Известия вузов. Математика
2024, № 7, с. 24–36

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.О. АКОБИРШОЕВ

О НАИЛУЧШЕМ СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ "УГЛОМ" В СРЕДНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

Аннотация. В метрике L_2 получены точные неравенства между величиною наилучших совместных приближений дифференцируемых 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x,y)$ и их последовательных производных $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ $(\mu = 0,1,\dots,r; \nu = 0,1,\dots,s)$ тригонометрическими "углами" с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных. Найдены точные значения верхней грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности.

Ключевые слова: наилучшее совместное приближение, тригонометрический "угол", квазиполином, смешанный модуль непрерывности.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-24-36

Введение. Вспомогательные факты

Целью данной работы является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими "углами" и их соответствующими производными. Отметим, что понятие "угол" было введено М.К. Потаповым [1], [2] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками (см., например, [3]–[12] и литературу, приведенную в них). При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата "углов" в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно "углы" дают минимальные оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников [6]–[12]. Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена использованию одной из характеристик гладкости функций, рассмотренных ранее С.Б. Вакарчуком [13], [14].

Предварительно приводим определения и вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \operatorname{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \ V_n := \operatorname{span}\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

Поступила в редакцию 05.06.2023, после доработки 20.10.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

— их конечномерные подпространства $U_m \subset X,\ V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x)\psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y)\varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ — соответственно произвольные наборы функций из пространств X и Y, назовем обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространства, которые обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “$\otimes$” и “$\oplus$” обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — линейное нормированное пространство, содержащее подпространство $G_{m,n}$. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z := \mathcal{E}(f; G_{m,n})_Z = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n}\right\} \tag{1}$$

и если $\mathfrak{M}$ — некоторое множество функций f из $(Z, \|\cdot\|_Z)$, то положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup\left\{\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z :\ f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{2}$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а (2) — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$, $Z = L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$. Пусть теперь

$$U^*_{2m+1} := \operatorname{span}\left\{e^{ipx}\right\}_{p=-m}^{m} \subset L_2[0, 2\pi],\ V^*_{2m+1} := \operatorname{span}\left\{e^{iqx}\right\}_{q=-n}^{n} \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{|p|\le m} \psi_p(y)e^{ipx} + \sum_{|q|\le n} \phi_q(x)e^{iqy}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

принадлежит подпространству $G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$. Функции вида (3) называют тригонометрическими “углами” [1], [2] или тригонометрическими квазиполиномами [15]. Пусть $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$, — пространство комплекснозначных 2π-периодических по каждой из переменных функций f, суммируемых с квадратом модуля и конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2}(Q) = \left(\frac{1}{4\pi^2}\iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2}.$$

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}, \tag{4}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2}\iint_{(Q)} f(x,y)e^{-i(px+qy)}dxdy$$

— двойные коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(Q)$, квазиполиномом Фурье порядка (m,n), $m, n \in \mathbb{N}$, называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) = \left(\sum_{|p|\le m}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{|q|\le n} - \sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\le n}\right) c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}. \tag{5}$$

Легко проверить, что $\Phi_{m,n}(f)$ принадлежит $G(U_m^*,\, V_n^*)$. В [12] доказано, что

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \inf\{\|f - g_{m-1,n-1}\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\} =$$

$$= \|f - \Phi_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\ge n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f), \tag{6}$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho^2_{p,q}(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \tag{7}$$

В частности, из (6) следует, что если $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \mathcal{E}^2_{m-1}(f_1)_2 \cdot \mathcal{E}^2_{n-1}(f_2)_2, \tag{8}$$

где, как обычно,

$$\mathcal{E}^2_{\nu-1}\,(g)_2 := \inf\{\|g - T_{\nu-1}\|_2^2 : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1}\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения 2π-периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := \operatorname{span}\left\{e^{ijx}\right\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in C(Q)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \partial^{\mu+\nu} f/\partial x^\mu \partial y^\nu, \quad \mu \le r,\ \nu \le s,$$

а через $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, — множество функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, $s \ge 2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0,s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0,r-1}$, $s \in \mathbb{N}$, существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные $f^{(r,0)}$, $f^{(0,s)}$ и смешанная производная $f^{(r,s)}$ принадлежат пространству L_2.

Для произвольной функции $f \in L_2$ определим модуль непрерывности k-го порядка по переменной x и l-го порядка по переменной y

$$\omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 := \sup\left\{\|\Delta^{k,l}_{u,v} f(\cdot,\cdot)\|_2 : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\}, \tag{9}$$

где

$$\Delta^{k,l}_{u,v} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu+\nu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu u,\ y+\mu v).$$

Использовав равенство (4) и тождество Парсеваля, величину (9) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в виде

$$\omega^2_{k,l}(f;t,\tau)_2 := 2^{k+l}\sup\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f)(1-\cos pu)^k(1-\cos qv)^l : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\}. \tag{10}$$

Отметим, что ряд экстремальных задач с использованием смешанного модуля непрерывности (10) решен, например, в работах [5], [8].

При решении некоторых задач теории аппроксимации вместо модуля непрерывности (10) иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$:

$$\Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 = \left\{\frac{1}{t^k\tau^l}\int_0^t\cdots\int_0^t\int_0^\tau\cdots\int_0^\tau \left\|\Delta^{k,l}_{\overline{u},\overline{v}} f(\cdot,\cdot)\right\|_2^2 du_1\cdots du_k dv_1\cdots dv_l\right\}^{1/2}, \quad t,\tau > 0, \tag{11}$$

где $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, $\overline{v} = (v_1, v_2 \dots v_l)$, а $\Delta^{k,l}_{\overline{u},\overline{v}} := \Delta^1_{u_1} \circ \dots \circ \Delta^1_{u_k} \Delta^1_{v_1} \circ \dots \circ \Delta^1_{v_l}$, (см., например, [13], [14]). Обозначим $\operatorname{sinc} t := (\sin t)/t$ $(t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, полагая $\operatorname{sinc} 0 := 1$. Используя равенство (4) и тождество Парсеваля, после выполнения некоторых несложных вычислений величину (11) можно записать в следующем явном виде:

$$\Omega^2_{k,l}(f; t, \tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_{p,q}(f)|^2 (1 - \operatorname{sinc} pt)^k (1 - \operatorname{sinc} q\tau)^l =$$

$$= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \rho^2_{p,q}(f)(1 - \operatorname{sinc} pt)^k (1 - \operatorname{sinc} q\tau)^l, \quad t, \tau > 0. \tag{12}$$

Далее, при $k = l$ полагаем $\Omega_k(f)_2 := \Omega_{k,k}(f)_2$. Заметим, что если функция $f \in L_2^{(r,s)}$, то, дифференцируя двойной ряд (4) r раз по переменной x и s раз по переменной y в смысле сходимости в L_2, запишем

$$f^{(r,s)}(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f) e^{i(px+qy)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{p,q}(f^{(r,s)}) e^{i(px+qy)},$$

где положено

$$c_{p,q}(f^{(r,s)}) = (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f).$$

Поскольку

$$|c_{p,q}(f^{(r,s)})|^2 = p^{2r} q^{2s} |c_{p,q}(f)|^2,$$

то в силу равенства (7) имеем

$$\rho^2_{p,q}(f^{(r,s)}) = p^{2r} q^{2s} \rho^2_{p,q}(f). \tag{13}$$

Учитывая равенство (13), из (12) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\Omega^2_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho^2_{p,q}(f)(1 - \operatorname{sinc} pt)^k (1 - \operatorname{sinc} q\tau)^l. \tag{14}$$

1. Основные результаты

В обозначениях, принятых в предыдущем разделе, справедлива

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любых $h, \eta \in (0, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \left\{ \frac{m}{2(mh - \operatorname{Si}(mh))} \frac{n}{2(n\eta - \operatorname{Si}(n\eta))} \right\}^{k/2}, \tag{15}$$

где $\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \operatorname{sinc} u du$ *— интегральный синус.*

Доказательство. Сначала докажем, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f)(\operatorname{sinc} pt + \operatorname{sinc} q\tau - \operatorname{sinc} pt \operatorname{sinc} q\tau) \le$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau). \tag{16}$$

Действительно, замечаем, что при $k=l$ из (14) следует

$$\Omega_k^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2 = 4^k\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k. \tag{17}$$

Используя неравенство Гёльдера для сумм, с учетом (6) имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(\operatorname{sinc}pt+\operatorname{sinc}q\tau-\operatorname{sinc}pt\operatorname{sinc}q\tau) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)(1-\operatorname{sinc}q\tau) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2-2/k}\rho_{p,q}^{2/k}(f)(1-\operatorname{sinc}pt)(1-\operatorname{sinc}q\tau) \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\right\}^{1-1/k}\left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k\right\}^{1/k} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\left\{\frac{4^k}{4^k m^{2r}n^{2s}}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k\right\}^{1/k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2.$$

Неравенство (16) доказано. Интегрируя обе части неравенства (16) по прямоугольнику $\{0\leq t\leq h,\ 0\leq\tau\leq\eta\}$, где $h,\eta\in\mathbb{R}_+$, получаем

$$h\eta\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 \leq$$

$$\leq \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\left(\eta\int_0^h\operatorname{sinc}pt dt + h\int_0^\eta\operatorname{sinc}q\tau d\tau - \int_0^h\operatorname{sinc}pt dt\int_0^\eta\operatorname{sinc}q\tau d\tau\right) +$$

$$+\frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau. \tag{18}$$

Учитывая определение интегрального синуса и поделив обе части неравенства (18) на $h\eta$, запишем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}+\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}-\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}\right)\rho_{p,q}^2(f)+$$

$$+\frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\frac{1}{h\eta}\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau. \tag{19}$$

Так как функция $\operatorname{Si}(u)/u$ является невозрастающей на полуоси $\mathbb{R}_+$ (см., например, [16], с. 34), то имеет место соотношение

$$\max_{\substack{p\geq m\\ q\geq n}}\left(\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}+\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}-\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}\right) = \frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}+\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}-\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}.$$

Пользуясь этим равенством, из (19) с учетом (6) имеем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2\left(1-\frac{\mathrm{Si}(mh)}{mh}\right)\left(1-\frac{\mathrm{Si}(n\eta)}{n\eta}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathcal{E}^{2-2/k}_{m-1,n-1}(f)_2\frac{1}{h\eta}\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau. \tag{20}$$

Из (20) сразу следует неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2\leq\frac{1}{m^rn^s}\left\{\frac{mn}{4(mh-\mathrm{Si}(mh))(nh-\mathrm{Si}(nh))}\right\}^{k/2}\left\{\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любой функции $f\in L_2^{(r,s)}$, то из него следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части (15):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^rn^s\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}\leq\left\{\frac{mn}{4(mh-\mathrm{Si}(mh))(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta))}\right\}^{k/2}. \tag{21}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной экстремальной характеристики введем в рассмотрение комплекснозначную функцию $f_0(x,y)=e^{i(mx+ny)}\in L_2^{(r,s)}$, для которой, как следует из соотношения (6) и (17), справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2=1,\quad \Omega_k^2(f^{(r,s)},t,\tau)=4^km^{2r}n^{2s}(1-\mathrm{sinc}\,mt)^k(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)^k. \tag{22}$$

Пользуясь равенствами (22), имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^rn^s\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}\geq\frac{m^rn^s\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2}{\left\{\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f_0^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=$$

$$=\frac{1}{\left\{4\int_0^h\int_0^\eta(1-\mathrm{sinc}\,mt)(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)dtd\tau\right\}^{k/2}}=\left\{\frac{mn}{4(mh-\mathrm{Si}(mh))(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta))}\right\}^{k/2}. \tag{23}$$

Требуемое равенство (17) следует из сопоставления оценок сверху (21) и снизу (23). □

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $h=\pi/m$ и $\eta=\pi/n$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{m^{r-k/2}n^{s-k/2}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n}\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=\left\{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))\right\}^{-k}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций $f\in L_2^{(r,s)}$ и их смешанных частных производных $f^{(\mu,\nu)}$, $0\leq\mu\leq r$, $0\leq\nu\leq s$, тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2=\inf\Big\{\big\|f^{(\mu,\nu)}-g^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\big\|_2^2:g_{m-1,n-1}\in G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\Big\}.$$

Как и при доказательстве формулы (6), убедимся, что

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2=\big\|f^{(\mu,\nu)}-\Phi_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})\big\|_2^2=$$

$$=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2\mu}q^{2\nu}\rho_{p,q}^{2}\big(f\big), \tag{24}$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (5).

Следствие 2. Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_{+}$, $r\geq\mu, s\geq\nu$. Тогда для любых $h,\eta\in\mathbb{R}_{+}$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left\{\int_0^h\int_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=\left\{\frac{mn}{4(mh-\mathrm{Si}(mh))(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta))}\right\}^{k/2}.$$

Теорема 2. *Для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_{+}$, $r\geq\mu, s\geq\nu$, $(t,\tau)\in(0,3\pi/4m]\times(0,3\pi/4n]$ имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2\leq$$

$$\leq m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,mt\big)\Big\}^{-k/2}\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,n\tau\big)\Big\}^{-l/2}\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2. \tag{25}$$

Существует функция $f_0\in L_2^{(r,s)}$, для которой (25) обращается в равенство.

Доказательство. Действительно, учитывая, что [17]

$$\max\{|\mathrm{sinc}\,u|:u\geq kv, 0<kv\leq 3\pi/4\}=\mathrm{sinc}\,kv,$$

в силу (24) запишем

$$\Omega_{k,l}^2\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\geq 2^{k+l}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\mathrm{sinc}\,pt)^k(1-\mathrm{sinc}\,q\tau)^l\geq$$

$$\geq 2^{k+1}m^{2(r-\mu)}n^{2(s-\nu)}(1-\mathrm{sinc}\,mt)^k(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)^l\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2\mu}q^{2\nu}\rho_{p,q}^2(f)=$$

$$=m^{2(r-\mu)}n^{2(s-\nu)}\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,mt)\big\}^k\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)\big\}^l\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2, \tag{26}$$

откуда и вытекает неравенство (25). Для функции $f_0(x,y)=e^{i(mx+ny)}\in L_2^{(r,s)}$ в силу (14) и (24) имеем

$$\Omega_{k,l}^2\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2=m^{2r}n^{2s}\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,mt)\big\}^k\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)\big\}^l,$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2=m^{2\mu}n^{2\nu}. \tag{27}$$

Пользуясь этими равенствами, получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2\big(f_0^{(\mu,\nu)};t,\tau\big)_2=m^{2\mu}n^{2\nu}=$$

$$=m^{-2(r-\mu)}n^{-2(s-\nu)}\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,mt)\big\}^{-k}\big\{2(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)\big\}^{-l}\Omega_{k,l}^2\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2,$$

откуда и следует точность неравенства (25). □

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}=\big\{2(1-\operatorname{sinc}mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{28}$$

В частности, из (28) при $t=\pi/(2m)$, $\tau=\pi/(2n)$, $m,n\in\mathbb{N}$, получаем точную константу Джексона–Стечкина в задаче одновременного приближения функции и ее производных $f^{(\mu,\nu)}$ ($\mu=\overline{0,r}$, $\nu=\overline{0,s}$):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};\pi/(2m),\pi/(2n)\big)_2}=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{(k+l)/2}. \tag{29}$$

Доказательство. Действительно, из неравенства (26) для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}\le\big\{2(1-\operatorname{sinc}mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{30}$$

С другой стороны, пользуясь равенством (27), запишем оценку снизу величины, стоящей в левой части (28):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}\ge\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2}=$$

$$=\big\{2(1-\operatorname{sinc}mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{31}$$

Требуемое равенство (28) вытекает из сопоставления оценки сверху (30) с оценкой снизу (31). Равенство (29) из (28) получается непосредственным вычислением. $\square$

Далее условимся под весовой функцией в прямоугольнике $[0,h]\times[0,\eta]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(t,\tau)$, не эквивалентную нулю на этом же прямоугольнике. Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge\mu$, $s\ge\nu$, $1\le q\le\infty$, $0<h\le3\pi/(4m)$, $0<\eta\le3\pi/(4n)$, φ *— весовая на прямоугольнике* $[0,h]\times[0,\eta]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc}mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \tag{32}$$

Доказательство. Неравенство (25) перепишем в виде

$$\Omega_{k,l}\Big(f^{(r,s)};t,\tau\Big)_2\ge m^{r-\mu}n^{s-\nu}\Big\{2(1-\operatorname{sinc}mt)\Big\}^{k/2}\Big\{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\Big\}^{l/2}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2. \tag{33}$$

Возведем обе стороны неравенства (33) в степень q, умножим на вес $\varphi(t,\tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $[0,h]\times[0,\eta]$. Полученное таким образом неравенство снова возведем в степень $1/q$. В итоге получим

$$\left(\int_0^h\int_0^\eta \Omega_{k,l}^q\Big(f^{(r,s)};t,\tau\Big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}\geq$$

$$\geq 2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}.$$

Последнее неравенство верно для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ и из него сразу получаем оценку сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (32):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}\leq$$

$$\leq\left(\int_0^h\int_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \tag{34}$$

Оценку снизу указанной экстремальной характеристики получаем для рассмотренной нами в предыдущей теореме функции $f_0\in L_2^{(r,s)}$, для которой имеют место равенства (27),

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}\geq$$

$$\geq\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}m^\mu n^\nu}{2^{(k+l)/2}m^rn^s\left(\int_0^h\int_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \tag{35}$$

Равенство (32) получаем из сопоставления оценки сверху (34) с оценкой снизу (35). $\square$

Следствие 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда, если $\varphi(t,\tau)=\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)$, то

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int_0^h\big(1-\operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2}\varphi_1(t)dt\right)^{-1/q}\left(\int_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2}\varphi_2(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \tag{36}$$

В частности, из (36)
a) при $\varphi_1=\varphi_2\equiv 1$, $k=l$, $q=2/k$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^k m^{r-(\mu+k)}n^{s-(\nu+k)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta \Omega_{k,k}^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2 dtd\tau\right)^{k/2}}=\big\{(mh-\mathrm{Si}(mh))(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta))\big\}^{-k/2};$$

b) при $\varphi_1(t)=t,\ \varphi_2(\tau)=\tau,\ k=l,\ q=2/k$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{4^k m^{r-(\mu+k)}n^{s-(\nu+k)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int_0^h\int_0^\eta t\tau\Omega_{k,k}^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2 dtd\tau\right)^{k/2}}=$$

$$=\big\{\big(mh/2\big)^2-\sin^2\big(mh/2\big)\big\}^{-k/2}\big\{\big(n\eta/2\big)^2-\sin^2\big(n\eta/2\big)\big\}^{-k/2}.$$

2. Решение одной экстремальной задачи

Отметим, что поскольку для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$, $r,s\in\mathbb{N}$, ее промежуточные производные $f^{(\mu,\nu)}$, $0\le\mu\le r$, $0\le\nu\le s$, также принадлежат классу $L_2^{(r,s)}$ (см., например, [12]), то несомненный интерес представляет изучение поведения величины наилучшего совместного приближения $\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2$ на классе $L_2^{(r,s)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r,s)}\subset L_2^{(r,s)}$, т.е. при любых $0\le\mu\le r$, $0\le\nu\le s$ требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\big(\mathfrak{M}^{(r,s)}\big)_2:=\sup\Big\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 : f\in\mathfrak{M}^{(r,s)}\Big\}.$$

Всюду далее через $W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)$ ($k,l\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $1\le q\le\infty$) обозначим класс функций $f\in L_2^{(r,s)}$, для которых при всех $0<h,\eta\le 2\pi$ выполнено неравенство

$$\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\le 1.$$

Теорема 4. *Пусть $k,l\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge\mu$, $s\ge\nu$, $1\le q\le\infty$, $0<h\le 3\pi/(4m)$, $0<\eta\le 3\pi/(4n)$. Тогда*

$$\mathcal{E}^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)\Big)_2=$$

$$=\frac{1}{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}}\left(\int_0^h\int_0^\eta(1-\mathrm{sinc}\,mt)^{kq/2}(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \quad (37)$$

Доказательство. Действительно, из неравенства (34) для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge\mu$, $s\ge\nu$, $\varphi(t,\tau)\equiv 1$ вытекает

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2\le 2^{-(k+l)/2}m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}\times$$

$$\times\frac{\left(\int_0^h\int_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}{\left(\int_0^h\int_0^\eta(1-\mathrm{sinc}\,mt)^{kq/2}(1-\mathrm{sinc}\,n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \quad (38)$$

Из (38) для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)$ получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 \leq \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\mathcal{E}^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\Big(W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)\Big)_2 \leq \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \quad (39)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины, введем функцию

$$f_1(x,y) = \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-r} n^{-s} e^{i(mx+ny)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}.$$

Для этой функции в силу равенств (14) и (24) имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f_1^{(\mu,\nu)}\big)_2 = \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}, \quad (40)$$

$$\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega^q_{k,l}\big(f_1^{(r,s)};t,\tau\big)_2 \varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q} = 1. \quad (41)$$

Равенство (41) означает, что функция $f_1 \in W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)$, а потому, учитывая равенство (40), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\left(W^{(r,s)}_{k,l,q}(h,\eta;\varphi)\right)_2 \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}\big(f_1^{(\mu,\nu)}\big) =$$

$$= \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \quad (42)$$

Требуемое равенство (37) получаем из сравнения неравенств (39) и (42). □

Следствие 5. В условиях теоремы 4 при $k = l$, $q = 2/k$, $h = \pi/(2m)$, $\eta = \pi/(2n)$, $m,n \in \mathbb{N}$, $\varphi = 1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\left(W^{(r,s)}_{k,k,k/2}\left(\frac{\pi}{(2m)},\frac{\pi}{(2n)}\right)\right)_2 = \big\{(\pi/2) - \operatorname{Si}(\pi/2)\big\}^{-k} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}.$$

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

[1] Потапов М.К. *О приближении «углом»*, Тр. конф. по конструктив. теор. функц. (Венгрия, Будапешт, 1971).

[2] Потапов М.К. *Приближение «углом» и теоремы вложения*, Math. Balkanica (2), 183–198 (1972).

[3] Томич М. *О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости*, Publ. De L'inst. Math. (Beograd) **23** (37), 193–206 (1972).

[4] Вакарчук С.Б. *О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных*, Изв. вузов. Матем. (7), 14–25 (1991).

[5] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. *О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов*, Укр. матем. журн. **48** (3), 301–308 (1996).

[6] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. *Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных*, Докл. РАН **404** (4), 406–464 (2005).

[7] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. *О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных*, Укр. мат. журн. **61** (6), 855–864 (2009).

[8] Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. *Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables*, Anal. Math. **35** (1), 61–72 (2009).

[9] Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. *Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации*, Укр. мат. журн. **63** (12), 1579–1601 (2011).

[10] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. *О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *с весом Чебышева–Эрмита*, Збiрн. праць Iн-ту матем. НАН Украiни **11** (3), 35–46 (2014).

[11] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. *Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации “углом”*, Изв. вузов. Матем. (11), 3–22 (2015).

[12] Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. *О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в* L_2, Чебышевск. сб. **20** (2), 348–365 (2019).

[13] Vakarchuk S.B. *Exact constant in an inequality of Jackson type for* L_2*-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes*, East J. Approxim. **10** (1–2), 27–39 (2004).

[14] Вакарчук С.Б. *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из* L_2, Матем. заметки **78** (5), 792–796 (2005).

[15] Брудный Ю.А. *Приближение функций* n *переменных квазимногочленами*, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **34** (3), 564–583 (1970).

[16] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. *Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в* L_2 *и поперечники функциональных классов*, Матем. заметки **86** (3), 328–336 (2009).

[17] Тайков Л.В. *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из* L_2, Матем. заметки **20** (3), 433–438 (1976).

Мухиддин Отамшоевич Акобиршоев

Технологический университет Таджикистана,
ул. Н.Карабоева, д. 63/3, г. Душанбе, 734061, Республика Таджикистан,

e-mail: muhiddin_ao@mail.ru

M.O. Akobirshoev

On the best simultaneous “angle” approximation in the mean of periodic functions of two variables from some classes

Abstract. In the L_2 metric, we obtain sharp inequalities between the best joint approximations of 2π-periodic functions $f(x,y)$ differentiable in each of the variables and their successive derivatives $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r; \nu = 0, 1, \ldots, s)$ by trigonometric “angles” with double integrals containing mixed moduli of continuity of higher orders of higher derivatives. The sharp values of the upper bound of the best joint approximation of some classes of functions given by the specified moduli of continuity are found.

Keywords: the best joint approximation, trigonometric “angle”, quasi-polynomial, mixed modulus of continuity.

Muhiddin Otamshoevich Akobirshoev
Technological University of Republic of Tajikistan,
36/3 N. Qaraboev str., Dushanbe, 734061 Republic of Tajikistan,
e-mail: muhiddin_ao@mail.ru