Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 7, с. 37–46 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.В. АМИНОВА, Д.Р. ХАКИМОВ

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ $H_{32,3}$ ТИПА $\{32\}$

Аннотация. Дана классификация h-пространств $H_{32,3}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство $H_{32,3}$ типа $\{32\}$, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли.

УДК: 514.763: 514.8

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-37-46

Введение

1. Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические [1], [2].

Векторное поле X на n-мерном псевдоримановом многообразии (M^n, g) с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $p \in M^n$ состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры Π [1].

Бесконечно малое проективное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в псевдоримановом многообразии (M, g), если и только если выполнено равенство

$$(L_X g_{ij})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \tag{1}$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование в (M^n, g), а φ — скаляр, называемый определяющей функцией проективного движения. Если φ — постоянная, то проективное движение является аффинным. При $h_{ij} = \nu g_{ij}$ аффинное движение сводится к гомотетии, а при $h_{ij} = 0$ является изометрическим движением [1], [3]–[6].

Уравнение (1) можно записать в виде двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij}$$

Поступила в редакцию 03.07.2023, после доработки 03.07.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Работа Д.Р. Хакимова выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{2}$$

(уравнение Эйзенхарта).

В работе [7] с помощью метода косонормального репера А.В. Аминовой определены пятимерные h-пространства H_{32} типа $\{32\}$ и установлены необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{32\}$. Показано, что в канонической карте (x, U) метрика g h-пространства H_{32}, билинейная форма h типа $\{32\}$ и соответствующая функция φ, удовлетворяющие уравнению Эйзенхарта, имеют вид

$$g = e_1(f_2 - f_1)^2 \left(4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right)dx^2dx^3\right) +$$
$$+e_1(f_2-f_1)^2\left(\varepsilon_1\left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\left(dx^3\right)^2 + e_2(f_1-f_2)^3\left(2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2\right), \tag{3}$$

$$h = (3f_1 + 2f_2)g + e_1(f_2 - f_1)^2\left(f_1\left(4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right)dx^2dx^3\right)\right) +$$
$$+e_1(f_2-f_1)^2\left(f_1\left(\varepsilon_1\left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\left(dx^3\right)^2 + 4Adx^2dx^3 + 4A\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{2A}{f_2 - f_1}\right)\left(dx^3\right)^2\right) +$$
$$e_2(f_1 - f_2)^3\left(f_2\left(2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2\right) + B^2\left(dx^5\right)^2\right), \tag{4}$$

$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2,$$

где $f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2$, c_1, c_2 — const, $A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2$, ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ — функция x^3, μ — функция x^5.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ h-пространство H_{32} обозначается символом $H_{32,1}$, при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{32,2}$, а при $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ — символом $H_{32,3}$. Случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ приводит к плоской метрике. Таким образом, всякое неплоское h-пространство H_{32} является либо $H_{32,1}$, либо $H_{32,2}$, либо, наконец, $H_{32,3}$.

Для получения максимальной проективной алгебры Ли в h-пространстве H_{32} необходимо найти общее решение уравнения Эйзенхарта в H_{32}. Это было сделано в статье [8], где установлены необходимые и достаточные условия для существования негомотетического проективного движения в пространстве H_{32}.

Доказано, что общее решение уравнения Эйзенхарта в H_{32} имеет вид $a_1h + 2a_2g$, где a_1, a_2 — произвольные постоянные, а g и h определены формулами (3), (4).

Как следствие показано, что если h-пространство типа $\{32\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру H_{r-1}. Аффинная подалгебра сводится к гомотетиям или изометриям.

Учитывая, что билинейная форма h определяется из уравнения Эйзенхарта (2) с точностью до слагаемого вида const $\cdot\, g$, после замены переменной $x^5 = c_1 + \overline{x}^5$, опустив черту, для h-пространства $H_{32,3}$ получим

$$g = e_1(x^5)^2\left(4dx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2\right) - 8e_1x^5dx^2dx^3 + 4e_1\left(dx^3\right)^2 - e_2B(x^5)^2\left(2x^5dx^4dx^5 + 3B\left(dx^5\right)^2\right), \tag{5}$$

$$h = 2x^5g + 4e_1x^5\left(x^5dx^2dx^3 - 2\left(dx^3\right)^2\right) - e_2B(x^5)^3\left(2x^5dx^4dx^5 + 3B\left(dx^5\right)^2 + B\left(dx^5\right)^2\right), \tag{6}$$

$$\varphi = x^5,$$

где $B = x^4 + \mu(x^5)$, $e_1, e_2 = \pm 1$, μ — функция x^5.

В данной статье будут определены все h-пространства $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, допускающие негомотетические проективные движения, и сами эти движения. Решение этой задачи сводится к интегрированию обобщенных уравнений Киллинга

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \equiv \xi^s \partial_s g_{ij} + g_{is}\partial_j \xi^s + g_{sj}\partial_i \xi^s = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij} \quad (a_1, a_2 - \mathrm{const}) \tag{7}$$

и существенно упрощается благодаря использованию условий интегрируемости (12) уравнений (7), включающих тензор кривизны, и теоремам 1 и 2 (см. раздел 1).

В теореме 1 (см. раздел 1) устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,3}$ является пространством постоянной кривизны, что позволяет исключить из рассмотрения пространства постоянной кривиизны S^5, допускающие максимальную 35-мерную проективную алгебру Ли, строение которой известно ([1], гл. 4).

В теореме 2 (см. раздел 2) формулируются общие свойства проективных векторных полей в пространствах $H_{32,3}$.

Непосредственному интегрированию обобщенных уравнений Киллинга (7) в пространствах $H_{32,3}$ непостоянной кривизны посвящен раздел 3, где выводится теорема 3.

Классификация h-пространств $H_{32,3}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований дается в теореме 4 (см. раздел 4), где перечисляются все проективно-подвижные метрики и указываются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных негомотетических проективных алгебр Ли.

1. Условия постоянства кривизны h-пространства $H_{32,3}$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что из коэффициентов связности метрики (5) пространства $H_{32,3}$ не равны нулю только следующие:

$$\Gamma^1_{15} = \frac{1}{x^5}, \quad \Gamma^1_{25} = \frac{1}{x^{5^2}}, \quad \Gamma^1_{35} = \frac{2}{x^{5^3}}, \quad \Gamma^2_{25} = \frac{1}{x^5},$$

$$\Gamma^2_{35} = \frac{2}{x^{5^2}}, \quad \Gamma^3_{35} = \frac{1}{x^5}, \quad \Gamma^4_{13} = \frac{2e_1e_2}{x^{5^2}B}, \quad \Gamma^4_{22} = \frac{e_1e_2}{x^{5^2}B},$$

$$\Gamma^4_{23} = -\frac{2e_1e_2}{x^{5^3}B}, \quad \Gamma^4_{44} = \frac{1}{B}, \quad \Gamma^4_{45} = \frac{3}{x^5}, \quad \Gamma^4_{55} = \frac{3B}{x^{5^2}}, \quad \Gamma^5_{55} = \frac{1}{B}\frac{d\mu}{dx^5}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны пространства $H_{32,3}$ имеют вид

$$R^1_{515} = \frac{1}{x^5 B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^1_{525} = \frac{1}{x^{5^2} B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^1_{535} = \frac{2}{x^{5^3} B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^2_{525} = \frac{1}{x^5 B}\frac{d\mu}{dx^5},$$

$$R^2_{535} = \frac{2}{x^{5^2} B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^3_{535} = \frac{1}{x^5 B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^4_{135} = \frac{2e_1e_2}{x^{5^2} B^2}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^4_{225} = \frac{e_1e_2}{x^{5^2} B^2}\frac{d\mu}{dx^5}, \tag{8}$$

$$R^4_{235} = -\frac{2e_1e_2}{x^{5^3} B^2}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^4_{315} = \frac{2e_1e_2}{x^{5^2} B^2}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^4_{325} = -\frac{2e_1e_2}{x^{5^3} B^2}\frac{d\mu}{dx^5},$$

$$R^4_{445} = \frac{1}{B^2}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^4_{545} = \frac{3}{x^5 B}\frac{d\mu}{dx^5}, \quad R^5_{545} = -\frac{1}{B^2}\frac{d\mu}{dx^5}.$$

Теорема 1. *H-пространство $H_{32,3}$ является пространством постоянной кривизны K, если и только если выполняется условие*

$$\frac{d\mu}{dx^5} = 0; \tag{9}$$

при этом $K = 0$, т. е. всякое h-пространство $H_{32,3}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны псевдориманова пространства с метрикой g и тензором римановой кривизны R^i_{jkl} определяется равенством

$$R^i_{jkl} = K\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right),$$

где K — постоянная кривизна, в частности, $R^1_{525} = 0$.

Если h-пространство $H_{32,3}$ имеет постоянную кривизну, то из равенства $R^1_{525} = 0$ и формул (8) следует $\dfrac{d\mu}{dx^5} = 0$, после этого все компоненты тензора кривизны R^i_{jkl} обращаются в нуль, т. е. пространство $H_{32,3}$ плоское. Наоборот, из условия (9) и формул (8) следует $R^i_{jkl} = 0$. □

2. Свойства проективных векторных полей в h-пространстве $H_{32,3}$

Теорема 2. *Если инфинитезимальное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, то в канонической карте компоненты ξ^i проективного векторного поля $X = \xi^i \partial_i$ зависят, самое большее, от указанных ниже переменных:*

$$\xi^1 = \xi^1\big(x^1, x^2, x^3\big), \quad \xi^2 = \xi^2\big(x^1, x^2, x^3\big), \quad \xi^3 = \xi^3\big(x^2, x^3\big), \quad \xi^4 = \xi^4\big(x^4, x^5\big), \quad \xi^5 = \xi^5\big(x^5\big). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим в канонической карте (x, U) обобщенные уравнения Киллинга (7)

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^s \partial_s g_{ij} + g_{is} \partial_j \xi^s + g_{sj} \partial_i \xi^s = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij} \tag{11}$$

вместе с условиями их интегрируемости ([1], с. 230)

$$L_X R^i_{jkl} \equiv \xi^s \partial_s R^i_{jkl} - R^s_{jkl} \partial_s \xi^i + R^i_{skl} \partial_j \xi^s + R^i_{jsl} \partial_k \xi^s + R^i_{jks} \partial_l \xi^s = \delta^i_l \varphi_{,jk} - \delta^i_k \varphi_{,jl}, \tag{12}$$

где R^i_{jkl} — компоненты тензора кривизны метрики g_{ij}, а φ — определяющая функция проективного движения $X = \xi^s \partial_s$.

Используя равенства (5), (6), запишем систему (11) из пятнадцати дифференциальных уравнений в частных производных:

1) $\partial_1 \xi^3 = 0,$

2) $\partial_2 \xi^3 + \dfrac{1}{2} \partial_1 \xi^2 - \dfrac{2}{x^5} \partial_1 \xi^3 = 0,$

3) $\partial_1 \xi^1 - \dfrac{2}{x^5} \partial_1 \xi^2 + \partial_3 \xi^3 + \dfrac{2}{x^5} \xi^5 = 2\big(a_1 x^5 + a_2\big),$

4) $\partial_4 \xi^3 - \dfrac{1}{2}\big(x^4 + \mu(x^5)\big) x^5 \partial_1 \xi^5 = 0,$

5) $\partial_5 \xi^3 - \dfrac{1}{2}\big(x^4 + \mu(x^5)\big)\left(x^5 \partial_1 \xi^4 - 3\big(x^4 + \mu(x^5)\big) \partial_1 \xi^5\right) = 0,$

6) $\partial_2\xi^2 - \dfrac{4}{x^5}\partial_2\xi^3 + \dfrac{1}{x^5}\xi^5 = a_1x^5 + a_2,$

7) $\partial_2\xi^1 + \dfrac{1}{2}\partial_3\xi^2 - \dfrac{2}{x^5}\left(\partial_2\xi^2 + \partial_3\xi^3\right) + \dfrac{2}{{x^5}^2}\left(\partial_2\xi^3 - \xi^5\right) = -3a_1 + \dfrac{4}{x^5}a_2,$

8) $\partial_4\xi^2 - \big(x^4 + \mu(x^5)\big)x^5\partial_2\xi^5 - \dfrac{4}{x^5}\partial_4\xi^3 = 0,$

9) $\partial_5\xi^2 - \dfrac{4}{x^5}\partial_5\xi^3 - \big(x^4 + \mu(x^5)\big)\left(x^5\partial_2\xi^4 + 3\big(x^4 + \mu(x^5)\big)\partial_2\xi^5\right) = 0,$

10) $\partial_3\xi^1 - \dfrac{2}{x^5}\partial_3\xi^2 + \dfrac{2}{{x^5}^2}\partial_3\xi^3 = \dfrac{2}{{x^5}^2}a_2,$

11) $\partial_4\xi^1 - \dfrac{2}{x^5}\partial_4\xi^2 - \dfrac{1}{2}\big(x^4 + \mu(x^5)\big)x^5\partial_3\xi^5 = 0,$

12) $\partial_5\xi^1 - \dfrac{2}{x^5}\partial_5\xi^2 - \dfrac{1}{2}\big(x^4 + \mu(x^5)\big)\left(x^5\partial_3\xi^4 + 3\big(x^4 + \mu(x^5)\big)\partial_3\xi^5\right) = 0,$

13) $\partial_4\xi^5 = 0,$

14) $\partial_4\xi^4 + \partial_5\xi^5 + \dfrac{1}{\big(x^4 + \mu(x^5)\big)}\left(\xi^4 + \dfrac{d\mu}{dx^5}\xi^5\right) + \dfrac{3}{x^5}\xi^5 = 3a_1x^5 + 2a_2,$

15) $\partial_5\xi^4 + \dfrac{3}{{x^5}^2}\big(x^4 + \mu(x^5)\big)\left(x^5\partial_5\xi^5 + \xi^5\right) + \dfrac{3}{x^5}\left(\xi^4 + \dfrac{d\mu}{dx^5}\xi^5\right) = \big(x^4 + \mu(x^5)\big)\left(5a_1 + \dfrac{3}{x^5}a_2\right).$

Из уравнений $1), 13)$ найдем $\partial_1\xi^3 = \partial_4\xi^5 = 0$.

Далее из (12) при $(ijkl) = (1125)$ с помощью формул (8) получим $R^1_{525}\partial_1\xi^5 = 0$. Если $\partial_1\xi^5 \neq 0$, то $\dfrac{d\mu}{dx^5} = 0$, и $H_{32,3}$ по теореме 1 имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению.

Поэтому $\partial_1\xi^5 = 0$, и из уравнения 4) выводим $\partial_4\xi^3 = 0$. Тогда из (12) при $(ijkl) = (3545)$ найдем $R^5_{545}\partial_5\xi^3 = 0$, отсюда ввиду условия $\dfrac{d\mu}{dx^5} \neq 0$ следует $\partial_5\xi^3 = 0$. Затем из уравнения 5) выведем $\partial_1\xi^4 = 0$.

После этого из (12) при $(ijkl) = (1135)$ с учетом равенства $\partial_1\xi^5 = 0$ получим $R^4_{135}\partial_4\xi^1 = 0$ и в силу формул (8) $\partial_4\xi^1 = 0$.

Учитывая выведенные равенства, из (12) при $(ijkl) = (1225)$ получим $R^1_{525}\partial_2\xi^5 = 0$, отсюда $\partial_2\xi^5 = 0$ и в силу равенства $\partial_4\xi^3 = 0$ из уравнения 8) выводим $\partial_4\xi^2 = 0$.

Из (12) при $(ijkl) = (2545)$ получим $\partial_5\xi^2 = 0$. Затем из уравнений $9), 11)$ найдем $\partial_2\xi^4 = \partial_3\xi^5 = 0$.

Наконец, из (12) при $(ijkl) = (1545)$ следует $\partial_5\xi^1 = 0$ и из уравнения 12) имеем $\partial_3\xi^4 = 0$.

Это завершает вывод формул (10) и теоремы 2. □

3. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны

Ввиду теоремы 2 часть уравнений Киллинга 1)–15) обращаются в тождество, остальные (2), 3), 6), 7), 10), 14), 15)) приводятся к виду

$$2\partial_2\xi^3 + \partial_1\xi^2 = 0, \tag{13}$$

$$\partial_1\xi^1 - \frac{2}{x^5}\big(\partial_1\xi^2 - \xi^5\big) + \partial_3\xi^3 = 2\big(a_1x^5 + a_2\big), \tag{14}$$

$$\partial_2\xi^2 - \frac{1}{x^5}\big(4\partial_2\xi^3 - \xi^5\big) = a_1x^5 + a_2, \tag{15}$$

$$\partial_2\xi^1 + \frac{1}{2}\partial_3\xi^2 - \frac{2}{x^5}\big(\partial_2\xi^2 + \partial_3\xi^3\big) + \frac{2}{{x^5}^2}\big(\partial_2\xi^3 - \xi^5\big) = -3a_1 - \frac{4}{x^5}a_2, \tag{16}$$

$$\partial_3\xi^1 + \frac{2}{{x^5}^2}\big(\partial_3\xi^3 - x^5\partial_3\xi^2\big) = \frac{2}{{x^5}^2}a_2, \tag{17}$$

$$\big(x^4+\mu(x^5)\big)\left(\partial_4\xi^4 + \frac{d\xi^5}{dx^5} + \frac{3}{x^5}\xi^5\right) + \xi^4 + \xi^5\frac{d\mu}{dx^5} = \big(x^4+\mu(x^5)\big)\left(3a_1x^5 + 2a_2\right), \tag{18}$$

$$\partial_5\xi^4 + \frac{3}{{x^5}^2}\big(x^4+\mu(x^5)\big)\left(x^5\frac{d\xi^5}{dx^5} + \xi^5\right) + \frac{3}{x^5}\left(\xi^4 + \frac{d\mu}{dx^5}\xi^5\right) = \frac{1}{x^5}\big(x^4+\mu(x^5)\big)\left(5a_1x^5 + 3a_2\right). \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (18) по x^4, найдем

$$\xi^4 = \frac{1}{2}\left(3a_1x^5 + 2a_2 - \frac{d\xi^5}{dx^5} - \frac{3}{x^5}\xi^5\right)\big(x^4+\mu(x^5)\big) - \xi^5\frac{d\mu}{dx^5} + \frac{\chi(x^5)}{\big(x^4+\mu(x^5)\big)}, \tag{20}$$

где $\chi = \chi(x^5)$ — функция x^5. Теперь, дифференцируя (19) дважды по x^4, получим

$$\left(x^5\frac{d\chi}{dx^5} + 3\chi\right)\big(x^4+\mu(x^5)\big) - 3x^5\chi\frac{d\mu}{dx^5} = 0,$$

отсюда следует сначала $x^5 d\chi/dx^5 + 3\chi = 0$, затем $\chi d\mu/dx^5 = 0$. Поэтому $\chi = 0$, ибо при $d\mu/dx^5 = 0$ выполняется (9) и, вопреки предположению, по теореме 1 исследуемое h-пространство имеет постоянную кривизну.

Пользуясь (20), где положено $\chi(x^5) = 0$, продифференцируем (19) один раз по x^4, в итоге найдем

$$\frac{d^2\xi^5}{dx^5} = 2a_1,$$

поэтому

$$\xi^5 = a_1\big(x^5\big)^2 + a_3x^5 + C, \tag{21}$$

где a_3, C — постоянные интегрирования. После этого из (20) имеем

$$\xi^4 = \big(-a_1x^5 + a_2 - 2a_3)\big)\big(x^4+\mu(x^5)\big) - x^5\big(a_1x^5 + a_3\big)\frac{d\mu}{dx^5}.$$

Из уравнения (17), учитывая теорему 2, найдем $\partial_3\xi^1 = \partial_3\xi^2 = 0,\ \partial_3\xi^3 = a_2$. Положим

$$\xi^1 = \alpha\big(x^1,x^2\big), \quad \xi^2 = \beta\big(x^1,x^2\big), \quad \xi^3 = a_2x^3 + \gamma\big(x^2\big),$$

где $\alpha\big(x^1,x^2\big)$, $\beta\big(x^1,x^2\big)$ и $\gamma\big(x^2\big)$ — функции указанных переменных.

Также из (15) и (21) получим $\partial_2\xi^2 = a_2 - a_3 = 0, \quad \partial_2\xi^3 = \partial_2\gamma = (1/4)C$, в итоге имеем

$$\xi^2 = (a_2 - a_3)\,x^2 + \delta\big(x^1\big),$$

$$\xi^3 = \frac{C}{4}x^2 + a_2x^3 + a_4, \tag{22}$$

где a_4 — постоянная, δ — функция x^1. Из уравнения (13) следует равенство $\partial_1\xi^2 = \partial_1\beta = -(1/2)C$, поэтому

$$\xi^2 = -\frac{C}{2}x^1 + (a_2 - a_3)\,x^2 + a_5 \tag{23}$$

(a_5 — постоянная интегрирования).

Из (14) выводим $\partial_1\xi^2 = C$, отсюда, сравнивая с (23), находим $C = 0$. Кроме того, из (14) и (22) следует равенство $\partial_1\xi^1 = -\partial_3\xi^3 + 2(a_2 - a_3) = a_2 - 2a_3$ и из (16) $\partial_2\xi^1 = \partial_2\alpha = -a_1$. В результате

$$\xi^1 = (a_2 - 2a_3)\, x_1 - a_1 x^2 + a_6$$

(a_6 — постоянная).

Подставив найденные значения компонент ξ^i в уравнение (19), получим

$$x^5\big(a_1x^5 + a_3\big)\frac{d^2\mu}{dx^{5^2}} + \big[3\big(a_1x^5 + a_3\big) - a_2\big]\frac{d\mu}{dx^5} = 0. \tag{24}$$

Остальные уравнения Киллинга (13)–(18) удовлетворяются тождественно.

Доказана

Теорема 3. *Если h-пространство $H_{32,3} \equiv (M, g)$ непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение X, то вокруг каждой точки $p \in M$ существует каноническая карта (x, U), в которой метрика $g|_U$ этого пространства и проективное движение $X|_U = \xi^i\partial_i$ определяются формулой (5) и следующими условиями:*

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = (a_2 - 2a_3)x^1 - a_1x^2 + a_6,\\
&\xi^2 = (a_2 - a_3)x^2 + a_5,\\
&\xi^3 = a_2x^3 + a_4,\\
&\xi^4 = \big(-a_1x^5 + a_2 - 2a_3\big)\big(x^4 + \mu(x^5)\big) - x^5\big(a_1x^5 + a_3\big)\frac{d\mu}{dx^5},\\
&\xi^5 = a_1\big(x^5\big)^2 + a_3x^5,\\
&x^5\big(a_1x^5 + a_3\big)\frac{d^2\mu}{dx^{5^2}} + \big[3\big(a_1x^5 + a_3\big) - a_2\big]\frac{d\mu}{dx^5} = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

где $a_1, \ldots, a_6$ — постоянные интегрирования, μ — функция x^5.

4. Алгебры Ли проективных движений в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны

Для нахождения негомотетических проективных алгебр Ли, действующих в h-пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, воспользуемся следующим предложением.

Лемма ([9], с. 134)**.** *Для того чтобы V^n допускало r-мерную максимальную алгебру Ли P_r, необходимо и достаточно, чтобы ранг R системы Θ однородных линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i, образованный уравнениями*

$$\sum_{k=1}^{q} a_k T_k^\alpha = 0 \tag{26}$$

(здесь $a_1, \ldots, a_q$ — постоянные интегрирования, T_k^α зависят только от констант и функций, определяющих компоненты метрического тензора g_{ij}) и всеми их дифференциальными следствиями, равнялся $q - r$.

В нашем случае $q = 6$, а система (26) сводится к уравнению (24), которое запишем в виде

$$x^5ua_1 - a_2 + ua_3 + 0\cdot a_4 + 0\cdot a_5 + 0\cdot a_6 = 0, \tag{27}$$

введя обозначение

$$u \equiv x^5\frac{\mu''}{\mu'} + 3$$

и приняв во внимание условие $\mu' \neq 0$ непостоянства кривизны.

Система Θ образуется уравнением (27) и его дифференциальными следствиями. Выпишем те строки матрицы этой системы, которые соответствуют уравнению (27) и его ближайшим дифференциальным следствиям:

$$\begin{pmatrix} x^5u & -1 & u & 0 & 0 & 0 \\ x^5u'+u & 0 & u' & 0 & 0 & 0 \\ x^5u''+2u' & 0 & u'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Так как ранг матрицы (28) $3 \geq Rk \geq 1$, то в соответствии с леммой размерности максимальной проективной алгебры Ли P_r в пространстве $H_{32,3}$ непостоянной кривизны $r \leq 5$.

В случае $Rk = 3$ система Θ имеет единственное решение $a_1 = a_2 = a_3$, и проективная алгебра сводится к изометриям, поэтому остаются два случая.

Случай P_5, $Rk = 1$. Приравнивая нулю миноры второго порядка матрицы (28), получим $u = 0$ и из (27) $a_2 = 0$, т. е. неизометрические гомотетии отсутствуют.

Интегрируя уравнение $u = 0$, найдем $\mu = (p/2)(x^5)^{-2} + q$, где $p \neq 0$, q — постоянные. После замены $\overline{x}^4 = x^4 + q$, не меняющей вида метрики (5), опустив черту, имеем

$$\mu = \frac{p}{2(x^5)^2} \quad (p = \mathrm{const} \neq 0). \tag{29}$$

Случай P_4, $Rk = 2$. Решение системы Θ зависит от одной из переменных a_1, a_2, a_3. Полагая $a_1 \neq 0$ (иначе проективное движение сводится к гомотетиям) и $a_2 \equiv a_1 t$, $a_3 \equiv a_1 s$ в уравнении (24), после его интеграции и замены $\overline{x}^4 = x^4 + q$ получим

$$\mu = p(t - s + x^5)(x^5)^{t/s-2}(x^5 + s)^{1-t/s} \quad (p, t, s \text{ — const};\ p, s \neq 0). \tag{30}$$

К такому же результату придем, приравняв нулю миноры третьего порядка матрицы (28) и интегрируя уравнение $uu'' = 2u'^2$.

Если записать уравнения (25) в виде

$$\xi^i = \sum_{l=1} a_l A_l^i \quad (i = 1, \ldots, 5),$$

где a_l — свободные параметры из числа $a_1, \ldots, a_6$, то $E_l = A_l^i \partial_i$ будут базисными генераторами соответствующей проективной алгебры Ли.

Сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 4. *Если 5-мерное h-пространство $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ (5) непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение, то это пространство и действующая в нем максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли P определяются приведенными ниже формулами, где $\underset{n}{E}$ — неаффинное проективное движение, $\underset{г}{E}$ — неизометрическая инфинитезимальная гомотетия, $\underset{u}{E}$ — инфинитезимальная изометрия.*

1) *Функция μ имеет вид* (29)

$$\mu = \frac{p}{2(x^5)^2} \quad (p = \mathrm{const} \neq 0).$$

Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 5$. *Алгебра P натянута на проективное векторное поле*

$$\underset{n}{E}_1 = x^2\partial_1 + \left(x^4x^5 - \frac{p}{2x^5}\right)\partial_4 - (x^5)^2\partial_5,$$

инфинитезимальную изометрию

$$\underset{u}{E}_2 = 2x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + 2x^4\partial_4 - x^5\partial_5$$

и три трансляции $\underset{u}{E}_3 = \partial_1,\ \underset{u}{E}_4 = \partial_2,\ \underset{u}{E}_5 = \partial_3$.

Структурные уравнения имеют вид

$$[E_2, E_1] = E_1, \quad [E_3, E_2] = 2E_3, \quad [E_4, E_1] = E_3, \quad [E_4, E_2] = E_4,$$

остальные коммутаторы равны нулю.

2) *Функция* μ *задается равенством* (30)

$$\mu = p\big(t - s + x^5\big)\big(x^5\big)^{t/s-2}\big(x^5 + s\big)^{1-t/s} \quad (p, t, s\ \text{— const},\ p, s \neq 0).$$

Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 4$. *Базис в* P *состоит из* (*негомотетического*) *проективного движения*

$$\underset{n}{E}_1 = \big((t - 2s)x^1 - x^2\big)\,\partial_1 + (t - s)x^2\partial_2 + tx^3\partial_3 + \\ + \Big(\big(t - 2s - x^5\big)x^4 - p\big(x^5\big)^{t/s-1}\big(x^5 + s\big)^{2-t/s}\Big)\,\partial_4 + x^5\big(x^5 + s\big)\partial_5,$$

и трех трансляций $\underset{u}{E}_2 = \partial_1,\ \underset{u}{E}_3 = \partial_2,\ \underset{u}{E}_4 = \partial_3$.

Структура алгебры Ли P *задается уравнениями*

$$[E_2, E_1] = (t - 2s)E_2, \quad [E_3, E_1] = (t - s)E_3, \quad [E_4, E_1] = tE_4,$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Заключение

Рассмотрены инфинитезимальные проективные преобразования 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) в форме h-пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ [7]. Определены необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,3}$ является пространством постоянной (нулевой) кривизны. Найдены негомотетические проективные движения в пространствах $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, исследованы гомотетии и изометрии указанных пространств, определены размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. В итоге получена классификация h-пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований (теорема 4).

Литература

[1] Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* (Янус-К, М., 2003).

[2] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* (Ин. лит., М., 1948).

[3] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий*, УМН **50** (1), 69–142 (1995).

[4] Аминова А.В. *О полях тяготения, допускающих группы проективных движений*, Докл. АН СССР **197** (4), 807–809 (1971).

[5] Аминова А.В. *Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств*, Тр. Геом. семин. (ВИНИТИ, М.), **6**, 295–316 (1974).

[6] Аминова А.В. *Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности.* I, Тр. Геом. семин. (ВИНИТИ, М.), **6**, 317–346 (1974).

[7] Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *О проективных движениях 5-мерных пространств.* I. *h-пространства типа* $\{32\}$, Пространство, время и фундамент. взаимодействия (4), 21–31 (2018).

[8] Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств* H_{32} *типа* $\{32\}$, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ-матем. науки **162** (2), 111–119 (2020).

[9] Аминова А.В. *Проективные симметрии гравитационных полей* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2018).

Ася Васильевна Аминова
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Джамолиддин Рахмонович Хакимов
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: dzhamoliddink@mail.ru

A.V. Aminova and D.R. Khakimov

Lie algebras of projective motions of rigid h-spaces $H_{32,3}$ of the type $\{32\}$

Abstract. A classification of h-spaces $H_{32,3}$ of non-constant curvature with respect to (non-homothetic) Lie algebras of infinitesimal projective and affine transformations is given.

Keywords: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space $H_{32,3}$ of type $\{32\}$, systems of partial differential equations, non-homothetical projective motion, Killing equations, projective Lie algebra.

Asya Vasilyevna Aminova
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Dzhamoliddin Rakhmonovich Khakimov
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: dzhamoliddink@mail.ru