

А.М. ШЕЛЕХОВ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРИ-ТКАНИ С АВТОМОРФИЗМАМИ

Аннотация. Найден общий вид уравнения криволинейной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов (ткани AW). Доказано, что траектории автоморфизмов ткани AW являются геодезическими ее связности Черна. Найдены все ткани AW , у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю.

Ключевые слова: криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, автоморфизм три-ткани, инфинитезимальный автоморфизм, связность Черна три-ткани, геодезические линии.

УДК: 514

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-89-97

1. Произвольная криволинейная три-ткань не допускает, вообще говоря, автоморфизмов. Параллельная три-ткань допускает трехпараметрическую группу автоморфизмов. Действительно, параллельная три-ткань задается уравнением $z = x + y$. Ее автоморфизмы имеют вид $x = a\tilde{x} + b_1$, $y = a\tilde{y} + b_2$, а соответствующие им автотопии (A_1, A_2, A_3) три-ткани (т. е. допустимые преобразования параметров семейств, образующих ткань) будут $x = a\tilde{x} + b_1$, $y = a\tilde{y} + b_2$, $z = a\tilde{z} + b_1 + b_2$. Отсюда следует, что всякая регулярная ткань (т. е. ткань, локально диффеоморфная параллельной) также допускает трехпараметрическую группу автоморфизмов. Поэтому интерес представляют ткани, допускающие меньшие семейства автоморфизмов.

Три-ткани с автоморфизмами исследовались многими авторами, начиная с Э. Картана [1]. Делать обзор по этой тематике мы не будем, укажем лишь две из последних работ в этом направлении [2] и [3].

В [4] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если три-ткань из кривых на вещественной плоскости допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов (ткани AW), то в некоторых локальных координатах ее уравнение может быть приведено к виду*

$$z = x + y + \lambda(x - y). \quad (1)$$

Здесь $\lambda(x - y)$ — произвольная гладкая функция от переменного $x - y$.

Теорема 2. *Если три-ткань из кривых на вещественной плоскости допускает двухпараметрическое семейство автоморфизмов, то она является регулярной.*

Доказательства в [4] основывались на том простом факте, что абсолютные инварианты ткани постоянны вдоль траекторий автоморфизмов. В данной работе мы доказываем теорему 1 другим способом, непосредственно интегрируя соответствующую систему дифференциальных уравнений, и также показываем, что траектории автоморфизмов ткани

AW являются геодезическими связности Черна три-ткани. Кроме того, в статье найдены все ткани AW , у которых одна из ковариантных производных (относительно канонической связности Черна этой ткани) равна нулю.

2. Пусть W — произвольная криволинейная три-ткань, образованная в некоторой области D плоскости линиями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $f(x, y) = \text{const}$, тогда уравнение этой ткани имеет вид $z = f(x, y)$. Положим

$$\omega_1 = f_x dx, \quad \omega_2 = f_y dy. \quad (2)$$

Продифференцировав формы ω_1 и ω_2 внешним образом, получим

$$d\omega_1 = f_{xy} dy \wedge dx = \Gamma \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = f_{xy} dx \wedge dy = \Gamma \omega_2 \wedge \omega_1, \quad (3)$$

где

$$\Gamma = -\frac{f_{xy}}{f_x f_y}.$$

Положив $\omega = \Gamma(\omega_1 + \omega_2)$, перепишем равенства (3) в виде

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega. \quad (4)$$

Внешнее дифференцирование формы ω приведет к равенству

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (5)$$

где

$$b = \frac{\Gamma_x}{f_x} - \frac{\Gamma_y}{f_y}.$$

Уравнения (4) и (5) называются структурными уравнениями три-ткани W , а функция b называется кривизной этой ткани. Условие $b = 0$ характеризует класс регулярных тканей.

С другой стороны, уравнения (4) и (5) являются уравнениями некоторой аффинной связности без кручения, причем формы связности имеют вид

$$(\omega_1, \omega_2), \quad \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Эта связность называется *связностью Черна*.

Геодезические линии связности Черна задаются уравнениями

$$d\omega_1 + \omega_1 \omega = \Theta \omega_1, \quad d\omega_2 + \omega_2 \omega = \Theta \omega_2, \quad (6)$$

где d — обыкновенное дифференцирование, а Θ — некоторая 1-форма, зависящая от выбора параметра на геодезической. Исключая Θ из уравнений (6), придем к уравнению геодезических в другой форме:

$$\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 = 0.$$

Отсюда получаем $\omega_1 = C\omega_2$, $C = \text{const}$, или

$$f_x dx = C f_y dy. \quad (7)$$

При $C = 0, \infty, -1$ получаем линии первого, второго и третьего семейств ткани W . При $C = 1$ получим семейство геодезических линий, которые вместе с линиями третьего семейства гармонически делят (в каждой точке) пару линий первого и второго семейств. Можно сказать также, что семейство $C = 1$ сопряжено третьему семейству линий ткани относительно пары первых двух. Поэтому назовем это семейство линий 3-сопряженным.

3. Автоморфизмом три-ткани W называется такой локальный диффеоморфизм области D , который переводит линии ткани W снова в линии этой ткани. Доказательство следующего утверждения можно найти в ([6], теорема 6.8). *Локальные автоморфизмы три-ткани W*

являются также автоморфизмами соответствующей связности Черна. Обратно, пусть φ — автоморфизм связности Черна некоторой три-ткани W , заданной в области D , и существует точка p в D такая, что дифференциал $d\varphi|_p$ переводит касательные к линиям ткани W , проходящим через точку p , в касательные к соответствующим линиям, проходящим через точку $\varphi(p)$. Тогда φ — автоморфизм три-ткани W .

(Напомним, что автоморфизмом аффинной связности Γ , заданной на многообразии X , называется такой диффеоморфизм этого многообразия, который сохраняет закон параллельного перенесения, т. е. сохраняет ковариантный дифференциал относительно этой связности.)

Доказательство теоремы 1. Предположим, что три-ткань W допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов, определяемое векторным полем $\xi(\xi_1, \xi_2)$. Тогда величины ξ_1, ξ_2 удовлетворяют следующим уравнениям из [5]:

$$d\xi_1 + \xi_1\omega = \xi\omega_1, \quad d\xi_2 + \xi_2\omega = \xi\omega_2,$$

или в силу (2) и (3)

$$d\xi_1 + \xi_1 \left(\frac{-f_{xy}}{f_y} dx - \frac{f_{xy}}{f_x} dy \right) = \xi f_x dx, \quad d\xi_2 + \xi_2 \left(\frac{-f_{xy}}{f_y} dx - \frac{f_{xy}}{f_x} dy \right) = \xi f_y dy.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} &= \xi_1 \frac{f_{xy}}{f_y} + \xi f_x, & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} &= \xi_1 \frac{f_{xy}}{f_x}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} &= \xi_2 \frac{f_{xy}}{f_y}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} &= \xi_2 \frac{f_{xy}}{f_x} + \xi f_y. \end{aligned}$$

Положим $\xi_1 = \alpha f_x$, $\xi_2 = \beta f_y$. Подставляя в предыдущие уравнения, получим

$$\alpha_y = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \alpha_x f_x + \alpha f_{xx} = \alpha f_x \frac{f_{xy}}{f_y} + \xi f_x, \quad \beta_y f_y + \beta f_{yy} = \beta f_y \frac{f_{xy}}{f_x} + \xi f_y.$$

Отсюда следует $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(y)$ и

$$f_y(\alpha f_x + \beta f_y)_x = f_x(\alpha f_x + \beta f_y)_y. \quad (8)$$

Лемма. Заменой переменных $x = x(\tilde{x})$, $y = y(\tilde{y})$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ можно привести к единице.

Доказательство. Обозначим $f(x(\tilde{x}), y(\tilde{y})) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$, тогда

$$\tilde{f}_{\tilde{x}} = f_x \frac{dx}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{f}_{\tilde{y}} = f_y \frac{dy}{d\tilde{y}}.$$

Положим $dx/d\tilde{x} = \alpha(x)$, $dy/d\tilde{y} = \beta(y)$ и подставим в (8). После преобразований придем к уравнению

$$\tilde{f}_{\tilde{y}}(\tilde{f}_{\tilde{x}} + \tilde{f}_{\tilde{y}})_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\tilde{x}}(\tilde{f}_{\tilde{x}} + \tilde{f}_{\tilde{y}})_{\tilde{y}}. \quad (9)$$

Продолжим доказательство, считая, что указанная замена переменных произведена и волну над переменными опустим. После небольших вычислений уравнение (9) приведет к виду

$$\left(\frac{f_x}{f_y} \right)_x + \left(\frac{f_x}{f_y} \right)_y = 0,$$

отсюда

$$\frac{f_x}{f_y} = \varphi(x - y), \quad (10)$$

где $\varphi(x-y)$ — гладкая функция от переменной $x-y$. Положим далее $f(x, y) = g(u, v)$, $u = x+y$, $v = x-y$, тогда (10) примет вид

$$g_u + g_v = (g_u - g_v)\varphi(v),$$

или $g_v = g_u\nu(v)$. Имеем

$$dg = g_u du + g_v dv = g_u(du + \nu(v)dv) = g_u d(u + \lambda(v)).$$

В результате уравнение ткани $z = f(x, y)$ примет вид $z = g(u + \lambda(v)) = f(x + y + \lambda(x - y))$. После допустимой замены параметра $f^{-1}(z) \rightarrow z$ придем к уравнению (1). $\square$

Так как $\alpha = \beta = 1$, то $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (f_x, f_y)$. Автоморфизмы ткани AW имеют вид $x \rightarrow x + a$, $y \rightarrow y + a$. Траектории автоморфизмов суть линии $x - y = \text{const}$.

Теорема 3. *Траектории автоморфизмов ткани AW являются геодезическими и совпадают с ее 3-сопряженным семейством только в случае, если три-ткань является регулярной.*

Доказательство. Из уравнения (1) находим $f_x = 1 + \lambda'(x - y)$, $f_y = 1 - \lambda'(x - y)$, так что уравнение геодезических (7) для три-ткани AW принимает вид

$$(1 + \lambda')dx - C(1 - \lambda')dy = 0,$$

где штрих означает производную по переменной $v = x - y$. На траектории автоморфизмов $x - y = \text{const}$ имеем $\lambda'(x - y) = \text{const}$. Постоянную C можно выбрать так, чтобы уравнение геодезических приняло вид $dx - dy = 0$ или $x - y = \text{const}$. Первая часть теоремы 3 доказана.

Уравнение 3-сопряженного семейства для ткани AW примет вид

$$(1 + \lambda')dx - (1 - \lambda')dy = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением траекторий автоморфизма $dx - dy = 0$ только в случае $\lambda' = 0$ или $\lambda = \text{const}$. Но тогда уравнение (1) определяет регулярную три-ткань. $\square$

4. Найдем ковариантные производные кривизны ткани (1), обозначим ее, как и выше, AW . Сначала вычислим кривину b . Имеем

$$f_x = 1 + \lambda', f_y = 1 - \lambda', f_{xy} = -\lambda'', \quad \Gamma = \frac{\lambda''}{1 - (\lambda')^2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)'.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Gamma_x = -\Gamma_y &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)'', \\ b &= \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)'' (1 - (\lambda')^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ковариантные производные кривизны b найдем из формулы

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2,$$

которая является дифференциальным продолжением структурного уравнения (5). Имеем

$$db = b_x dx + b_y dy = b' dx - b' dy = b' \left(\frac{\omega_1}{f_x} - \frac{\omega_2}{f_y} \right), \quad 2b\omega = 2b\Gamma(\omega_1 + \omega_2),$$

поэтому

$$b_1 = \frac{b'}{f_x} - 2b\Gamma = \frac{b'}{1 + \lambda'} - b \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)', \quad b_2 = -\frac{b'}{f_y} - 2b\Gamma = -\frac{b'}{1 - \lambda'} - b \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)'. \quad (12)$$

5. Найдем три-ткани AW , для которых $b_1 = 0$. Согласно ([7], с. 69) это условие выделяет три-ткани B_1 , образованные семейством параллельных прямых и интегральными кривыми двух уравнений Риккати специального вида. Покажем, что такой класс существует, причем решение находится в квадратурах. Отметим, что для описания этого класса мы не можем использовать результаты из [7], поскольку там подвижной репер был нормирован условием равенства единице одной из ковариантных производных кривизны, в то время как в настоящей статье нормировка другая — траектории автоморфизмов записаны в виде $x - y = \text{const}$.

Как видно из (12), условие $b_1 = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{b'}{1 + \lambda'} - b \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{2\lambda''}{1 - \lambda'},$$

или $(\ln b)' = (\ln(1 - \lambda')^{-2})'$. Отсюда

$$b = \frac{\alpha}{2(1 - \lambda')^2}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Если $\alpha = 0$, то $b = 0$, и мы получаем регулярную ткань. Пусть далее $\alpha \neq 0$. Сравнивая последнее равенство с (11), придем к соотношению

$$\frac{\alpha}{2} \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} = \left(\ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'} \right)'',$$

или

$$t'' = \frac{1}{2} \alpha e^t, \quad (13)$$

где

$$t = \ln \frac{1 + \lambda'}{1 - \lambda'}. \quad (14)$$

Положим в (13)

$$t'(v) = \Theta(t(v)) \Rightarrow t''(v) = \Theta'(t)t'(v) = \Theta'(t)\Theta.$$

В результате (13) примет вид $2\Theta d\Theta = \alpha e^t dt$. Отсюда $\Theta^2 = \alpha e^t + \beta$, $\beta = \text{const}$, и

$$\Theta = \frac{dt}{dv} = \sqrt{\alpha e^t + \beta} \Rightarrow v = \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha e^t + \beta}}.$$

Заменой $\alpha e^t + \beta = u^2$ приводим интеграл к виду

$$v = 2 \int \frac{du}{u^2 - \beta}. \quad (15)$$

Случай 1. $\beta = \delta^2 \neq 0$, тогда

$$v = \frac{1}{\delta} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha e^t + \delta^2} - \delta}{\sqrt{\alpha e^t + \delta^2} + \delta} \right| - \frac{\gamma}{\delta}, \quad \gamma = \text{const}.$$

После несложных преобразований отсюда получим при $\alpha > 0$

$$e^t = \frac{4\delta^2}{\alpha} \frac{e^{\delta v + \gamma}}{(e^{\delta v + \gamma} - 1)^2},$$

при $\alpha < 0$

$$e^t = -\frac{4\delta^2}{\alpha} \frac{e^{\delta v + \gamma}}{(e^{\delta v + \gamma} - 1)^2}.$$

Как видно, эти случаи идентичны, поэтому далее рассматриваем только первый вариант. Из (14) следует

$$\lambda' = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}.$$

Подставляя сюда предыдущее выражение для e^t , найдем

$$\lambda' = \frac{\varepsilon - \sinh^2 \left(\frac{\delta v + \gamma}{2} \right)}{\varepsilon + \sinh^2 \left(\frac{\delta v + \gamma}{2} \right)}, \quad \varepsilon = \frac{\delta^2}{\alpha}. \quad (16)$$

Далее, положим $\frac{\delta v + \gamma}{2} = X$ и в правой части (16) выразим $\sinh^2 X$ через $\tanh X$. В результате получим

$$\lambda' = \frac{\varepsilon - (\varepsilon + 1) \tanh^2 X}{\varepsilon - (\varepsilon - 1) \tanh^2 X},$$

$$\lambda = \int \frac{\varepsilon - (\varepsilon + 1) \tanh^2 X}{\varepsilon - (\varepsilon - 1) \tanh^2 X} dv = \frac{2}{\delta} \int \frac{\varepsilon - (\varepsilon + 1) \tanh^2 X}{\varepsilon - (\varepsilon - 1) \tanh^2 X} dX.$$

После стандартной замены $\tanh X = z$ придем к интегралу

$$\lambda = \frac{2}{\delta} \int \frac{\varepsilon - (\varepsilon + 1)z^2}{\varepsilon - (\varepsilon - 1)z^2} \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{4\varepsilon}{\delta(\varepsilon - 1)} \int \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} - z^2} dz - \frac{2}{\delta} \int \frac{dz}{1 - z^2}. \quad (17)$$

Подслучай 1a. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \eta^2$, причем $\eta \neq 0$, так как $\varepsilon = \delta^2/\alpha \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4\eta^2}{\delta} \int \frac{dz}{\eta^2 - z^2} - \frac{2}{\delta} \int dX = -\frac{2\eta}{\delta} \ln \left| \frac{\tanh X - \eta}{\tanh X + \eta} \right| - \frac{2}{\delta} X + C_1 = \\ &= -\frac{2\eta}{\delta} \ln \left| \frac{\tanh \frac{\delta v + \gamma}{2} - \eta}{\tanh \frac{\delta v + \gamma}{2} + \eta} \right| - v + C. \end{aligned} \quad (18)$$

Подслучай 1b. При $\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} = -\eta^2$ из (17) получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{4\eta^2}{\delta} \int \frac{dz}{-\eta^2 - z^2} - \frac{2}{\delta} \int dX = \frac{4\eta}{\delta} \arctan \frac{\tanh X}{\eta} - \frac{2}{\delta} X + C_1 = \\ &= \frac{4\eta}{\delta} \arctan \frac{\tanh \frac{\delta v + \gamma}{2}}{\eta} - v + C. \end{aligned} \quad (19)$$

Случай 2. $\beta = -\delta^2 \neq 0$. Тогда из (15) вытекает

$$v = \frac{2}{\delta} \arctan \frac{u}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta},$$

отсюда

$$e^t = \frac{\delta^2}{\alpha} \cos^{-2} \left(\frac{\delta v + \gamma}{2} \right).$$

Положив $\frac{\delta v + \gamma}{2} = X$, $\frac{\delta^2}{\alpha} = \eta$, имеем

$$e^t = \eta(1 + \tan^2 X), \lambda' = \frac{\tan^2 X + \frac{\eta - 1}{\eta}}{\tan^2 X + \frac{\eta + 1}{\eta}}.$$

Случай 2а. $(\eta + 1)/\eta = -\kappa^2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda' = \frac{\tan^2 X + 2 + \kappa^2}{\tan^2 X - \kappa^2}.$$

Положим $\tan X = z$, тогда

$$\lambda = \int \frac{z^2 + 2 + \kappa^2}{z^2 - \kappa^2} dv = \frac{2}{\delta} \int \frac{z^2 + 2 + \kappa^2}{z^2 - \kappa^2} dX = \frac{2}{\delta} \int \frac{z^2 + 2 + \kappa^2}{z^2 - \kappa^2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Но

$$\frac{z^2 + 2 + \kappa^2}{(z^2 - \kappa^2)(z^2 + 1)} = \frac{2}{z^2 - \kappa^2} - \frac{1}{z^2 + 1},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{\delta} \int \left(\frac{2}{z^2 - \kappa^2} - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz = \frac{2}{\delta} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{z - \kappa}{z + \kappa} \right| - X \right) + C = \\ &= \frac{2}{\delta \kappa} \ln \left| \frac{\tan \frac{\delta v + \gamma}{2} - \kappa}{\tan \frac{\delta v + \gamma}{2} + \kappa} \right| - \frac{2}{\delta} \frac{\delta v + \gamma}{2} + C_1 = \frac{2}{\delta \kappa} \ln \left| \frac{\tan \frac{\delta v + \gamma}{2} - \kappa}{\tan \frac{\delta v + \gamma}{2} + \kappa} \right| - v + C. \end{aligned} \quad (20)$$

Случай 2б. $(\eta + 1)/\eta = \kappa^2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda' = \frac{\tan^2 X + 2 - \kappa^2}{\tan^2 X + \kappa^2} = \frac{z^2 + 2 - \kappa^2}{z^2 + \kappa^2},$$

отсюда

$$\lambda = \int \frac{z^2 + 2 - \kappa^2}{z^2 + \kappa^2} dv = \frac{2}{\delta} \int \frac{z^2 + 2 - \kappa^2}{z^2 + \kappa^2} dX = \frac{2}{\delta} \int \frac{z^2 + 2 - \kappa^2}{z^2 + \kappa^2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Но

$$\frac{z^2 + 2 - \kappa^2}{(z^2 + \kappa^2)(z^2 + 1)} = \frac{2}{z^2 + \kappa^2} - \frac{1}{z^2 + 1},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{\delta} \int \left(\frac{2}{z^2 + \kappa^2} - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz = \frac{4}{\delta \kappa} \arctan \frac{z}{\kappa} - \frac{2}{\delta} X + C_1 = \\ &= \frac{4}{\delta \kappa} \arctan \frac{\tan \frac{\delta v + \gamma}{2}}{\kappa} - v + C. \end{aligned} \quad (21)$$

Случай 2с. $\kappa = 0$. Тогда

$$\lambda' = \frac{\tan^2 X + 2}{\tan^2 X}$$

и

$$\lambda = \frac{2}{\delta} (-X - 2 \cot X) + C_1 = -v - \frac{4}{\delta} \cot \frac{\delta v + \gamma}{2} + C. \quad (22)$$

Случай 3. $\beta = 0$. Из (15) находим

$$v = -\frac{2}{u} + \gamma = \mp \frac{2}{\sqrt{\alpha}e^t} + \gamma, \quad \gamma = \text{const.}$$

Отсюда

$$e^t = \frac{4}{\alpha(v - \gamma)^2}, \quad \lambda' = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = \frac{4 - \alpha(v - \gamma)^2}{4 + \alpha(v - \gamma)^2}.$$

Интегрирование дает
при $\alpha > 0$

$$\lambda = -v + \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \arctan \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(v - \gamma) \right) + C; \quad (23)$$

при $\alpha < 0$

$$\lambda = -v - \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{-\alpha}(v - \gamma) - 2}{\sqrt{-\alpha}(v - \gamma) + 2} \right| + C. \quad (24)$$

Доказана

Теорема 4. *Существует семь типов криволинейных три-тканей, допускающих однопараметрическое семейство инфинитезимальных автоморфизмов, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю. Это три-ткани, заданные уравнениями вида (1), где функция λ вычисляется по формулам (18)–(24).*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cartan É. *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. École Norm. Ser. 3, **25**, 57–194 (1908).
- [2] Agafonov S.I. *Local classification of singular hexagonal 3-webs with holomorphic Chern connection form and infinitesimal symmetries*, Geom. Dedicata **176**, 87–115 (2014).
- [3] Hénaut A. *Lie Symmetries for Implicit Planar Webs*, J. Math. Sci., Tokyo, **29** (1), 115–148 (2022).
- [4] Шелехов А.М. *Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов*, Изв. вузов. Матем. (5), 68–70 (2005).
- [5] Гвоздович Н.В. *Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей*, Изв. вузов. Матем. (5), 73–75 (1982).
- [6] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения* (ТвГУ, Тверь, 2010) (09304nauch.pdf).
- [7] Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. *Криволинейные три-ткани (дифференциально-топологическая теория)* (ТвГУ, Тверь, 2013) (09306nauch.pdf).

Александр Михайлович Шелехов

Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: amshelekhov@yandex.ru

A.M. Shelekhov

Curvilinear three-webs with automorphisms

Abstract. A general form of the equation of a curvilinear three-web admitting a one-parameter family of automorphisms (AW-webs) is found. It is proved that the trajectories of automorphisms of an AW-web are geodesics of its Chern connection. All AW-webs are found for which one of the covariant derivatives of curvature is zero.

Keywords: curvilinear three-web, regular three-web, automorphism of a three-web, infinitesimal automorphism, Chern connection of a three-web, geodesic line.

Alexander Mikhailovich Shelekhov

Moscow Pedagogical State University,

1 Malaya Pirogovskaya str., bldg. 1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: amshelekhov@yandex.ru