 204, [14]–[17]) для задачи (8), поскольку в этих работах не доказана единственность положительной собственной функции в конусе K , а также установлена принадлежность собственной функции более широкому множеству $\overset{\bullet}{K}$, чем $\overset{*}{K}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Perron O. *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Annalen. **64** (1), 1–76 (1907).
- [2] Frobenius G. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, König. Akad. Wiss. Berlin. **23**, 456–477 (1912).
- [3] Jentzsch R. *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, J. Reine Angew. Math. **141**, 235–244 (1912).
- [4] Рутман М.А. *О вполне непрерывных линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторый конус*, Матем. сб. **50** (1), 77–96 (1940).
- [5] Крейн М.Г., Рутман М.А. *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*, УМН **3** (1(23)), 3–95 (1948).
- [6] Вулих Б.З. *Введение в функциональный анализ* (Наука, М., 1967).
- [7] Gazzola F., Grunau H.-C., Sweers G. *Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains* (Springer, Berlin, 2010).
- [8] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутцкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений* (Наука, М., 1969).
- [9] Вулих Б.З. *Введение в теорию конусов в нормированных пространствах* (Калинин. гос. ун-т, Калинин, 1977).
- [10] Bátkai A., Fijavž M.K., Rhoads A. *Positive operator semigroups. From finite to infinite dimensions* (Springer, Berlin, 2017).
- [11] Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных* (Высш. шк., М., 1977).
- [12] Adams R.A. *Sobolev spaces* (Acad. Press, New York, 1975).
- [13] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка* (Наука, М., 1989).
- [14] Coffman C.V., Duffin R.J., Mizel V.J. *Nonuniformly elliptic equations: positivity of weak solutions*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (2), 496–499 (1973).
- [15] Coffman C.V., Duffin R.J., Mizel V.J. *Positivity of weak solutions of non-uniformly elliptic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **104**, 209–238 (1975).
- [16] Coffman C.V., Marcus M.M., Mizel V.J. *On Green's function and eigenvalues of nonuniformly elliptic boundary value problems*, Math. Z. **182**, 321–326 (1983).
- [17] Trudinger N.S. *On the first eigenvalue of non-uniformly elliptic boundary value problems*, Math. Z. **174**, 227–232 (1980).
- [18] Киндерлерер Д., Стампакия Г. *Введение в вариационные неравенства и их приложения* (Мир, М., 1983).
- [19] Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей* (Наука, М., 1988).

Павел Сергеевич Соловьёв

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: pavel.solovev.kpfu@mail.ru

P.S. Solov'ev

Existence of positive solutions of symmetric variational eigenvalue problems

Abstract. A symmetric variational eigenvalue problem in the Hilbert space with a cone is investigated. New sufficient conditions on the bilinear forms, the Hilbert space, and the cone of the variational problem guaranteeing the existence of a unique normalized positive eigenelement corresponding to a positive simple minimal eigenvalue are proposed and justified. The obtained abstract results are illustrated by the example of the generalized eigenvalue problem for the second order self-adjoint elliptic differential operator.

Keywords: eigenvalue, eigenelement, symmetric eigenvalue problem, Hilbert space, cone, self-adjoint elliptic differential operator, maximum principle, positive eigenfunction.

Pavel Sergeevich Solov'ev

*Kazan Federal University,
18 Kremlevskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: pavel.solovev.kpfu@mail.ru