Известия вузов. Математика
2024, № 7, с. 47–62

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.Ю. ВАТОЛКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗМЕРНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Пусть λ_1 и λ_2 вещественны, $\lambda_1 < \lambda_2$, функции $\psi_-(\lambda_i, t)$ являются решениями квазидифференциальных уравнений второго порядка $L\psi_- = \lambda_i \, {}_P^0\psi_-$, $i = 1, 2$, удовлетворяющими однородному краевому условию в точке a. Найдено выражение числа собственных значений оператора L, принадлежащих интервалу (λ_1, λ_2) (или размерность его спектральной проекции относительно интервала (λ_1, λ_2)), в терминах числа нулей вронскиана, составленного для функций $\psi_-(\lambda_1, t)$ и $\psi_-(\lambda_2, t)$.

Ключевые слова: квазидифференциальный оператор, спектральная проекция, самосопряженное квазидифференциальное выражение.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-47-62

Введение

Вопросы исследования свойств собственных значений и собственных функций дифференциального оператора в зависимости от гладкости коэффициентов дифференциального выражения, порождающего такой оператор, достаточно полно и хорошо изложены в работе [1] и в известных монографиях (см. [2]–[6] и ссылки в этих работах). Круг этих задач на данный момент времени достаточно хорошо изучен.

Авторами работы [7] рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля с суммируемым потенциалом и найдены формулы для асимптотики собственных значений и собственных функций с помощью современной трактовки метода Лиувилля–Стеклова. Работы [8]–[10] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщенной функцией первого порядка, в этих работах рассмотрены операторы второго порядка с негладкими потенциалами. В работах [11], [12] на основе методики работ [8]–[10] исследовано асимптотическое поведение собственных значений операторов с потенциалом, являющимся дельта-функцией Дирака, либо с импульсными потенциалами (потенциалами-распределениями). В работах [13]–[15] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети и графах. Изучению краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков посвящены работы [16]–[20], в них найдена асимптотика решений при больших значениях спектрального параметра при условии суммируемости потенциала.

Поступила в редакцию 01.06.2023, после доработки 06.12.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ есть открытый интервал, $P = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица, где функции $p_{ik}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, такая, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции $1/p_{ii}(\cdot)$ $(i \in 1 : n-1)$, $p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot)$ $(i \in 1 : n, k \in 0 : i-1)$ локально суммируемы в I. Определим квазипроизводные ${}_P^kx(\cdot)\,(k \in 0 : n)$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами [21], [22]

$$ {}_P^0x \doteq p_{00}x, \quad {}_P^kx \doteq p_{kk}\frac{d}{dt}\left({}_P^{k-1}x\right) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}({}_P^{\nu}x) \quad (k \in 1 : n). $$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение

$$ ({}_P^nx)(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1} $$

Его решением называется всякая функция $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}_P^kx(\cdot)$ $(k \in 0 : n-1)$ и почти всюду в I удовлетворяющая этому уравнению.

Линейным неоднородным квазидифференциальным называется уравнение

$$ (\ell x)\,(t) \doteq ({}_P^nx)\,(t) = f(t), \quad t \in I \quad (f : I \to \mathbb{R})\,. \tag{2} $$

Решением уравнения (2) называется всякая функция $x(\cdot)$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно и удовлетворяющая ему почти всюду в I. Если функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$ 1/p_{\nu\nu}(\cdot)\,(\nu \in 1 : n-1)\,, \quad p_{\nu k}(\cdot)/p_{\nu\nu}(\cdot) \quad (\nu \in 1 : n,\ k \in 0 : \nu - 1)\,, \quad f/p_{nn}(\cdot) $$

локально суммируемы в I, то задача Коши для уравнения (2) при начальных условиях $\left({}_P^kx\right)(a) = \gamma_k$ $(k \in 0 : n-1,\ a \in I,\ \gamma_k \in \mathbb{R})$ эквивалентна задаче

$$ \dot z = A(t)z + \tilde f(t), \quad z(a) = \gamma, $$

где

$$ z(t) \doteq (\alpha_P x)\,(t) \doteq \left({}_P^0x(t),\, \ldots\,,\, {}_P^{n-1}x(t)\right)^T, \quad \tilde f \doteq (0,\, \ldots\,,\, 0,\, f/p_{nn})^T, $$

$$ A = \begin{pmatrix} -p_{10}/p_{11} & 1/p_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ -p_{20}/p_{22} & -p_{21}/p_{22} & 1/p_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{-p_{n-1,0}}{p_{n-1,n-1}} & \dfrac{-p_{n-1,1}}{p_{n-1,n-1}} & \dfrac{-p_{n-1,2}}{p_{n-1,n-1}} & \ldots & \dfrac{1}{p_{n-1,n-1}} \\ -p_{n0}/p_{nn} & -p_{n1}/p_{nn} & -p_{n2}/p_{nn} & \ldots & -p_{n,n-1}/p_{nn} \end{pmatrix}, $$

$\gamma \doteq (\gamma_0,\, \ldots\,,\gamma_{n-1})^T$, T — знак транспонирования. Последняя задача однозначно разрешима, а с нею и исходная задача Коши для уравнения (2) имеет единственное решение, компоненты которого, квазипроизводные ${}_P^kx(\cdot)\,(k \in 0 : n-1)$, локально абсолютно непрерывны в I ([21], [22]).

Приведем один пример (см. там же). Пусть $n = 2$, $f(t) \equiv 0$, и в матрице P положим $p_{00}(t) = p_{11}(t) = p_{22}(t) \doteq \sqrt[3]{t}$, $p_{10}(t) \doteq t^{-3/5}$, $p_{21}(t) = p_{20}(t) \doteq 0$, $I = (-c,\ c)$, где $0 < c < +\infty$.

Тогда решением уравнения $\left({}^{2}_{P}x\right)(t) = 0$, $t \in I$, удовлетворяющим начальным условиям $\left({}^{0}_{P}x\right)(0) = 1$, $\left({}^{1}_{P}x\right)(0) = 0$, является функция $x(t) = t^{-1/3}\exp\left(-15\ \sqrt[15]{t}\right)$. Найдем нулевую и первую квазипроизводные этой функции ${}^{0}_{P}x(t) = \exp\left(-15\ \sqrt[15]{t}\right)$,

$$ {}^{1}_{P}x(t) = t^{1/3}\left(\exp\left(-15\ \sqrt[15]{t}\,\right)\right)' + t^{-3/5}\exp\left(-15\ \sqrt[15]{t}\right). $$

Каждое из слагаемых в ${}^{1}_{P}x(t)$ при $t = 0$ разрывно, а их сумма ${}^{1}_{P}x(t) \equiv 0$, $t \in I$, является абсолютно непрерывной функцией.

Для квазидифференциального уравнения справедливы основные утверждения общей теории обыкновенного дифференциального уравнения. Так уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{u_\nu(\cdot)\}_0^{n-1}$, для которой определитель $W_P \doteq \det\left({}^{\nu}_{P}u_k\right)_0^{n-1}$ не обращается в нуль ни в одной точке из I. Частное решение уравнения (2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $(\alpha_P u_*)(a) = 0$, имеет вид

$$ u_*(t) = \int_a^t C(t,s)\big(f(s)/p_{nn}(s)\big)\,ds \quad (t \in I), $$

где

$$ C(t,s) = \begin{vmatrix} {}^{0}_{P}u_0(s) & \dots & {}^{0}_{P}u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left({}^{n-2}_{P}u_0\right)(s) & \dots & \left({}^{n-2}_{P}u_{n-1}\right)(s) \\ u_0(t) & \dots & u_{n-1}(t) \end{vmatrix} \Big/ W_P(s) $$

есть функция Коши уравнения (1), она по аргументу t является его решением и удовлетворяет начальным условиям

$$ {}^{k}_{P}C(t,s)\Big|_{t=s} = 0 \quad (k \in 0:n-2), \qquad {}^{n-1}_{P}C(t,s)\Big|_{t=s} = 1. $$

Общее решение уравнения (2) задается формулой $u = c_0u_0 + \ldots + c_{n-1}u_{n-1} + u_*$, где c_ν — произвольные постоянные. Имеет место аналог формулы Остроградского–Лиувилля (подробнее см. [21], [22]).

Уравнение (2) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением (см. там же)

$$ \left(\ell^+ y\right)(t) \doteq (-1)^n\left({}^{n}_{R}y\right)(t) = g(t), \quad t \in I \quad (g : I \to \mathbb{R}), \tag{3} $$

где $R = (r_{\nu k})_0^n$ — нижняя треугольная матрица,

$$ r_{\nu k} = (-1)^{\nu+k}\ p_{n-k,n-\nu}\,p_{n-\nu,n-\nu}/p_{n-k,n-k} \quad (k \in 0:\nu,\ \nu \in 0:n). $$

Это означает, что имеет место тождество Лагранжа: почти для всех $t \in I$

$$ y(t)\,(\ell x)(t) - x(t)\left(\ell^+ y\right)(t) \equiv \frac{d}{dt}\,[x,y](t), \tag{4} $$

где $[x,y](t) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left({}^{k-1}_{P}x\right)(t)\left({}^{n-k}_{R}y\right)(t)$ (для всех $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, имеющих абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно).

Пусть $C^*(t,s)$ — функция Коши сопряженного однородного уравнения. Имеет место соотношение ${}^{0}_{P}C(t,s) = (-1)^{n-1}\,{}^{0}_{R}C^*(s,t)$ (подробнее см. [21], [22]).

Квазидифференциальное уравнение является обобщением обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n-го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д.Ю. Шина [23], [24]. Его работы на долгое время были игнорированы и забыты, и только начиная с 1975 г. стали появляться работы A. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, посвященные этой тематике. Они же возродили интерес к работам Д.Ю. Шина. На сегодняшний день имеется достаточно большое количество работ A. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, опубликованных в последние годы, а также сравнительно недавно (см., например, [25]–[32]), в которых рассматриваются и изучаются квазидифференциальные уравнения и различные краевые задачи для них.

В вопросах, связанных с распределением нулей собственных функций и расположением собственных значений на оси, с одной стороны, имеются достаточно обобщенные подходы, применимые к дифференциальным операторам с лишь непрерывными коэффициентами (и связанные с анализом соответствующих интегральных уравнений с ядром — функцией Грина), а с другой стороны — развита определенная техника для обоснования аналогичных свойств уже у обобщенных функций, т. е. у функционалов (по этому поводу, кроме некоторых из указанных выше работ, следует отметить также работы [33]–[35]).

Неоднородное квазидифференциальное уравнение (2) позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть "обобщенными", уравнениями с особенностями в коэффициентах и т.п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение также представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения (2). В монографии [36] рассматривается самосопряженное квазидифференциальное уравнение четного порядка

$$(-1)^m\big(p_0(t)x^{(m)}(t)\big)^{(m)}+(-1)^{m-1}\big(p_1(t)x^{(m-1)}(t)\big)^{(m-1)}\; + \;\dots\; + p_m(t)x(t)=f(t).$$

Оно получается из уравнения (2) при

$$p_{kk}=1\;\;(k\in 0:m-1),\;\;p_{kk}=-1\;\;(k\in m+1:n),$$

$$p_{i,n-i}=p_{i-m}(i\in m:n),\;\;p_{ik}=0\;\;(i\in 1:n,\;k<i;\;k\neq n-i).$$

Уравнение (2), таким образом, общее и не является, если не предполагать того, самосопряженным. Поэтому общепринятые простые и лаконичные обозначения квазипроизводных [36] заменены в нашем случае на более сложные, так как при переходе к сопряженному уравнению, матрица, с помощью которой строятся квазипроизводные, меняется. Но также, как и в [36], здесь рассматривается только случай вещественнозначных коэффициентов. Случай комплекснозначных коэффициентов, в отличие от работ [23] и [24], не рассматривается. Заметим, что квазидифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах в случае, если коэффициенты $p_{\nu k}=0$ $(k\in 0:\nu-2,\,\nu\in 2:n)$ $\big([21], [22]\big)$.

Квазидифференциальное выражение ℓx назовем *регулярным*, если интервал $I=(a,b)$ конечен и если функции

$$1/p_{\nu\nu}\;\;(\nu\in 1:n-1)\,,\qquad p_{\nu k}/p_{\nu\nu}\;\;(\nu\in 1:n,\;k\in 0:\nu-1) \tag{5}$$

суммируемы в I. В противном случае квазидифференциальное выражение ℓx назовем *сингулярным*, предполагая здесь и в дальнейшем локальную суммируемость функций (5) в I. Левый конец a интервала I назовем *регулярным*, если $a>-\infty$ и если функции (5) суммируемы в каждом промежутке $[a,\beta]$, $\beta<b$. Иначе, конец *a сингулярен.* Аналогично вводятся понятия регулярности и сингулярности для правого конца b.

Известно, что альтернатива Г. Вейля для квазидифференциального оператора второго порядка с одним регулярным и вторым сингулярным концами заключается в следующем: индекс дефекта такого оператора равен $(1,1)$ или $(2,2)$. Первый случай называют случаем предельной точки в a (или b, в зависимости от того какой из этих концов сингулярен), второй — случаем предельного круга. Эта терминология связана с геометрическим методом вложенных окружностей, при помощи которого Г. Вейль пришел к своей альтернативе (изложение этого метода можно найти, например, в монографии [4]). Употребительна также и такая терминология [37]: если индекс дефекта некоторого оператора равен $(0,0)$, или $(1,1)$, или $(2,2)$, то говорят, что случай предельной точки относительно данного оператора имеет место на обоих концах, только на одном конце и ни на одном из концов соответственно. На интервале $(a,b)\,(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ вещественной оси, следуя работе [37], определим оператор L, действующий в пространстве $\mathbb{L}_2(a,b)$ функций, суммируемых с квадратом на (a,b). Пусть $\mathfrak{D}_{loc}$ — множество функций из $\mathbb{L}_2(a,b)$, имеющих локально абсолютно непрерывные на (a,b) квазипроизводные ${}^{0}_{P}x(\cdot)$ и ${}^{1}_{P}x(\cdot)$, и такие, что ${}^{2}_{P}x\in\mathbb{L}_2(a,b)$. Область определения $\mathfrak{D}_L$ оператора L — функции x из $\mathfrak{D}_{loc}$, удовлетворяющие исходным распадающимся краевым условиям в a и (или) b, и $Lx\doteq{}^{2}_{P}x$.

Построим два оператора ([37]) $L_{\max}$: $L_{\max}x={}^{2}_{P}x$ на $\mathbb{L}_2(a,b)\cap\mathfrak{D}_{\mathrm{loc}}$ и $L_{\min}$ есть замыкание сужения $L_{\max}$ на подмножество функций из $\mathfrak{D}_{\mathrm{loc}}$, имеющих компактный носитель в (a,b). Оператор $L_{\min}$ симметричен и $L^{*}_{\min}=L_{\max}$. В общем случае $L^{*}_{\min}\subset L\subset L_{\max}$. Область определения $\mathfrak{D}_L$ оператора L, следуя работе [37], можно описать в терминах операторов $L_{\max}$ и $L_{\min}$ в зависимости от того является ли a или (и) b относительно $L_{\min}$ предельной точкой или предельным кругом, а именно: если оба конца a и b являются предельными точками относительно оператора $L_{\min}$, то $L^{*}_{\min}=L_{\max}=L$. Если b есть предельная точка относительно оператора $L_{\min}$, но не a, то L — любое самосопряженное расширение $L_{\min}$ и если $\varphi_-(\cdot)$ — любая функция из $\mathfrak{D}_L\backslash\mathfrak{D}_{L_{\min}}$, то $\mathfrak{D}_L$ — множество таких функций $x(\cdot)$ из $\mathfrak{D}_{L_{\max}}$, что вронскиан $W(x,\varphi_-)(t)$ стремится к нулю при $t\to a$.

Окончательно [37], если L — оператор с распадающимися краевыми условиями и на обоих концах интервала (a,b) имеет место случай предельного круга, и если $\varphi_\pm(\cdot)$ — такие функции из $\mathfrak{D}_L\backslash\mathfrak{D}_{L_{\min}}$, что $\varphi_+(t)\equiv0$ в окрестности точки a, а $\varphi_-(t)\equiv0$ в окрестности точки b, то $\mathfrak{D}_L=\left\{x\in\mathfrak{D}_{L_{\max}}:W(x,\varphi_-)(t)\to0\,(t\to a)\,,\ \ W(x,\varphi_+)(t)\to0\,(t\to b)\right\}.$

Пусть все собственные значения оператора L вещественные и простые.

Спектральной проекцией $\operatorname{Ran}P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L)$ оператора L относительно интервала (γ_1,γ_2) вещественной оси называется совокупность собственных функций, отвечающих собственным значениям из этого интервала [37].

Число собственных значений, находящихся в интервале (γ_1,γ_2), называют размерностью спектральной проекции оператора L относительно интервала (γ_1,γ_2) и обозначается $\dim\operatorname{Ran}P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L)$ ([37]).

В работе [37] на интервале (a,b) рассматривается оператор L, действующий в $\mathbb{L}_2(a,b)$, определяемый самосопряженным квазидифференциальным выражением

$$(\ell x)(t)=r^{-1}(t)\Big(\big(p(t)x'(t)\big)'-q(t)x(t)\Big)$$

и распадающимися граничными условиями в a и (или) b. В наших обозначениях это выражение запишется так $\big(\ell(rx)\big)(t)\doteq{}^{2}_{P}\big(r(t)x(t)\big)$, где в матрице P

$$p_{10}(t)=p_{21}(t)=0,\ p_{00}(t)=1/r(t),\ p_{11}(t)=p(t),\ p_{20}(t)=-q(t)/r(t),\ p_{22}(t)=1/r(t).$$

Вещественнозначные функции $r(\cdot),p^{-1}(\cdot)$, $q(\cdot)$ предполагаются локально суммируемыми в (a,b) и функции $r(t)>0$, $p(t)>0$ почти всюду в интервале (a,b).

В работе [37] определяется размерность спектральной проекции такого оператора относительно интервала (γ_1,γ_2) вещественной оси, она выражена через число нулей $W_0(\cdot,\cdot)$ некоторого вронскиана:

а) либо $\dim\operatorname{Ran}P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L)=W_0\left(\psi_-(\gamma_1,t),\ \psi_-(\gamma_2,t)\right)+1$, где $\psi_-(\lambda,t)$ есть решение уравнения $\ell\psi=-\lambda\psi$, суммируемое с квадратом в окрестности точки a и удовлетворяющее соответствующему граничному условию в точке a;

b) либо $\dim \operatorname{Ran} P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0\left(\psi_-(\gamma_1,t),\ \psi_-(\gamma_2,t)\right)$,
причем если b есть предельная точка относительно оператора L, то имеет место последнее равенство.

В настоящей статье этот результат из работы [37] распространяется на оператор L, порожденный общим (т. е. элементы матрицы P — функции $p_{10}(t)$ и $p_{21}(t)$, вообще говоря, не равны нулю) самосопряженным квазидифференциальным выражением второго порядка и однородными двухточечными краевыми условиями.

Самосопряженным общее квазидифференциальное выражение второго порядка будет являться тогда, когда имеют место следующие равенства (условия самосопряженности):

$$p_{22}(t) = p_{00}(t), \quad p_{21}(t) = -\frac{p_{00}(t)}{p_{11}(t)}p_{10}(t),\ t \in (a,b).$$

В этом случае справедливо тождество $R \equiv P$ $\big($напомним, что определение нижней треугольной матрицы R уже давалось (см. выше)$\big)$.

В нашем случае метод работы [37], основанный на преобразовании Прюфера, не проходит, так как функции $p_{10}(t)$ и $p_{21}(t)$ не обязательно равны нулю, что не позволяет перенести технику доказательства утверждений из работы [37] на этот случай. Поэтому доказательства основных утерждений настоящей статьи по-существу отличается от доказательств аналогичных утверждений работы [37].

1. Теоремы сравнения для квазидифференциальных уравнений

Функция $x(\cdot)$ имеет в точке $a_i \in I$ P-нуль кратности μ_i $(1 \leqslant \mu_i \leqslant n)$, если квазипроизводная ${}^{\mu_i}_{P}x(a_i) \neq 0$, а все квазипроизводные меньшего порядка обращаются в нуль в этой точке [21], [22].

Однородное квазидифференциальное уравнение n-го порядка (1) называется неосцилляционным [21], [22] на промежутке J (здесь $J = (a,b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), если общее число P-нулей с учетом их кратностей любого его нетривиального решения на J не превосходит $n-1$.

Пусть $n = 2$. Уравнение (1) примет вид

$$({}^{2}_{P}x)(t) = 0, \quad t \in J. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется неосцилляционным на промежутке J, если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля.

При условии неосцилляции имеет место неравенство ${}^{0}_{P}C(t,s) \geqslant 0$ при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ $\big($[21], [22]$\big)$. Неосцилляция уравнения (6) обеспечит наличие у задачи

$${}^{2}_{P}x(t) + \lambda\, {}^{0}_{P}x(t) = 0, \quad t \in J = (a,b)\ (-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)\,, \tag{7}$$

$${}^{0}_{P}x(a) = 0, \quad {}^{0}_{P}x(b) = 0, \tag{8}$$

комплекса спектральных свойств Штурма: простота и вещественность спектра (множества собственных значений), положительность собственных значений, перемежаемость нулей собственных функций. Будем называть перечисленные выше свойства также осцилляционностью спектра [38]–[42].

О.Д. Келлогом было впервые установлено, что наличие у задачи второго порядка комплекса спектральных свойств Штурма равносильно принадлежности интегрального оператора с ядром (функцией Грина) к классу интегральных операторов, ядра которых удовлетворяют неравенствам специального типа (такие ядра назваются ядрами Келлога). Поэтому, чтобы показать наличие спектральных свойств Штурма у краевой задачи, достаточно доказать, что ее функция Грина существует, непрерывна и является ядром Келлога.

Для задачи Штурма–Лиувилля четвертого порядка это было установлено Ф.Р. Гантмахером и М.Г. Крейном [43]. А.Ю. Левин и Г.Д. Степанов установили осцилляционность спектра некоторых двухточечных краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения произвольного порядка [44], [45].

Для многоточечной краевой задачи Валле Пуссена, рассматриваемой на компактном интервале, соответствующий факт был установлен Ю.В. Покорным (см. [38]–[40], классическая задача Валле Пуссена и некоторые ее обобщения). Также в работах Ю.В. Покорного и его учеников [41], [42], [46], [47] исследованы осцилляционные свойства некоторых краевых задач с особенностями, а также спектральные свойства некоторых интегральных операторов на некомпактном интервале.

Осцилляционность спектра обобщенной задачи Валле Пуссена на компактном интервале установлена В.Я. Дерром (см. [48]–[50]).

С помощью теорем из [42], [47] результаты, связанные с наличием у краевой задачи на собственные значения комплекса спектральных свойств Штурма, переносятся на случай задачи (7), (8), рассматриваемой на некомпактном интервале (a,b), где a и (или) b возможно сингулярны.

Нам понадобятся в дальнейшем теоремы сравнения для квазидифференциальных уравнений. Сформулируем и докажем их здесь.

Рассмотрим квазидифференциальные уравнения

$$ {}_P^{n}x(t) + q_1(t)\,{}_P^{0}x(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_1 : J \to \mathbb{R}, \tag{9} $$

$$ (-1)^n\,{}_R^{n}y(t) + q_2(t)\,{}_R^{0}y(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_2 : J \to \mathbb{R}. \tag{10} $$

Обозначим через a_1 и a_2 любые такие два последовательных P-нуля кратности $n-1$ решения уравнения (10), что у него в интервале (a_1,a_2) нет перемен знака.

В дальнейшем предполагаем функции $p_{ii}(t)$ $(i \in 0:n)$ положительными на J.

Теорема 1. *Пусть функции* $x(t)$, $y(t)$ *— решения квазидифференциальных уравнений* (9) *и* (10) *соответственно, и выполнены следующие условия*:

a) *имеет место неравенство*

$$ q_1(t)/p_{nn}(t) \leqslant q_2(t)/p_{00}(t) \text{ при всех } t \in J; $$

b) *квазипроизводные* ${}_P^{n-1}x(a_1)$ *и* ${}_P^{n-1}x(a_2)$ *разных знаков, знак квазипроизводной* ${}_P^{n-1}x(a_1)$ *совпадает со знаком решения уравнения* (9) *в интервале* (a_1,a_2), *тогда между точками* a_1 *и* a_2 *заключен, по крайней мере, один нуль решения уравнения* (10).

Доказательство. Как уже говорилось во введении уравнение (2) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением (3). Это означает, что имеет место тождество Лагранжа (4) для всех функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, имеющих абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно.

Учитывая то, что функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют уравнениям (9), (10) соответственно, равенство (4) можно записать в виде

$$ \left(\tilde{q}_2(t) - \tilde{q}_1(t)\right)\,{}_P^{0}x(t)\,{}_R^{0}y(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,\left({}_P^{k-1}x\right)(t)\,\left({}_R^{n-k}y\right)(t), \tag{11} $$

где $\tilde{q}_1(t) \doteq \dfrac{q_1(t)}{p_{nn}(t)}$, $\quad \tilde{q}_2(t) \doteq \dfrac{q_2(t)}{p_{00}(t)}$.

Предположим противное, а именно, что между точками a_1 и a_2 нет ни одного нуля решения уравнения (10). Не ограничивая общности, можно считать, что функции $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ в интервале (a_1,a_2).

Пусть уравнение (9) четного порядка, т. е. $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Проинтегрируем обе части равенства (11) от точки a_1 до точки a_2:

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \big(\tilde{q}_2(s) - \tilde{q}_1(s)\big)\, {}^{0}_{P}x(s)\,{}^{0}_{R}y(s)\,ds = -\,{}^{0}_{P}x(t)\,{}^{2k-1}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} + \\ + {}^{1}_{P}x(t)\,{}^{2k-2}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} - {}^{2}_{P}x(t)\,{}^{2k-3}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} + \dots \\ \dots + {}^{2k-1}_{P}x(t)\,{}^{0}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} = -0 + 0 - 0 + \dots + {}^{2k-1}_{P}x(t)\,{}^{0}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} = \\ = {}^{2k-1}_{P}x(a_2)\,{}^{0}_{R}y(a_2) - {}^{2k-1}_{P}x(a_1)\,{}^{0}_{R}y(a_1) = {}^{n-1}_{P}x(a_2)\,{}^{0}_{R}y(a_2) - {}^{n-1}_{P}x(a_1)\,{}^{0}_{R}y(a_1)\,. \tag{12}$$

Пусть уравнение (9) нечетного порядка, т. е. $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$. Проинтегрируем обе части равенства (11) от точки a_1 до точки a_2:

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \big(\tilde{q}_2(s) - \tilde{q}_1(s)\big)\, {}^{0}_{P}x(s)\,{}^{0}_{R}y(s)\,ds = {}^{0}_{P}x(t)\,{}^{2k}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} - \\ - {}^{1}_{P}x(t)\,{}^{2k-1}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} + {}^{2}_{P}x(t)\,{}^{2k-2}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} - \dots \\ \dots + {}^{2k}_{P}x(t)\,{}^{0}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} = 0 - 0 + 0 - \dots + {}^{2k}_{P}x(t)\,{}^{0}_{R}y(t)\Big|_{a_1}^{a_2} = \\ = {}^{2k}_{P}x(a_2)\,{}^{0}_{R}y(a_2) - {}^{2k}_{P}x(a_1)\,{}^{0}_{R}y(a_1) = {}^{n-1}_{P}x(a_2)\,{}^{0}_{R}y(a_2) - {}^{n-1}_{P}x(a_1)\,{}^{0}_{R}y(a_1)\,. \tag{13}$$

Получили такую же правую часть, как и в равенстве (12).

Так как знак ${}^{n-1}_{P}x(a_1)$ совпадает со знаком решения уравнения (9) в интервале (a_1, a_2) $\big($и стало быть совпадает со знаком ${}^{0}_{R}y(a_1)\big)$, то ${}^{n-1}_{P}x(a_1)\,{}^{0}_{R}y(a_1)$ положительно, а ${}^{n-1}_{R}x(a_2)\,{}^{0}_{R}y(a_2)$ отрицательно $\big($в силу того, что квазипроизводные ${}^{n-1}_{P}x(a_1)$ и ${}^{n-1}_{P}x(a_2)$ — разных знаков, значит, квазипроизводные ${}^{n-1}_{P}x(a_2)$ и ${}^{0}_{R}y(a_2)$ тоже имеют разные знаки$\big)$, следовательно, правая часть равенства (12) $\big($а также (13)$\big)$ отрицательна, а левая часть равенства (12) $\big($а также (13)$\big)$ положительна $\big($в силу условия а) доказываемой теоремы и предположения, что функции $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ в интервале $(a_1, a_2)\big)$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 2. *Пусть уравнение*

$${}^{n}_{P}y(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{P}y(t) = 0, \quad t \in J, \tag{14}$$

неосцилляционно на промежутке J. Пусть, далее, функции $x(t)$ и $y(t)$ суть решения квазидифференциальных уравнений (9) и (14) соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям в точке a, и выполнено неравенство $q_1(t) \leqslant q_2(t)$ при всех $t \in J$. Тогда до первого нуля функции ${}^{0}_{P}x(t)$ содержится, по крайней мере, один нуль функции ${}^{0}_{P}y(t)$.

Доказательство. Запишем уравнение (9) в виде

$${}^{n}_{P}x(t) + (q_2(t) - \Delta(t))\,{}^{0}_{P}x(t) = 0, \quad t \in J, \tag{15}$$

где $\Delta(t) \geqslant 0$ при всех $t \in I$.

Уравнение (15) можно записать так:

$$ {}^{n}_{P}x(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{P}x(t) = \Delta(t)\,{}^{0}_{P}x(t), \quad t \in J. \tag{16}$$

Пусть функция $y(t)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и функция $x(t)$, и, кроме того, функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению (14).

Запишем, используя методику работы [51], представление нулевой квазипроизводной ${}^{0}_{P}x(t)$ $\big($где функция $x(t)$ есть решение уравнения (16)$\big)$ в виде скалярного ряда

$$ {}^{0}_{P}x(t) = {}^{0}_{P}y_0(t) + {}^{0}_{P}y_1(t) + {}^{0}_{P}y_2(t) + \ \ldots\ , \tag{17}$$

где $y_0(t) \doteq y(t)$, а функции $y_i(t)$ $(i \in 1:\infty)$ являются решениями начальных задач

$$ {}^{n}_{P}y_i(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{P}y_i(t) = \Delta(t)\,{}^{0}_{P}y_{i-1}(t), \quad t \in J,$$

$$ {}^{0}_{P}y_i(a) = {}^{1}_{P}y_i(a) = \ \ldots\ = {}^{n-1}_{P}y_i(a) = 0.$$

Пусть t^* есть первый нуль функции ${}^{0}_{P}x(t)$ в $J = (a, b)$. Не ограничивая общности, можно считать, что функция ${}^{0}_{P}x(t)$ неотрицательна на промежутке $(a,\, t^*]$.

Предположим противное, т. е. то, что до точки t^* включительно функция ${}^{0}_{P}y(t)$ не меняет знак. В силу того, что функция $y(t)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и функция $x(t)$, функция ${}^{0}_{P}y(t)$ на промежутке $(a,\, t^*]$ имеет тот же знак, что и функция ${}^{0}_{P}x(t)$, т. е. неотрицательна.

Из представления

$$ {}^{0}_{P}y_i(t) = \int\limits_a^t \frac{{}^{0}_{P}C_{q_2}(t,s)\Delta(s)\,{}^{0}_{P}y_{i-1}(s)}{p_{nn}(s)}\,ds$$

$\Big($где $C_{q_2}(t,s)$ есть функция Коши уравнения (14)$\Big)$ с учетом неосцилляции уравнения (14) на J $\Big({}^{0}_{P}C_{q_2}(t,s) \geqslant 0$ при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\Big)$, неотрицательности функций $\Delta(t)$ и $p_{nn}(t)$ на J, и предположения о неотрицательности функции ${}^{0}_{P}y(t)$ $\big({}^{0}_{P}y_0(t)\big)$ на промежутке $(a,\, t^*]$ следует, что каждое слагаемое в правой части представления (17) положительно на промежутке $(a,\, t^*]$. Поэтому функция ${}^{0}_{P}x(t)$ в точке t^* в нуль обратиться не может. Полученное противоречие доказывает, что у функции ${}^{0}_{P}y(t)$ имеется, по крайней мере, один нуль до первого нуля функции ${}^{0}_{P}x(t)$. □

В случае $n = 2$ квазидифференциальные уравнения (9), (10) примут вид

$$ {}^{2}_{P}x(t) + q_1(t)\,{}^{0}_{P}x(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_1 : J \to \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$ {}^{2}_{R}y(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{R}y(t) = 0, \quad t \in J, \quad q_2 : J \to \mathbb{R}. \tag{19}$$

Следствие 1. Пусть уравнение

$$ {}^{2}_{P}y(t) + q_2(t)\,{}^{0}_{P}y(t) = 0, \quad t \in J, \tag{20}$$

неосцилляционно на промежутке J, функции $x(t)$ и $y(t)$ суть решения квазидифференциальных уравнений (18) и (20) соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям в точке a, и выполнено неравенство $q_1(t) \leqslant q_2(t)$ при всех $t \in J$. Тогда до первого нуля функции ${}^{0}_{P}x(t)$ содержится, по крайней мере, один нуль функции ${}^{0}_{P}y(t)$.

Второе условие в теореме 1 для случая $n = 2$ выполняется всегда, поэтому сформулируем и докажем здесь заново теорему сравнения для случая уравнений второго порядка (18) и (19), не рассматримая ее как следствие теоремы 1. Заметим, что нижеприводимая теорема 3 является обобщением известной теоремы сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [52]) на случай общего квазидифференциального уравнения второго порядка.

Теорема 3. *Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ — решения квазидифференциальных уравнений* (18), (20) *соответственно и выполнено неравенство*

$$q_1(t)/p_{22}(t) \leqslant q_2(t)/p_{00}(t)$$

при всех $t \in J$. Тогда между каждыми двумя последовательными нулями решения уравнения (18) *заключен, по крайней мере, один нуль решения уравнения* (19).

Доказательство. Тождество Лагранжа (4) в случае уравнения второго порядка выглядит так:

$$y(t)\,{}_P^2x(t) - x(t)\,{}_R^2y(t) = \frac{d}{dt}\big(-{}_P^0x(t)\,{}_R^1y(t) \;+ {}_P^1x(t)\,{}_R^0y(t)\big),\; t \in J. \tag{21}$$

Учитывая то, что функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям (18) и (19) соответственно, равенство (21) можно записать в виде

$$\big(\tilde{q}_2(t) - \tilde{q}_1(t)\big)\,{}_P^0x(t)\,{}_R^0y(t) = \frac{d}{dt}\left(-{}_P^0x(t)\,{}_R^1y(t) \;+ {}_P^1x(t)\,{}_R^0y(t)\right), \tag{22}$$

где $\tilde{q}_1(t) \doteq \dfrac{q_1(t)}{p_{22}(t)}$, $\tilde{q}_2(t) \doteq \dfrac{q_2(t)}{p_{00}(t)}$.

Пусть t_0 и t_1 — два последовательных нуля функции $x(t)$. Допустим, что между ними нет ни одного нуля функции $y(t)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ в интервале (t_0, t_1). Тогда, очевидно, $x(t)$ будет возрастать на $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ и убывать на $[t_1 - \varepsilon, t_1]$, где $0 < \varepsilon < (t_1 - t_0)/2$. Поэтому $x'(t_0) > 0$, а $x'(t_1) < 0$. Проинтегрируем обе части равенства (22) от t_0 до t_1:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \big(\tilde{q}_2(s) - \tilde{q}_1(s)\big)\,{}_P^0x(s)\,{}_R^0y(s)\,ds = -{}_P^0x(t)\,{}_R^1y(t)\big|_{t_0}^{t_1} + \\ + {}_P^1x(t)\,{}_R^0y(t)\big|_{t_0}^{t_1} = {}_P^1x(t)\,{}_R^0y(t)\big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Левая часть равенства (23) положительна, а правая часть отрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему. □

2. О нулях вронскиана

Теорема 4. *Пусть уравнение* (6) *неосцилляционно на $J = (a, b)$ и $u_{\lambda_\mu}(t)$, а также $u_{\lambda_\nu}(t)$, суть две собственные функции задачи* (7), (8), *отвечающие соответственно собственным значениям λ_μ и λ_ν. Предположим, что между числами $\lambda_\mu < \lambda_\nu$ заключено k собственных значений задачи* (7), (8). *Тогда вронскиан*

$$W(u_{\lambda_\mu}, u_{\lambda_\nu})(t) = {}_P^0u_{\lambda_\mu}(t)\,{}_P^1u_{\lambda_\nu}(t) - {}_P^0u_{\lambda_\nu}(t)\,{}_P^1u_{\lambda_\mu}(t)$$

имеет в точности k нулей в интервале (a, b).

Доказательство. Как уже отмечалось во введении, использование преобразования Прюфера в нашем случае не осуществимо. Поэтому нижеприведенное доказательство, по-существу, отличается от доказательства аналогичного утверждения работы [37].

Пусть функция ${}_P^0u_{\lambda_\mu}(t)$ в интервале (a, b) имеет m–1 перемену знака, а функция ${}_P^0u_{\lambda_\nu}(t)$ — n–1 перемену знака. Других нулей, кроме участвующих в этих переменах знака, у функций ${}_P^0u_{\lambda_\mu}(t)$ и ${}_P^0u_{\lambda_\nu}(t)$ в (a, b) быть не может. Функция ${}_P^0u_{\lambda_{\mu+1}}(t)$ имеет m нулей в (a, b), функция ${}_P^0u_{\lambda_{\mu+2}}(t)$ имеет $m+1$ нулей в (a, b) и т. д. Функция ${}_P^0u_{\lambda_\nu}(t)$ имеет $n-1 = m-1+k+1$ нулей в (a,b), т. е. $n-1=m+k$. Согласно теореме 3 из $n-1$ нулей функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ $m-2$ нуля перемежаются нулями функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$. Кроме того, благодаря свойству перемежаемости нулей соседних собственных функций у функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ будет, по крайней мере, один нуль до первого нуля функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ и будет, по крайней мере, один нуль после последнего нуля функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ в (a,b). Таким образом, по крайней мере, m нулей функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ перемежаются нулями функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$, а всего у функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ имеется $n-1$ $(=m+k)$ нулей в (a,b).

Оставшиеся k нулей распределяются следующим образом: k_1 из них приходится на интервал от точки a до первого нуля функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$, k_2 нулей приходится на интервал от первого до второго нуля функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ и т. д. Отсюда получаем, что $k=k_1+k_2+\ldots+k_m$.

В некотором интервале между двумя последовательными нулями функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ (обозначим его индексом j $(j\in 1:m)$) у функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ всего k_j+1 нулей. Функция ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ сохраняет в j-м интервале знак. Пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{k_j+1}$ суть последовательные нули функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ в j-м интервале. Тогда, как это нетрудно проверить, вронскиан $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t_1)$ отличается знаком от вронскиана $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t_2)$, а последний отличается знаком от $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t_3)$ и т. д., т. е. $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ имеет в j-м интервале не менее k_j нулей между t_1 и t_{k_j+1}.

В силу легко устанавливаемого соотношения

$$\frac{dW(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)}{dt}=(\lambda_\nu-\lambda_\mu)\,{}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t){}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t) \tag{24}$$

нулей не может быть и более, чем k_j. Действительно, в противном случае функция ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ должна была бы иметь в j-м интервале число нулей, строго большее, чем k_j+1, а это невозможно. Из всего вышесказанного делаем вывод о том, что вронскиан $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ имеет не менее k нулей в (a,b).

Докажем теперь, что их не может быть более, чем k. Между двумя нулями функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$, разделенными одним нулем функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$, не может быть нулей вронскиана $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$. Пусть t^* и t^{**} — два последовательных нуля функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$, между которыми содержится ровно один нуль t' функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$.

Здесь возможны четыре случая:

a) между t^* и t^{**} функция ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ отрицательна, а функция ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ меняет знак с плюса на минус;

b) между t^* и t^{**} функция ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$положительна, а функция ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ меняет знак с плюса на минус;

c) между t^* и t^{**} функция ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ отрицательна, а функция ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ меняет знак с минуса на плюс;

d) между t^* и t^{**} функция ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ положительна, а функция ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ меняет знак с минуса на плюс.

Далее в каждом из этих четырех случаев устанавливается, что вронскианы $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t^*)$, $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t')$, $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t^{**})$ имеют одинаковый знак, в силу равенства (24) вронскиан $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ на интервалах (t^*,t') и (t',t^{**}) не может обратиться в нуль, так как на этих интервалах у функций ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ и ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ нулей нет.

Таким образом, вронскиан $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ имеет в интервале (a,b) ровно k нулей. □

Теорема 5. *Пусть уравнение* (6) *неосцилляционно на* (a,b) *и* $u_{\lambda_\mu}(t)$, *а также* $u_{\lambda_\nu}(t)$, *суть две собственные функции задачи* (7), (8), *отвечающие соответственно собственным значениям* λ_μ *и* λ_ν, *где* $\lambda_\mu<\lambda_\nu$. *Тогда если вронскиан* $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ *имеет в* (a,b) k *нулей,* *то между собственными числами λ_μ и λ_ν заключено в точности k собственных значений задачи* (7), (8).

Доказательство. Предположив, что это число не равно k, из теоремы 4 получаем, что вронскиан $W(u_{\lambda_\mu}, u_{\lambda_\nu})(t)$ не может иметь k нулей в (a,b). Полученное противоречие доказывает теорему. □

3. Исследование размерности спектральной проекции оператора, порожденного самосопряженным квазидифференциальным выражением второго порядка

Теорема 6. *Пусть $u_\lambda(t)$ есть собственная функция краевой задачи* (7), (8), *отвечающая собственному значению λ, а функция $\psi_-(\lambda,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$
{}_P^2x(t) + \gamma\, {}_P^0x(t) = 0, \quad t \in J = (a,b), \tag{25}
$$

где $\lambda < \gamma < \lambda^*$ (λ^* — следующее за λ собственное значение задачи (7), (8)) *и краевому условию из условий* (8), *записанному в точке a. Пусть, далее, уравнения* (6) *и* (25) *неосцилляционны на промежутке J. Тогда до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ в J функция ${}_P^0\psi_-(\lambda,t)$ имеет в точности один нуль, а между любыми двумя последовательными нулями функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ находится в точности один нуль функции ${}_P^0\psi_-(\gamma,t)$.*

Доказательство. То, что, по крайней мере, один нуль функции ${}_P^0\psi_-(\gamma,t)$ содержится до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ и между каждыми двумя ее последовательными нулями следует непосредственно из следствия 1 и теоремы 3, при этом в уравнении (19) $R \equiv P$, так как в этом разделе мы рассматриваем только самосопряженные квазидифференциальные выражения второго порядка (напомним, что условия самосопряженности квазидифференциального выражения второго порядка приведены во введении).

Покажем, что до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ и между каждыми ее двумя последовательными нулями не может быть более одного нуля функции ${}_P^0\psi_-(\gamma,t)$.

Предположим, что это не так. Пусть до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ или между некоторыми ее последовательными нулями содержится три или более нулей функции ${}_P^0\psi_-(\gamma,t)$. Но тогда функция ${}_P^0u_{\lambda^*}(t)$ будет иметь два или более нулей либо до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$, либо между некоторыми ее двумя последовательными нулями, а это противоречит свойствам собственных функций, вытекающим из неосцилляции уравнения (6) на J.

Пусть теперь до первого нуля функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ или между некоторыми ее последовательными нулями содержится ровно два нуля функции ${}_P^0\psi_-(\gamma,t)$. Пусть t^* и t^{**} — два таких нуля. Запишем, используя методику работы [51], представление функции ${}_P^0u_\lambda(t)$ в виде скалярного ряда

$$
{}_P^0u_\lambda(t) = {}_P^0y_0(t) + {}_P^0y_1(t) + {}_P^0y_2(t) + \ \dots\ , \tag{26}
$$

где

$$
{}_P^0y_0(t) \doteq {}_P^0\psi_-(\gamma,t), \quad {}_P^0y_1(t) = (\gamma-\lambda)\int\limits_a^t \frac{{}_P^0C_\gamma(t,s)\, {}_P^0y_0(s)}{p_{22}(s)}\, ds,
$$

и, вообще,

$$
{}_P^0y_i(t) = (\gamma-\lambda)\int\limits_a^t \frac{{}_P^0C_\gamma(t,s)\, {}_P^0y_{i-1}(s)}{p_{22}(s)}\, ds \quad (i \in 2:\infty)
$$

$\big(C_\gamma(t,s)$ есть функция Коши уравнения (25), при условии неосцилляции уравнения (25) имеет место неравенство ${}_P^0C_\gamma(t,s) \geqslant 0$ при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\big)$.

На промежутке (t^*,t^{**}) функция ${}^0_P\psi_-(\gamma,t)$ имеет знак, противоположный знаку функции ${}^0_Pu_\lambda(t)$, а на промежутке от t^{**} до первого справа нуля t' функции ${}^0_Pu_\lambda(t)$ функция ${}^0_P\psi_-(\gamma,t)$ имеет тот же знак, что и функция ${}^0_Pu_\lambda(t)$.

Если функция ${}^0_Pu_\lambda(t)$ на интервале (t^{**},t') положительна (отрицательна), то ряд (26) в любой точке $t\in(t^{**},t')$ можно расписать, пользуясь свойством аддитивности интеграла, как сумму ${}^0_Pu_\lambda(t^{**})$ и ${}^0_P\psi_-(\gamma,t)$, и ряда, каждый член которого тоже положителен (отрицателен), отсюда следует, что в точке t' функция ${}^0_Pu_\lambda(t)$ в нуль обратиться не может.

Полученное противоречие доказывает, что не может содержаться два нуля функции ${}^0_P\psi_-(\gamma,t)$ до первого нуля функции ${}^0_Pu_\lambda(t)$ или между некоторыми ее последовательными нулями. □

Теорема 7. *Пусть уравнения* (6) *и* (25) *неосцилляционны на промежутке* J, *вещественные числа* γ_1 *и* γ_2 *удовлетворяют неравенству* $\gamma_1<\gamma_2$, *функция* $\psi_-(\gamma_1,t)$ (*решение уравнения* (25) *при* $\gamma=\gamma_1$ *с начальным условием — первым из условий* (8)) *имеет* k_1 *нулей в* (a,b), *а функция* $\psi_-(\gamma_2,t)$ (*решение уравнения* (25) *при* $\gamma=\gamma_2$ *с начальным условием — первым из условий* (8)) *имеет* k_2 *нулей в* (a,b), *и* $k_2=k_1+p+1$. *Тогда вронскиан*

$$W(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))$$

имеет либо p *нулей в* J, *либо на единицу больше.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4, за теми лишь исключениями, что, во-первых, факт наличия, по крайней мере, одного нуля функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_2,t)$ до первого нуля функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_1,t)$, а также между ее любыми двумя последовательными нулями следует не из комплекса спектральных свойств Штурма, а из теорем 6 и 3.

Во-вторых, вообще говоря, возможны два случая:

a) либо после последнего нуля в (a,b) функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_1,t)$ есть, по крайней мере, один нуль функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_2,t)$;

b) либо нулей там вообще нет.

Случай a) приводит к тому, что вронскиан $W(\psi_-(\gamma_1,t),\,\psi_-(\gamma_2,t))$ имеет p нулей в (a,b), а случай b) приводит к тому, что этот вронскиан имеет $p+1$ нулей в (a,b). Причем, если b есть предельная точка относительно оператора L, то имеет место случай b). □

Пусть γ_1 и γ_2 $(\gamma_1<\gamma_2)$ не являются собственными значениями задачи (7), (8).

Будем предполагать, что $0<\gamma_1$ и в интервале $(0,\ \gamma_2)$ содержится, по крайней мере, одно собственное значение задачи (7), (8).

Теорема 8. *Пусть уравнение* (6) *неосцилляционно на* J *и* λ_ν *есть ближайшее слева к* γ_2 *собственное значение задачи* (7), (8), *а* λ_μ *есть ближайшее справа к* γ_1 *собственное значение задачи* (7), (8). *Пусть, далее,* $k_1\,(k_2)$ *есть число нулей функции* $\psi_-(\gamma_1,t)$ $(\psi_-(\gamma_2,t))$ *в* (a,b) *и* $k_2=k_1+p+1$. *Тогда число собственных значений задачи* (7), (8), *заключенных между* λ_μ *и* λ_ν, *равно* $p-1$.

Доказательство. Пусть $\lambda_{\mu'}$ — ближайшее слева к γ_1 собственное значение задачи (7), (8), тогда согласно теореме 6 число нулей функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_1,t)$ в (a,b) на единицу больше, чем число нулей функции ${}^0_Pu_{\lambda_{\mu'}}(t)$ или в силу неосцилляции уравнения (6) на J равно числу нулей функции ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$. Число нулей функции ${}^0_P\psi_-(\gamma_2,t)$ согласно следствию 1 на единицу превосходит число нулей функции ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ в (a,b). Кроме того, разность числа нулей функций ${}^0_Pu_{\lambda_\nu}(t)$ и ${}^0_Pu_{\lambda_\mu}(t)$ в (a,b) равна числу собственных значений задачи (7), (8), заключенных между λ_μ и λ_ν. Отсюда получаем утверждение теоремы. □

Следствие 2. Пусть выполнены все условия теоремы 8. Тогда число нулей вронскиана $W\left(\psi_-(\gamma_1,t),\ \psi_-(\gamma_2,t)\right)$ *в* (a,b) превосходит число нулей вронскиана $W(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ в (a,b) либо на единицу, либо на два.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает непосредственно из теорем 7 и 8. □

Сформулируем теперь основную теорему настоящей статьи.

Напомним, что L есть квазидифференциальный оператор второго порядка, порожденный общим самосопряженным квазидифференциальным выражением второго порядка $\ell x = {}_P^2 x$ $\left(\text{в котором} \quad p_{22}(t)=p_{00}(t) \quad \text{и} \quad p_{21}(t) = -\dfrac{p_{00}(t)}{p_{11}(t)}p_{10}(t), \quad t\in J, \quad \text{подробнее см. введение}\right)$ и двухточечными краевыми условиями вида (8).

Теорема 9. *Пусть уравнение* (6) *неосцилляционно на* J *и* $\gamma_1<\gamma_2$. *Тогда либо*

$$\dim \operatorname{Ran} P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0\left(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t)\right), \tag{27}$$

либо

$$\dim \operatorname{Ran} P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0\left(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t)\right)+1, \tag{28}$$

где (*см. введение*) *через* $W_0(\cdot,\cdot)$ *обозначено число нулей вронскиана* $W(\cdot,\cdot)$. *Если*

$$W_0(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)=0,$$

то $\dim \operatorname{Ran} P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L)=2$. *Если* b *есть предельная точка относительно оператора* L, *то имеет место равенство* (27).

Доказательство. Согласно следствию 2 $W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))$ превосходит $W_0(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ либо на единицу, либо на два. Поэтому между собственными числами λ_μ и λ_ν согласно теореме 5 имеется либо $W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))-1$, либо $W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))-2$ собственных значений задачи (7), (8). Отсюда, учитывая сами собственные значения λ_μ и λ_ν (принадлежащие интервалу (γ_1,γ_2)), получаем либо равенство (28), либо равенство (27). Если $W_0(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)=0$, то согласно теореме 5 между собственными значениями λ_μ и λ_ν нет ни одного собственного значения задачи (7), (8). Следовательно, в интервале (γ_1,γ_2) содержится только два собственных задачи (7), (8). Это числа λ_μ и λ_ν. Если b есть предельная точка относительно оператора L, то $W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))$ превосходит $W_0(u_{\lambda_\mu},u_{\lambda_\nu})(t)$ на два, и равенство (27) имеет место (так как в этом случае, учитывая сами собственные значения λ_μ и λ_ν, получаем, что

$$\dim \operatorname{Ran} P_{(\gamma_1,\gamma_2)}(L) = W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))-2+2 = W_0(\psi_-(\gamma_1,t),\psi_-(\gamma_2,t))).$$

□

Литература

[1] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Некоторые вопросы теории Штурма–Лиувилля*, УМН **15** (1(91)), 3–98 (1960).

[2] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию* (Наука, М., 1970).

[3] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения* (Наук. думка, Киев, 1977).

[4] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений* (*самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*) (Наука, М., 1979).

[5] Садовничий В.А. *Теория операторов* (Изд-во МГУ, М., 1986).

[6] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака* (Наука, М., 1988).

[7] Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом*, Изв. РАН, Сер. матем. **64** (4), 47–108 (2000).

[8] Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Матем. заметки **66** (6), 897–912 (1999).

[9] Савчук А.М. *О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом*, Матем. заметки **69** (2), 277–285 (2001).

[10] Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Тр. Московск. матем. об-ва **64**, 159–212 (2003).

[11] Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н. *Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом*, Вестн. САФУ. Сер. Естеств. науки (1), 104–113 (2016).

[12] Сафонова Т.А., Рябченко С.В. *О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом*, Вестн. САФУ. Сер. Естеств. науки (2), 115–125 (2016).

[13] Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети*, УМН **59** (3 (357)), 115–150 (2004).

[14] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Ищенко А.С., Шабров С.А. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля*, Матем. заметки **82** (4), 578–582 (2007).

[15] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач*, УМН **63** (1 (379)), 111–154 (2008).

[16] Митрохин С.И. *Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты* (ИНТУИТ, М., 2009).

[17] Митрохин С.И. *О спектральных свойствах многоточечной краевой задачи для дифференциального оператора нечетного порядка с суммируемым потенциалом*, Arctic Environmental Research **17** (4), 376–392 (2017).

[18] Митрохин С.И. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией*, Изв. вузов. Матем. (6), 31–47 (2018).

[19] Митрохин С.И. *Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (6), 46–58 (2018).

[20] Митрохин С.И. *Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией*, Журн. СВМО **22** (1), 48–70 (2020).

[21] Дерр В.Я. *Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения*, Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ (1 (16)), 3–105 (1999).

[22] Дерр В.Я. *Об адекватном описании сопряженного оператора*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки (3), 43–63 (2011).

[23] Шин Д.Ю. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка*, Матем. сб. **7 (49)** (3), 479–532 (1940).

[24] Шин Д.Ю. *О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве*, Матем. сб. **13 (55)** (1), 39–70 (1943).

[25] Everitt W.N., Marcus L. *Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators*, Amer. Math. Soc. **61** (1999).

[26] Eckhardt J., Gestezy F., Nichols R., Teschl G. *Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liuville operators with distributional potentials*, Opuscula Math. **33** (3), 467–563 (2013).

[27] Everitt W.N., Race D. *The regular representation of singular second-order differential expressions using quasi-derivatives*, Proc. London Math. Soc. **65** (2), 383–404 (1992).

[28] Xiao xia Lv, Ji-jun Ao, Zettl A. *Dependence of eigenvalues of fourth-order differential equations with discontinuous boundary conditions on the problem*, J. Math. Anal. Appl. **456** (1), 671–685 (2017).

[29] Qinglan Bao, Jiong Sun, Xiaoling Hao, Zettl A.*Characterization of self-adjoint domains for regular even order C-symmetric differential operators*, Electronic J. Qual. Theory Diff. Equat. (62), 1–17 (2019).

[30] Zettl A. *Sturm–Liouville Theory*, Amer. Math. Soc. (2005).

[31] Zettl A. *Recent Developments in Sturm–Liouville Theory* (De Gruyter, Berlin, Boston, 2021).

[32] Jianfang Qin, Kun Li, Zhaowen Zheng, Jinming Cai *Dependence of eigenvalues of discontinuous fourth-order differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions*, J. Nonlinear Math. Phys. **29** (4), 776–793 (2022).

[33] Владимиров А.А. *К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами*, Матем. заметки **100** (6), 800–806 (2016).

[34] Владимиров А.А. *О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств*, Матем. сб. **208** (9), 42–55 (2017).

[35] Владимиров А.А. *Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева. Дисс. . . . д-ра физ.-матем. наук* (Владимир, 2018).
[36] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (Наука, М., 1969).
[37] Gesztesy F., Simon B., Teschl G. *Zeros of the Wronskian and renormalized oscillation theory*, Amer. Math. Soc. **118**, 571–594 (1996).
[38] Покорный Ю.В. *О спектре интерполяционной краевой задачи*, УМН **32** (6), 263–264 (1977).
[39] Покорный Ю.В. *О неклассической задаче Валле Пуссена*, Дифференц. уравнения **14** (6), 1018–1027 (1978).
[40] Покорный Ю.В. *О переопределенной задаче Валле Пуссена*, Дифференц. уравнения **15** (4), 761 (1979).
[41] Покорный Ю.В., Лазарев К.П. *Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач*, Дифференц. уравнения **23** (4), 658–670 (1987).
[42] Боровских А.В., Покорный Ю.В. *Об осцилляционности спектра задач на некомпактном интервале*, Пробл. современ. теории периодич. движений (9), 21–30 (1988).
[43] Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем* (Гостехиздат, М.-Л., 1950).
[44] Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* I, Сиб. матем. журн. **17** (3), 606–625 (1976).
[45] Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* II, Сиб. матем. журн. **17** (4), 813–830 (1976).
[46] Боровских А.В. *Краевые задачи с особенностями. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук*, Дифференц. уравнения (ВГУ, Воронеж, 1990).
[47] Боровских А.В., Покорный Ю.В. *Системы Чебышева-Хаара в теории разрывных ядер Келлога*, УМН **49** (3(297)), 3–42 (1994).
[48] Дерр В.Я. *О спектре некоторых многоточечных задач, Удм. гос. ун-т, Устин. мех. ин-т. Деп. в* ВИНИТИ 23.01.87, № 533-В87 (Устинов, 1987).
[49] Дерр В.Я. *К обобщенной задаче Валле Пуссена*, Дифференц. уравнения **23** (11), 1861–1872 (1987).
[50] Дерр В.Я. *О применении квазидифференциальных уравнений в теории линейных многоточечных краевых задач. Дисс. . . . д-ра физ.-матем. наук* (Свердловск, 1990).
[51] Ватолкин М.Ю., Дерр В.Я. *О представлении решений квазидифференциального уравнения*, Изв. вузов. Матем. (10), 27–34 (1995).
[52] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений* (Физматгиз, М., 1959).

Михаил Юрьевич Ватолкин

Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, ул. Студенческая, д. 7, г. Ижевск, 426069, Россия,

e-mail: vmyu6886@gmail.com

M.Yu. Vatolkin

Investigation of the dimension of the spectral projection of a self-adjoint second order quasidifferential operator

Abstract. Let λ_1 and λ_2 be real, $\lambda_1 < \lambda_2$, functions $\psi_-(\lambda_i, t)$ be solutions to the second order quasidifferential equations $L\psi_- = \lambda_i \, {}^0_P\psi_-, i = 1, 2$, satisfying a homogeneous boundary condition at point a. We express the number of eigenvalues of operator L, belonging to the interval (λ_1, λ_2) $\big($or the dimension of its spectral projection relative to the interval $(\lambda_1, \lambda_2)\big)$, in terms of the number of zeros of the Vronskian composed for the functions $\psi_-(\lambda_1, t)$ and $\psi_-(\lambda_2, t)$.

Keywords: quasidifferential operator, spectral projection, self-adjoint quasidifferential expression.

Mikhail Yur'evich Vatolkin

Kalashnikov Izhevsk State Technical University, 7 Studencheskaya str., Izhevsk, 426069 Russia,

e-mail: vmyu6886@gmail.com