Известия вузов. Математика
2024, № 7, с. 63–76
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.И. КАДИЕВ, А.В. ПОНОСОВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОМЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. В работе изучается глобальная моментная устойчивость систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями. Анализ проведен модифицированным методом регуляризации, известном как W-метод и основанном на использовании некоторого вспомогательного уравнения с последующем применением теории положительно обратимых матриц. Предложены достаточные условия глобальной асимптотической моментной устойчивости как для достаточно общих, так и для конкретных систем уравнений Ито, сформулированные в терминах параметров этих систем. Установлена связь между этой устойчивостью и свойствами функций запаздывания.

Ключевые слова: системы стохастических дифференциальных уравнений, нелинейные уравнения Ито, устойчивость решений, асимптотика решений, метод вспомогательных уравнений, положительная обратимость матриц.

УДК: 517.929.4: 519.21

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-63-76

Введение

Начиная с конца XIX столетия проблемам асимптотического поведения решений систем дифференциальных уравнений и, в частности, задаче об устойчивости решений, посвящены многочисленные публикации. При этом анализу различных видов устойчивости решений нелинейных систем с последействием и случайными параметрами уделялось особое внимание как из-за многочисленных приложений, так и ввиду возникающих принципиальных и технических трудностей. Одной из таких трудностей является недостаточная практическая эффективность классических методов Ляпунова–Красовского–Разумихина, которыми, несмотря на их общность, обычно удается доказывать признаки устойчивости лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений с последействием [1]–[4]. Особенно трудно поддающимися анализу являются, с точки зрения этих методов, стохастические уравнения с неограниченными запаздываниями, которые только в исключительных случаях могут быть экспоненциально устойчивыми.

Конструктивной альтернативой классическим методам является метод регуляризации, так называемый “W–метод” Н.В. Азбелева [5], [6], где построение функционалов на пространствах траекторий решений заменяется поиском вспомогательных или “модельных” уравнений, используемых для перехода к интегральным уравнениям для последующей оценки их решений. В настоящей работе, которая является продолжением публикации [7], этот

Поступила в редакцию 18.05.2023, после доработки 06.06.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

метод применяется для анализа глобальной асимптотической моментной устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последействием. При этом, в отличие от [7], мы изучаем здесь асимптотическую устойчивость, не являющуюся экспоненциальной, и не предполагаем ограниченность запаздываний. Как отмечалось выше, в таких случаях поиск функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина сопряжен с серьезными, обычно непреодолимыми, техническими трудностями.

Основными результатами работы являются новые достаточные признаки глобальной асимптотической моментной устойчивости решений для многих классов стохастических и детерминированных систем с неограниченными запаздываниями, которые сформулированы в терминах параметров этих систем. Отметим, что один специальный класс линейных стохастических уравнений с неограниченными запаздываниями, так называемое “стохастическое уравнение пантографа”, был ранее исследован авторами классическим “W–методом” в работе [8].

1. Основные обозначения и объект исследования

Все случайные величины и все прогрессивно измеримые [1] стохастические процессы, рассматриваемые в статье, предполагаются определенными на фиксированном стохастическом базисе $\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Напомним, что Ω здесь — это множество всех элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий на Ω, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ — непрерывный справа неубывающий поток σ-подалгебр алгебры $\mathcal{F}$, P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$ и, как обычно, σ-алгебры предполагаются содержащими все множества нулевой меры. Математическое ожидание (интеграл по мере P) обозначается буквой E.

Основным объектом исследования является система нелинейных дифференциальных уравнений Ито с переменными запаздываниями

$$
\begin{aligned}
dx(t) = -\sum_{j=1}^{N} A^j(t)x(h_j(t))dt + F(t, x(h_1^0(t)), \dots, x(h_{m_0}^0(t)))dt + \\
+\sum_{i=1}^{m} G^i(t, x(h_1^i(t)), \dots, x(h_{m_i}^i(t)))d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geq 0),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\mathcal{B}_i,\ i = 1, \dots, m,$ — независимые стандартные винеровские процессы на интервале $[0, \infty)$. К системе (1) добавляются обычные начальные условия

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t < 0), \tag{1a}$$

$$x(0) = b, \tag{1b}$$

а под решением задачи (1)–(1b) понимается случайный процесс

$$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (-\infty < t < \infty),$$

являющийся прогрессивно измеримым на полуоси $[0, \infty)$ и почти наверное (п.н.) удовлетворяющий равенствам $x(\varsigma) = \varphi(\varsigma)$ $(\varsigma < 0)$, $x(0) = b$ и интегральной системе

$$
\begin{aligned}
x(t) = x(0) - \sum_{j=1}^{N} \int_0^t A^j(\varsigma)x(h_j(\varsigma))d\varsigma + \int_0^t F(\varsigma, x(h_1^0(\varsigma)), \dots, x(h_{m_0}^0(\varsigma)))d\varsigma + \\
+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t G^i(\varsigma, x(h_1^i(\varsigma)), \dots, x(h_{m_i}^i(\varsigma)))d\mathcal{B}_i(\varsigma) \quad (t \geq 0),
\end{aligned}
$$

где первые два интеграла понимаются в смысле Лебега, а третий — в смысле Ито.

Центральную роль в данной работе играют следующие пространства случайных величин и процессов:

- k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин;
- L^n — линейное пространство n-мерных, $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных процессов, заданных на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и п.н. имеющих ограниченные в существенном траектории;
- D^n — линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, \infty)$, траектории которых п.н. непрерывны;
- $k_q^n = \left\{\alpha : \alpha \in k^n, ||\alpha||_{k_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\right\}$;
- $L_q^n = \left\{\varphi : \varphi \in L^n, ||\varphi||_{L_q^n} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{vrai}\sup\limits_{\varsigma<0} (E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\right\}$;
- $M_q^\gamma = \left\{x : x \in D^n, ||x||_{M_q^\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\geq 0} (E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q} < \infty\right\}$ причем $M_q \stackrel{\text{def}}{=} M_q^1$.

В трех последних определениях пространств предполагается, что $q \in [1, \infty)$, а $\gamma : [0, \infty) \to R^1$ — некоторая положительная непрерывная функция.

Кроме того, в статье используются следующие обозначения: $|.|$ — фиксированная норма в R^n, $||.||$ — норма $n \times n$-матриц, согласованная с заданной нормой в R^n, E_n — единичная $n \times n$-матрица, e_n — n-мерный вектор-столбец, все элементы которого равны единице, μ — мера Лебега на интервале $[0, +\infty)$.

Наконец, в статье систематически применяется следующее правило: для заданного случайного процесса (в частности функции) $y(t)$ мы будем писать

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ y(t), & t \geq 0, \end{cases} \qquad \underline{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t < 0; \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \qquad \check{y}(t) = \begin{cases} 0, & y(t) < 0; \\ y(t), & y(t) \geq 0. \end{cases}$$

В дальнейшем используется следующая группа условий для коэффициентов системы (1) с начальными данными (1a), (1b).

Условие 1.

- $A^j = (a_{sl}^j)_{s,l=1}^n$ — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются прогрессивно измеримые (относительно стохастического базиса $\mathcal{T}$) скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы при всех $j = 1, \ldots, N$;
- $F(., u) = \operatorname{col}(F_1(., u_1, \ldots, u_{m_0}), \ldots, F_n(., u_1, \ldots, u_{m_0}))$ — прогрессивно измеримые n-мерные случайные процессы на интервале $[0, \infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями при всех $u \in R^{m_0}$, а $F(t, .)$ — $P \times \mu$-почти всюду непрерывные функции на R^{m_0}, причем $F(., 0) = 0$;
- при всех $i = 1, \ldots, m$ функции $G^i(., u) = \operatorname{col}(G_1^i(., u_1, \ldots, u_{m_i}), \ldots, G_n^i(., u_1, \ldots, u_{m_i}))$ $(u \in R^{m_i})$ являются прогрессивно измеримыми n-мерными случайными процессами на интервале $[0, \infty)$ с п.н. локально суммируемыми с квадратом траекториями, а $G^i(t, .)$ — $P \times \mu$-почти всюду непрерывными функциями на R^{m_i}, причем $G^i(., 0) = 0$;
- h_j, $j = 1, \ldots, N$, h_j^i, $i = 0, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$, — измеримые по Борелю функции, заданные на интервале $[0, \infty)$ и такие, что $h_j(t) \leq t$, $j = 1, \ldots, N$, $h_j^i(t) \leq t$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$ $(t \geq 0)$ μ-почти всюду;
- φ — $\mathcal{F}_0$-измеримый n-мерный случайный процесс на интервале $(-\infty, 0)$;
- b — $\mathcal{F}_0$-измеримая n-мерная случайная величина;
- для любых начальных условий (1a)–(1b), удовлетворяющих вышеперечисленным требованиям, существует единственное сильное глобальное решение задачи (1)–(1b),

т. е. решение, заданное на исходном стохастическом базисе и на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$.

Отметим, что конкретные условия существования и единственности (типа обобщенных условий Липшица) можно найти в работе [9].

Ниже единственное решение задачи (1)–(1b) обозначается $x(t,b,\varphi)$. Очевидно, что $x(.,b,\varphi)\in D^n$ на интервале $[0,\infty)$, а также что $x(t,b,\varphi)=\varphi(t)$ при $t<0$ и $x(0,b,\varphi)=b$ п.н. Отметим, что задача (1)–(1b) имеет тривиальное (т. е. нулевое) решение при нулевых начальных условиях (1a), (1b): это не ограничивает общности, но удобно технически.

Следующее унифицированное определение асимптотического поведения решений является центральным в настоящей статье.

Определение. Будем говорить, что система (1) M_q^{γ}-устойчива, если для всех решений $x(t,b,\varphi)$, $t\in(-\infty,\infty)$, задачи (1)–(1b), где $b\in k_q^n$, $\varphi\in L_q^n$, выполняется соотношение $x(.,b,\varphi)|_{[0,\infty)}\in M_q^{\gamma}$, а также неравенство

$$\|x(.,b,\varphi)|_{[0,\infty)}\|_{M_q^{\gamma}}\le c\left(\|b\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}\right)$$

для некоторого положительного числа c.

Отметим, что M_q^{γ}-устойчивость системы (1) тесно связана с различными видами глобальной моментной устойчивости по Ляпунову ("q-устойчивости по начальным данным φ и b") этой же системы. Например, M_q^{γ}-устойчивая система (1) будет глобально q-устойчивой, если $\gamma(t)=1$ $(t\ge 0)$, глобально асимптотически q-устойчивой, если $\gamma(t)\ge\delta>0$ $(t\ge 0)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$, и глобально экспоненциально q-устойчивой, если $\gamma(t)=\exp\{\lambda t\}$ $(t\ge 0$, $\lambda>0)$. Формальные определения всех этих видов устойчивости по Ляпунову, которые мы здесь опускаем, содержится в работе [7].

2. Метод регуляризации (модифицированный W-метод)

Как было отмечено ранее, W-метод начинается с выбора вспомогательной ("модельной") системы, обычно линейной. Поэтому, наряду с системой (1), рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами вида

$$d\hat{x}(t)=(-B(t)\hat{x}(t)+f_0(t))dt+\sum_{i=1}^{n}f_i(t)d\mathcal{B}_i(t)\quad(t\ge 0),\tag{2}$$

где $\hat{x}=\operatorname{col}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ — неизвестный n-мерный случайный процесс на интервале $(-\infty,\infty)$, $B(t)$ — $n\times n$-матрица, элементами которой являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями, а $f_0(t)$, $f_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ — n-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми и локально суммируемыми с квадратом траекториями соответственно.

Лемма 1. *Для решения $\hat{x}(t)$ системы (2) имеет место представление*

$$\hat{x}(t)=\hat{X}(t)\hat{x}(0)+\int\limits_0^t\hat{X}(t,\varsigma)f_0(\varsigma)d\varsigma+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\hat{X}(t,\varsigma)f_i(\varsigma)d\mathcal{B}_i(\varsigma)\quad(t\ge 0),$$

где $\hat{X}(t,\varsigma)$ $(t\ge 0,\ 0\le\varsigma\le t)$ — $n\times n$-матрица, столбцы которой являются решениями системы $d\hat{x}(t)=B(t)\hat{x}(t)dt$ $(t\ge 0)$, причем $\hat{X}(t,t)=\bar{E}$ $(t\ge 0)$, а $\hat{X}(t)\overset{\text{def}}{=}\hat{X}(t,0)$.

Справедливость леммы следует из известных формул представления решений для линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений.

Для применения W-метода необходимо специальное представление решений $x(t)=x(t,b,\varphi)$ задачи (1)–(1b). Положим $x(t) = \overline{x}(t)+\underline{\varphi}(t)$, $t \in (-\infty,\infty)$, где $\overline{x}(t)$ и $\underline{\varphi}(t)$ определены в соответствии с обозначениями из раздела 1. Используя вспомогательную систему (2) и лемму 1, перепишем задачу (1)–(1b) в следующем эквивалентном виде, где неизвестный n-мерный случайный процесс $\overline{x}(t)$ заменяет процесс $x(t)$:

$$\overline{x}(t) = \hat{X}(t)b + (\Theta(\overline{x}+\underline{\varphi}))(t) \quad (t \geq 0), \tag{3}$$

где

$$(\Theta(\overline{x}+\underline{\varphi}))(t) = \int\limits_0^t \hat{X}(t,\varsigma)\left[B(\varsigma)\overline{x}(\varsigma) - \sum_{j=1}^{N} A^j(\varsigma)(\overline{x}(h_j(\varsigma)) + \underline{\varphi}(h_j(\varsigma)))\right] d\varsigma +$$
$$+ \int\limits_0^t \hat{X}(t,\varsigma)F(\varsigma, \bar{x}(h_1^0(\varsigma)) + \underline{\varphi}(h_1^0(\varsigma)), \ldots, \bar{x}(h_{m_0}^0(\varsigma)) + \underline{\varphi}(h_{m_0}^0(\varsigma)))d\varsigma +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \hat{X}(t,\varsigma)G^i(\varsigma, \overline{x}(h_1^i(\varsigma)) + \underline{\varphi}(h_1^i(\varsigma)), \ldots, \bar{x}(h_{m_i}^i(\varsigma)) + \underline{\varphi}(h_{m_i}^i(s)))d\mathcal{B}_i(\varsigma).$$

Для формулировки основных результатов этого раздела необходимы дополнительные обозначения.

Во-первых, если $z(t)$ — какой-нибудь прогрессивно измеримый случайный процесс с непрерывными траекториями, а $\eta(t)$ $(t \geq 0,\ 0 \leq \eta \leq \infty)$ — некоторый момент остановки, то через $z^\eta(t)$ мы обозначим прогрессивно измеримый случайный процесс $z(t\wedge\eta)$, где $t\wedge\eta \equiv \min\{t;\eta\}$, который также имеет непрерывные траектории (см. например, [3]). Напомним, что момент остановки на стохастическом базисе $\mathcal{T}$ — это случайная величина $\eta : \ \Omega \to [0,\infty]$, для которой множество $\omega \in \Omega : \ \eta(\omega) \leq t$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым для всех $t \geq 0$.

Во-вторых, если $\overline{x}(t) = \mathrm{col}(\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t))$ и $1 \leq q < \infty$, то положим

- $\overline{x}(q,\gamma) = \mathrm{col}(\bar{x}_1(q,\gamma),\ldots,\overline{x}_n(q,\gamma))$, где $\overline{x}_i(q,\gamma) = \sup\limits_{t\geq 0}\left(E|\gamma(t)\overline{x}_i(t)|^q\right)^{1/q}$ при $i=1,\ldots,n$;
- $\overline{x}^\eta(q,\gamma) = \mathrm{col}(\bar{x}_1^\eta(q,\gamma),\ldots,\overline{x}_n^\eta(q,\gamma))$, где $\overline{x}_i^\eta(q,\gamma) = \sup\limits_{t\geq 0}\left(E|\gamma(t)\overline{x}_i^\eta(t)|^q\right)^{1/q}$ при $i=1,\ldots,n$, где $0 \leq \eta \leq \infty$ — некоторый момент остановки.

Тогда согласно работе [7] имеет место

Теорема 1. *Пусть $1 \leq q < \infty$ и выполнено условие 1. Предположим, что существуют положительная непрерывная функция $\gamma : [0,\infty) \to R^1$, вспомогательная система (2), а также $n\times n$-матрица C и неотрицательное число c такие, что при любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и любого момента остановки $0 \leq \eta \leq \infty$ справедливо векторное неравенство*

$$E_n\overline{x}^\eta(q,\gamma) \leq C\overline{x}^\eta(q,\gamma) + c\big(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}\big)e_n. \tag{4}$$

Тогда система (1) будет M_q^γ-устойчивой, если матрица $(E_n - C)$ является положительно обратимой.

Различные условия положительной обратимости матриц можно найти в монографии [10]. Они также перечислены в статье [7]. Отметим, что неравенства типа (4) получаются с помощью покомпонентного оценивания решений интегрального уравнения (3), и эта процедура часто дает более точные признаки устойчивости по сравнению с классической версией W-метода, основанной на оценке норм операторов [5].

Для применения теоремы 1 к системе (1) с целью получения конкретных признаков M_q^γ-устойчивости этой системы в терминах ее параметров необходимо сформулировать группу дополнительных условий, которые основаны на верхних и нижних оценках коэффициентов системы. Для удобства мы примем следующее соглашение: для верхних оценок величин будет использован знак $\tilde{}$, а для оценок снизу – знак $'$.

Условие 2.

- $\gamma(t) = \exp\left\{\lambda \int\limits_0^t \xi(s)ds\right\}$ $(t \geq 0)$, где λ — некоторое положительное число, а ξ — некоторая положительная, локально суммируемая на полуоси $[0,\infty)$ функция;
- существуют неотрицательные числа τ_j, τ_j', $j = 1,\dots,N$, τ_{ij}, τ_{ij}', $i = 0,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, такие, что $\int\limits_{\check{h}_j(t)}^t \xi(s)ds \leq \tau_j$ $(t \geq 0)$, $h_j(t) \geq -\tau_j'$ $(t \geq 0)$ μ-почти всюду при $j = 1,\dots,N$, $\int\limits_{\check{h}_j^i(t)}^t \xi(s)ds \leq \tau_{ij}$ $(t \geq 0)$, $h_j^i(t) \geq -\tau_{ij}'$ $(t \geq 0)$ μ-почти всюду при $i = 0,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$;
- существуют неотрицательные числа $\tilde{F}_{sl}^j$, $j = 1,\dots,m_0$, $s,l = 1,\dots,n$, такие, что
$$|F_s(t,u_1,\dots,u_{m_0})| \leq \sum_{j=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n} \tilde{F}_{sl}^j \big|u_j^l\big| \xi(t), \quad s = 1,\dots,n,\ t \geq 0,\ P \times \mu\text{-почти всюду;}$$
- существуют неотрицательные числа $\tilde{G}_{sl}^{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, $s,l = 1,\dots,n$, такие, что $|G_s^i(t,u_1,\dots,u_{m_i})| \leq \sum\limits_{j=1}^{m_i}\sum\limits_{l=1}^{n} \tilde{G}_{sl}^{ij}\big|u_j^l\big|(\xi(t))^{1/2}$, $s = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,m$, $t \geq 0$, $P \times \mu$-почти всюду;
- существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1,\dots,N\}$ $(s = 1,\dots,n)$, положительные числа λ_s, $s = 1,\dots,n$, и неотрицательные числа $\tilde{a}_{sl}^j$, $j = 1,\dots,N$, $s,l = 1,\dots,n$, такие, что
$$\sum_{j\in I_s} a_{ss}^j(t) \geq \lambda_s \xi(t),\ s = 1,\dots,n,\ \big|a_{sl}^j(t)\big| \leq \tilde{a}_{sl}^j \xi(t),\ j = 1,\dots,N,\ s,l = 1,\dots,n,\ t \geq 0,$$
$P \times \mu$-почти всюду.

В некоторых оценках также используются константы c_p из следующего неравенства:
$$\left(E\left|\int\limits_0^t f(\varsigma)d\mathcal{B}(\varsigma)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq c_p\left(E\left(\int\limits_0^t |f(\varsigma)|^2 d\varsigma\right)^p\right)^{1/(2p)}, \tag{5}$$
где $f(\varsigma)$ — произвольный скалярный прогрессивно измеримый процесс на $[0,t]$. Отметим, что c_p зависит только от $p \geq 1$, но не от $f(\varsigma)$ и t. Справедливость неравенства (5) следует из неравенства (4), приведенного в ([11], с. 65). Точное значение константы известно, например, для $p = 1$: $c_p = 1$. В остальных случаях может помочь оценка $c_p = 2\sqrt{12}p$.

В следующей теореме M_{2p}^{γ}-устойчивость системы (1) формулируется в терминах $n\times n$-матрицы C, элементы которой вычисляются следующим образом:

$$c_{ss}=\frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s}\tilde a_{ss}^j\tau_j\left(\sum_{j=1}^N\tilde a_{ss}^j+\tilde F_{ss}+\frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde G_{ss}\right)+\sum_{j=1,j\notin I_s}^N\tilde a_{ss}^j+\tilde F_{ss}\right]+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde G_{ss},\quad s=1,\dots,n,$$

$$c_{sl}=\frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s}\tilde a_{ss}^j\tau_j\left(\sum_{j=1}^N\tilde a_{sl}^j+\tilde F_{sl}+\frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde G_{sl}\right)+\sum_{j=1}^N\tilde a_{sl}^j+\tilde F_{sl}\right]+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde G_{sl},\ \ s,l=1,\dots,n,\ s\neq l,$$

где

$$\tilde F_{sl}=\sum_{j=1}^{m_0}\tilde F_{sl}^j,\quad \tilde G_{sl}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\tilde G_{sl}^{ij},\quad s,l=1,\dots,n.$$

Теорема 2. *Пусть $1\le p<\infty$ и выполнены условия 1, 2. Если при этом матрица (E_n-C) является положительно обратимой, то система (1) будет M_{2p}^{γ}-устойчивой для некоторого $0<\lambda<\min\{\lambda_s,s=1,\dots,n\}$.*

Доказательство теоремы 2 идентично доказательству теоремы 3 из [7], где, правда, предполагалось, что $\xi=1$ (см. условие 2). Можно, однако, проследить, что это доказательство проходит и для случая произвольной функции ξ из условия 2. Для этого, как и в доказательстве теоремы 3 из [7], необходимо воспользоваться теоремой 1, где $q=2p$, а

$$\gamma(t)=\exp\left\{\lambda\int_0^t\xi(s)ds\right\}\ (t\ge 0),\quad 0<\lambda<\min\{\lambda_s,s=1,\dots,n\}.$$

При этом во вспомогательной системе (2) в качестве $B(t)$ надо взять диагональную матрицу с диагональными элементами $\sum\limits_{j\in I_s}a_{ss}^j(t)$, $s=1,\dots,n$, так, что матрица $\hat X(t,\varsigma)$ $(t\ge 0,$ $0\le\varsigma\le t)$ также будет диагональной с диагональными элементами

$$\hat x_s(t,\varsigma)=\exp\left\{-\int_\varsigma^t\sum_{j\in I_s}a_{ss}^j(\varsigma)d\varsigma\right\},\quad t\ge 0,\quad 0\le\varsigma\le t,\quad s=1,\dots,n.$$

Тогда систему (3) можно записать в виде

$$\bar x_s(t)=\hat x_s(t,0)b_s+\sum_{j\in I_s}\int_0^t\hat x_s(t,\varsigma)a_{ss}^j(\varsigma)\int_{h_j(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar x_s(\zeta)-$$

$$-\sum_{j=1}^N\sum_{(l=1,\,l\neq s,\,j\in I_s)}^n\int_0^t\hat x_s(t,\varsigma)a_{sl}^j(\varsigma)\bar x_l(h_j(\varsigma))d\varsigma-\sum_{j=1}^N\sum_{l=1}^n\int_0^t\hat x_s(t,\varsigma)a_{sl}^j(\varsigma)\chi_j(\varsigma)\bar\varphi_l(h_j(\varsigma))d\varsigma+$$

$$+\int_0^t\hat x_s(t,\varsigma)F_s(\varsigma,\bar x(h_1^0(\varsigma))+\chi_{01}(\varsigma)\bar\varphi(h_1^0(\varsigma)),\dots,\bar x(h_{m_0}^0(\varsigma))+\chi_{0m_0}(\varsigma)\bar\varphi(h_{m_0}^0(\varsigma)))d\varsigma+$$

$$+\sum_{i=1}^m\int_0^t\hat x_s(t,\varsigma)G_s^i(\varsigma,\bar x(h_1^i(\varsigma))+\chi_{i1}(\varsigma)\bar\varphi(h_1^i(\varsigma)),\dots,\bar x(h_{m_i}^i(\varsigma))+\chi_{im_i}(\varsigma)\bar\varphi(h_{m_i}^i(\varsigma)))d\mathcal{B}_i(\varsigma),$$

$$s = 1, \dots, n,$$

где $\chi_j(\varsigma)$ $(\varsigma \geq 0)$ — характеристическая функция отрезка $[0, \tau'_j]$, $j = 1, \dots, N$, а $\chi_{ij}(\varsigma)$ $(\varsigma \geq 0)$ — характеристическая функция отрезка $[0, \tau'_{ij}]$, $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$.

Используя это представление и условия теоремы 2, конкретный вид векторного неравенства (4) можно получить, повторяя доказательство теоремы 3 из [7].

3. Теорема об асимптотической устойчивости для случая неограниченных запаздываний

В этом разделе теорема 2 используется для анализа проблемы асимптотической устойчивости моментов решений системы (1) $2p$-го порядка, $1 \leq p < \infty$. Как уже отмечалось, в работе [7] изучалась экспоненциальная моментная устойчивость, что соответствовало случаю $\xi(t) = 1, t \geq 0$. Но это потребовало, как и в детерминированном случае, ограниченности всех запаздываний: $t - h_j(t) \leq \sigma_j$ $(t \geq 0)$, μ-почти всюду при $j = 1, \dots, N$, $t - h^i_j(t) \leq \sigma_{ij}$ $(t \geq 0)$, μ-почти всюду при $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, где σ_j, $j = 1, \dots, N$, и σ_{ij}, $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, — некоторые неотрицательные числа. Если же запаздывания не предполагаются ограниченными, то экспоненциальная устойчивость обычно не имеет места, и тогда поведение решений на ∞ может быть более сложным. Именно поэтому фунцкцию ξ в теореме 2 приходится предполагать отличной от константы.

Ниже мы рассматриваем важный частный случай асимптотической моментной устойчивости — полиномиальную моментную устойчивость. Для этого положим $\xi(t) = (1 + t)^{-1}$, $t \geq 0$, так, что весовая функция будет равна $\gamma(t) = (1+t)^{\lambda}, t \geq 0$, что как раз и соответствует полиномиальной асимптотической устойчивости с (пока неопределенным) показателем $\lambda > 0$, который зависит как от коэффициентов системы (1), так и от поведения функций запаздывания. Действительно, в этом случае, очевидно, выполнены условия $\gamma(t) \geq \delta > 0$ $(t \geq 0)$ (δ можно взять равным единице) и $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty$, что как раз и дает асимптотическую моментную устойчивость.

Для проверки второго условия из условия 2 необходима

Лемма 2. *Пусть h — измеримая по Борелю функция, заданная на интервале $[0, \infty)$ и μ-почти всюду удовлетворяющая неравенствам $\alpha t - \beta \leq h(t) \leq t$ $(t \geq 0)$ для некоторых действительных чисел α, β таких, что $0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 0$. Тогда существуют неотрицательные числа τ, τ', для которых $h(t) \geq -\tau'$ $(t \geq 0)$ и $\ln((1 + t)/(1 + \check{h}(t))) \leq \tau$ $(t \geq 0)$ μ-почти всюду.*

Доказательство. Для проверки неравенства $h(t) \geq -\tau'$ $(t \geq 0)$ μ-почти всюду достаточно взять $\tau' = \beta$. Перейдем к доказательству второго неравенства.

Заметим, прежде всего, что логарифм выражения $(1 + t)/(1 + \check{h}(t))$ определен, так как $\check{h}(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Кроме того, $\sup\limits_{0 \leq t \leq \beta/\alpha} ((1 + t)/(1 + \check{h}(t))) \leq \sup\limits_{0 \leq t \leq \beta/\alpha} (1 + t) = 1 + \beta/\alpha$. Поэтому

$$\sup_{t \geq 0} ((1 + t)/(1 + \check{h}(t))) = \max\left\{ \sup_{0 \leq t \leq \beta/\alpha} ((1 + t)/(1 + \check{h}(t))), \sup_{t \geq \beta/\alpha} ((1 + t)/(1 + \check{h}(t))) \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ 1 + \beta/\alpha, \sup_{t \geq \beta/\alpha} ((1 + t)/(1 + \alpha t - \beta)) \right\}.$$

Производная функции $(1 + t)/(1 + \alpha t - \beta)$ равна $(1 - \alpha - \beta)/(1 + \alpha t - \beta)^2$, т. е. она отрицательна, если $1 - \alpha < \beta$, и неотрицательна, если $1 - \alpha \geq \beta$. В первом случае функция будет иметь минимум в точке $t=\beta/\alpha$, т. е. $\sup\limits_{t\geq\beta/\alpha}((1+t)/(1+\alpha t-\beta))\leq 1+\beta/\alpha$, а во втором случае она будет ограничена своим пределом на ∞, т. е. $\sup\limits_{t\geq\beta/\alpha}((1+t)/(1+\alpha t-\beta))\leq 1/\alpha$. Следовательно, $\sup\limits_{t\geq 0}((1+t)/(1+\check{h}(t)))\leq 1+\beta/\alpha$ при $1-\alpha<\beta$ и $\sup\limits_{t\geq 0}((1+t)/(1+\check{h}(t)))\leq \max\{1+\beta/\alpha,1/\alpha\}$ при $1-\alpha\geq\beta$. Поэтому в качестве числа τ можно взять $\ln(1+\beta/\alpha)$, если $1-\alpha<\beta$, и $\ln(\max\{1+\beta/\alpha,1/\alpha\})$, если $1-\alpha\geq\beta$. $\square$

В следующем результате требуется выполнение третьей группы условий для системы (1).

Условие 3.

- $\alpha_j t-\beta_j\leq h_j(t)\leq t$ $(t\geq 0)$, μ-почти всюду $(j=1,\dots,N)$, $\alpha^i_j t-\beta^i_j\leq h^i_j(t)\leq t$ $(t\geq 0)$ μ-почти всюду $(i=0,\dots,m,\ j=1,\dots,m_i)$, где константы $\alpha_j,\beta_j,\alpha^i_j,\beta^i_j$ удовлетворяют неравенствам $0<\alpha_j\leq 1,\ \beta_j\geq 0$ при $j=1,\dots,N,\ 0<\alpha^i_j\leq 1,\ \beta^i_j\geq 0$ при $i=0,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m_i$;
- существуют неотрицательные числа $\tilde{F}^j_{sl}$, $j=1,\dots,m_0$, $s,l=1,\dots,n$, такие, что
$$|F_s(t,u_1,\dots,u_{m_0})|\leq\sum_{j=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n}\tilde{F}^j_{sl}|u^l_j|(1+t)^{-1},\quad s=1,\dots,n,\ t\geq 0,\ P\times\mu\text{-почти всюду;}$$
- существуют неотрицательные числа $\tilde{G}^{ij}_{sl}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,m_i$, $s,l=1,\dots,n$, такие, что
$$|G^i_s(t,u_1,\dots,u_{m_i})|\leq\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{l=1}^{n}\tilde{G}^{ij}_{sl}|u^l_j|(1+t)^{-1/2},\ s=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m,\ t\geq 0,$$
$P\times\mu$-почти всюду;
- существуют подмножества индексов $I_s\subset\{1,\dots,N\}$ $(s=1,\dots,n)$, положительные числа λ_s, $s=1,\dots,n$, и неотрицательные числа $\tilde{a}^j_{sl}$, $j=1,\dots,N$, $s,l=1,\dots,n$, такие, что
$$\sum_{j\in I_s}a^j_{ss}(t)\geq\lambda_s(1+t)^{-1},\ s=1,\dots,n,$$
$$|a^j_{sl}(t)|\leq\tilde{a}^j_{sl}(1+t)^{-1},\ j=1,\dots,N,\ s,l=1,\dots,n,\ t\geq 0,$$
$P\times\mu$-почти всюду.

Определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:
$$c_{ss}=\frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s}\tilde{a}^j_{ss}\tau_j\left(\sum_{j=1}^{N}\tilde{a}^j_{ss}+\tilde{F}_{ss}+\frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{G}_{ss}\right)+\sum_{j=1,j\notin I_s}^{N}\tilde{a}^j_{ss}+\tilde{F}_{ss}\right]+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{G}_{ss},\quad s=1,\dots,n,$$
$$c_{sl}=\frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s}\tilde{a}^j_{ss}\tau_j\left(\sum_{j=1}^{N}\tilde{a}^j_{sl}+\tilde{F}_{sl}+\frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{G}_{sl}\right)+\sum_{j=1}^{N}\tilde{a}^j_{sl}+\tilde{F}_{sl}\right]+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{G}_{sl},\ \ s,l=1,\dots,n,\ s\neq l,$$
где $\tilde{F}_{sl}=\sum\limits_{j=1}^{m_0}\tilde{F}^j_{sl}$, $\quad\tilde{G}_{sl}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\tilde{G}^{ij}_{sl}$, $\quad s,l=1,\dots,n$, $\tau_j=\ln(1+\beta_j/\alpha_j)$ при $1-\alpha_j<\beta_j$,$\tau_j=\ln(\max\{1+\beta_j/\alpha_j,1/\alpha_j\})$ при $1-\alpha_j\geq\beta_j$ для $j\in J$.

Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и выполнены условия* 1, 3. *Если при этом матрица* $(E_n - C)$ *является положительно обратимой, то система* (1) *будет* M_{2p}^{γ}*-устойчивой, где* $\gamma(t) = (1+t)^{\lambda}$ *для некоторого* $0 < \lambda < \min\{\lambda_s, s = 1, \ldots, n\}$.

Теорема вытекает непосредственно из теоремы 2 с функцией $\xi(t) = (1+t)^{-1}$ $(t \ge 0)$, поскольку условие 3 следует из условия 2, если применить лемму 2 к функциям $h_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$, и $h_j^i(t)$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$. Кроме того, конкретные значения констант $\tau_j, j \in J$, входящих в матрицу C, получены в доказательстве леммы 2.

Замечание 1. Теоремы 2, 3 показывают, как именно W-метод можно использовать для получения условий глобальной асимптотической $2p$-устойчивости стохастических нелинейных систем типа системы (1), когда экспоненциальная устойчивость отсутствует из-за неограниченности запаздываний. Более того, этот метод позволяет определить конкретный тип асимптотики моментов решений, например, полиномиальную асимптотику $(1+t)^{-\lambda}$ при $t \to +\infty$, как в теореме 3.

4. Некоторые примеры

В этом разделе иллюстрируются утверждения двух предыдущих разделов.

Пример 1. Рассмотрим линейную детерминированную систему с линейными запаздываниями. Для этого предположим, что в системе (1) $F_i = G_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $h_j(t) = \alpha_j t - \beta_j$ $(t \ge 0,\ j = 1, \ldots, N)$, где $0 < \alpha_j \le 1,\ \beta_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, N$. Пусть также $A^j(t)$, $t \ge 0,\ j = 1, \ldots, N$, являются измеримыми локально суммируемыми функциями и существуют подмножества индексов $I_s \subset \{1, \ldots, N\}, s = 1, \ldots, n$, а также положительные числа $\lambda_s,\ s = 1, \ldots, n$, и неотрицательные числа $a_{sl}^1,\ s, l = 1, \ldots, n$, для которых при $t \ge 0$ имеют место неравенства

$$\sum_{j \in I_s} a_{ss}^j(t) \ge \lambda_s (1+t)^{-1},\ s = 1, \ldots, n,$$

$$|a_{sl}^j(t)| \le \tilde{a}_{sl}^j (1+t)^{-1},\ j = 1, \ldots, N,\ s, l = 1, \ldots, n,\ t \ge 0,$$

μ-почти всюду. Определим $n \times n$-матрицу C, задавая ее элементы следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \tilde{a}_{ss}^j \tau_j \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{ss}^j + \sum_{j=1, j \notin I_s}^{N} \tilde{a}_{ss}^j \right],\quad s = 1, \ldots, n,$$

$$c_{sl} = \frac{1}{\lambda_s} \left[\sum_{j \in I_s} \tilde{a}_{ss}^j \tau_j \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{sl}^j + \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{sl}^j \right],\quad s, l = 1, \ldots, n,\ s \ne l,$$

где $\tau_j = \ln(1 + \beta_j/\alpha_j)$ при $1 - \alpha_j < \beta_j$,$\tau_j = \ln(\max\{1 + \beta_j/\alpha_j, 1/\alpha_j\})$ при $1 - \alpha_j \ge \beta_j$ для $j \in J$.

В силу теоремы 3 справедливо

Утверждение 1. *Пусть выполнены все предыдущие условия для системы* (1). *Если при этом матрица* $(E_n - C)$ *является положительно обратимой, то решения системы* (1) *с неслучайными начальными данными стремятся к нулю при* $t \to +\infty$*, причем не медленнее функции* $(1+t)^{-\lambda}$ *для некоторого* $0 < \lambda < \min\{\lambda_s, s = 1, \ldots, n\}$.

Замечание 2. Хотя детерминированные линейные уравнения с последействием не являются основным объектом настоящей статьи, мы приводим признак асимптотической устойчивости для таких уравнений, так как он ранее, по-видимому, не встречался в литературе.

Пример 2. Пусть $1 \le p < \infty$. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями вида

$$dx(t) = -\sum_{j=1}^{N} A^j(t)x(\alpha_j t - \beta_j)dt + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A^{ij}(t)x(\alpha_j^i t - \beta_j^i)d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \ge 0), \tag{6}$$

где $A^j(t) = \left(a_{sl}^j(t)\right)_{s,l=1}^n$, $j = 1,\dots,N$, — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы, $A^{ij} = \left(a_{sl}^{ij}\right)_{s,l=1}^n$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, причем траектории последних п.н. локально суммируемы с квадратом, $0 < \alpha_j \ge 1$, $\beta_j \ge 0$, $j = 1,\dots,N$, $0 < \alpha_j^i \ge 1$, $\beta_j^i \ge 0$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$.

Пусть существуют неотрицательные числа $\tilde{a}_{sl}^{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,m_i$, $s,l = 1,\dots,n$, $\tilde{a}_{sl}^j$, $j = 1,\dots,N$, $s,l = 1,\dots,n$, положительные числа λ_s, $s = 1,\dots,n$, и подмножества индексов $I_s \subset \{1,\dots,N\}$ $(s = 1,\dots,n)$ такие, что

$$\left|a_{sl}^{ij}\right| \le \tilde{a}_{sl}^{ij}(1+t)^{-1/2},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,m_i,\ s,l = 1,\dots,n,$$

$$\left|a_{sl}^{j}(t)\right| \le \tilde{a}_{sl}^{j}(1+t)^{-1},\ j = 1,\dots,N,\ s,l = 1,\dots,n,$$

$$\sum_{j\in I_s} a_{ss}^j(t) \ge \lambda_s(1+t)^{-1},\ s = 1,\dots,n,\ t \ge 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду, а элементы $n \times n$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s} \tilde{a}_{ss}^j \tau_j \left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{ss}^j + \frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{A}_{ss}\right) + \sum_{j=1, j\notin I_s}^{N} \tilde{a}_{ss}^j\right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{A}_{ss}, \quad s = 1,\dots,n,$$

$$c_{sl} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j\in I_s} \tilde{a}_{ss}^j \tau_j \left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{sl}^j + \frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{A}_{sl}\right) + \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_{sl}^j\right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{A}_{sl}, \quad s,l = 1,\dots,n,\ s \ne l,$$

где $\tilde{A}_{sl} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \tilde{a}_{sl}^{ij}$, $s,l = 1,\dots,n$, $\tau_j = \ln(1 + \beta_j/\alpha_j)$ при $1 - \alpha_j < \beta_j$, $\tau_j = \ln\big(\max\{1 + \beta_j/\alpha_j, 1/\alpha_j\}\big)$ при $1 - \alpha_j \ge \beta_j$ для $j \in J$.

В силу теоремы 3 имеет место

Утверждение 2. *Пусть $1 \le p < \infty$, а система* (6) *удовлетворяет перечисленным выше условиям. Если при этом матрица $(E_n - C)$ является положительно обратимой, то система* (6) *будет M_{2p}^{γ}-устойчивой, где $\gamma(t) = (1+t)^{\lambda}$ для некоторого $0 < \lambda < \min\{\lambda_s, s = 1,\dots,n\}$.*

Пример 3. Пусть $1 \le p < \infty$. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений Ито с линейными запаздываниями вида

$$\begin{aligned} dx(t) = &-\sum_{j=1}^{N} A^j(t)x(\alpha_j t - \beta_j)dt + \sum_{j=1}^{m_0} A^{0j}(t)x^{\nu_j^0}\big(\alpha_j^0 t - \beta_j^0\big)dt + \\ &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A^{ij}(t)x^{\nu_j^i}\big(\alpha_j^i t - \beta_j^i\big)d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \ge 0), \end{aligned} \tag{7}$$

где $A^j(t) = \left(a^j_{sl}(t)\right)^n_{s,l=1}$, $j = 1, \dots, N$, $A^{0j}(t)$, $j = 1, \dots, m_0$, — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, причем траектории последних п.н. локально суммируемы, $A^{ij} = \left(a^{ij}_{sl}\right)^n_{s,l=1}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$ — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, причем траектории последних п.н. локально суммируемы с квадратом, $0 < \alpha_j \geq 1$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $0 < \alpha^i_j \geq 1$, $\beta^i_j \geq 0$, $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$.

Пусть существуют неотрицательные числа $\tilde{a}^{ij}_{sl}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m_i$, $s, l = 1, \dots, n$, $\tilde{a}^j_{sl}$, $j = 1, \dots, N$, $s, l = 1, \dots, n$, положительные числа λ_s, $s = 1, \dots, n$, и подмножества индексов $I_s \subset \{1, \dots, N\}$ $(s = 1, \dots, n)$ такие, что

$$\left|a^{ij}_{sl}\right| \leq \tilde{a}^{ij}_{sl}(1+t)^{-1/2}, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, m_i, \ s, l = 1, \dots, n,$$

$$\left|a^j_{sl}(t)\right| \leq \tilde{a}^j_{sl}(1+t)^{-1}, \ j = 1, \dots, N, \ s, l = 1, \dots, n,$$

$$\left|a^{0j}_{sl}(t)\right| \leq \tilde{a}^{0j}_{sl}(1+t)^{-1}, \ j = 1, \dots, m_0, \ s, l = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j \in I_s} a^j_{ss}(t) \geq \lambda_s (1+t)^{-1}, \ s = 1, \dots, n, \ t \geq 0,$$

$P \times \mu$-почти всюду, а элементы $n \times n$-матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{ss} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j \in I_s} \tilde{a}^j_{ss}\tau_j \left(\sum_{j=1}^N \tilde{a}^j_{ss} + \hat{A}_{ss} + \frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{A}_{ss}\right) + \sum_{j=1, j \notin I_s}^N \tilde{a}^j_{ss} + \hat{A}_{ss}\right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{A}_{ss}, \quad s = 1, \dots, n,$$

$$c_{sl} = \frac{1}{\lambda_s}\left[\sum_{j \in I_s} \tilde{a}^j_{ss}\tau_j \left(\sum_{j=1}^N \tilde{a}^j_{sl} + \hat{A}_{sl} + \frac{c_p}{\sqrt{\tau_j}}\tilde{A}_{sl}\right) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}^j_{sl} + \hat{A}_{sl}\right] + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_s}}\tilde{A}_{sl}, \ s, l = 1, \dots, n, \ s \neq l,$$

где $\hat{A}_{sl} = \sum\limits_{j=1}^{m_0} \tilde{a}^{0j}_{sl}$, $\tilde{A}_{sl} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m_i} \tilde{a}^{ij}_{sl}$, $s, l = 1, \dots, n$, $\tau_j = \ln(1 + \beta_j/\alpha_j)$ при $1 - \alpha_j < \beta_j$, $\tau_j = \ln(\max\{1 + \beta_j/\alpha_j, 1/\alpha_j\})$ при $1 - \alpha_j \geq \beta_j$ для $j \in J$.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Утверждение 3. *Пусть $1 \leq p < \infty$, а система (7) удовлетворяет перечисленным выше условиям. Если при этом матрица $(E_n - C)$ является положительно обратимой, то система (7) будет M^γ_{2p}-устойчивой, где $\gamma(t) = (1+t)^\lambda$ для некоторого $0 < \lambda < \min\{\lambda_s, s = 1, \dots, n\}$.*

Замечание 3. В предыдущих примерах признаки устойчивости сформулированы в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам уравнений. Для проверки свойства положительной обратимости можно использовать условия, перечисленные в статье [7]. В случае конкретных значений параметров положительная обратимость проверяется прямым вычислением обратной матрицы.

Заключение

В статье доказаны общие теоремы об асимптотической моментной устойчивости решений систем нелинейных уравнений Ито с запаздываниями. Основное внимание уделено случаю, когда запаздывания не являются ограниченными. Установлена связь таких запаздываний с конкретными видами асимптотического поведения моментов решений на бесконечности.

Схема доказательств, использованная в статье, основана на стохастической разновидности метода вспомогательных уравнений (W-метода) в комбинации с теорией положительно обратимых матриц и методом покомпонентных оценок решений.

Теоретические результаты дополнены признаками асимптотической моментной устойчивости решений для конкретных линейных и нелинейных систем уравнений Ито с запаздыванием, что иллюстрирует эффективность метода. Все признаки сформулированы в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам уравнений. Для проверки положительной обратимости можно использовать хорошо известные в литературе критерии, а в случае небольших размерностей положительную обратимость можно устанавливать непосредственно, т. е. вычисляя обратную матрицу.

Литература

[1] Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием* (Наука, М., 1981).

[2] Царьков Е.Ф. *Случайные возмущения дифференционально–функциональных уравнений* (Зинатне, Рига, 1989).

[3] Mao X. *Stochastic differential equations and applications* (Horwood Publ. Ltd., Chichester, 1997).

[4] Mohammed S.-E.F. *Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications*, Proc. The Sixth Workshop on Stochastic Anal. (Geilo, Norway, 1996).

[5] Azbelev N.V., Simonov P.M. *Stability of differential equations with aftereffect* (Taylor Francis, London, 2003).

[6] Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications* (Hindawi, New York, 2007).

[7] Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Глобальная устойчивость систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последействием и W-метод Н.В. Азбелева*, Изв. вузов. Матем. (1), 38–56 (2022).

[8] Kadiev R., Ponosov A. *Lyapunov stability of the generalized stochastic pantograph equation*, J. Math., Article ID 7490936, 1–10 (2018).

[9] Кадиев Р.И. *Существование и единственность решения задачи Коши для функционально–дифференциальных уравнений по семимартингалу*, Изв. вузов. Матем. (10), 35–39 (1995).

[10] Беллман Р. *Введение в теорию матриц* (Наука, М., 1969).

[11] Кадиев Р.И. *Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений*, Дисс. . . . д-ра физ.-матем. наук (Махачкала, 2000).

Рамазан Исмаилович Кадиев

Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук,
ул. М. Гаджиева, д. 45, г. Махачкала, 367000, Россия;
Дагестанский государственный университет,
ул. М. Гаджиева, д. 43 а, г. Махачкала, 367000, Россия,

e-mail: kadiev_r@mail.ru

Аркадий Владимирович Поносов

Норвежский университет естественных наук,
п/я 5003 N-1432, г. Ос, Норвегия,

e-mail: arkadi@nmbu.no

R.I. Kadiev and A.V. Ponosov

Asymptotic moment stability of solutions to systems of nonlinear differential Itô equations with aftereffect

Abstract. The paper studies the global moment stability of systems of nonlinear Itô differential equations with delays. The analysis is done by a modified regularization method, known as the W-method, and based on the use of some auxiliary equation with subsequent application of the theory of positively invertible matrices. Sufficient conditions for the global asymptotic moment stability for both sufficiently general and specific systems of Itô equations formulated in terms of parameters of these systems are given. Connections between this stability and the properties of the delay functions are established.

Keywords: system of stochastic differential equations, nonlinear Itô equation, stability of solutions, asymptotics of solutions, method of auxiliary equations, positive invertibility of matrices.

Ramazan Ismailovich Kadiev

Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
45 M. Hajiyev str., Makhachkala, 367000 Russia;
Dagestan State University,
43 a M. Hajiyev str., Makhachkala, 367000, Russia,

`e-mail:` kadiev_r@mail.ru

Arcady Vladimirovich Ponosov

Norwegian University of Life Sciences,
P.O. Box 5003 N-1432, As, Norway,

`e-mail:` arkadi@nmbu.no