Известия вузов. Математика
2024, № 6, с. 80–88

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.Ш. ШАБОЗОВ, А.А. ШАБОЗОВА

О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

Аннотация. Рассматривается задача нахождения точных верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2. Указанные классы функций определены усредненными значениями модулей непрерывности m-го порядка старшей производной, ограниченной сверху некоторой мажорантой Φ.

Ключевые слова: совместное приближение, верхняя грань, наилучшее приближение, пространство Бергмана, модуль непрерывности, мажоранта.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-80-88

Введение

В теории приближения функций наиболее важное место занимают экстремальные задачи наилучшего приближения функций в нормированных пространствах. Следует отметить, что экстремальные задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, в большинстве случаев являются задачами на экстремум, где требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения. В этом направлении наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах периодических функций, (см., например, [1], [2]). Что же касается решения экстремальных задач наилучшего приближения аналитических в круге функций, то указанная задача в различных пространствах аналитических функций ранее изучалась, например, в работах [3]–[19] и многих других.

В данной работе решаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2. Отметим, что задача совместного приближения периодических функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами в равномерной метрике рассматривалась А.Л. Гаркави [20], а в случае приближения функций и их производных целыми функциями на всей оси А.Ф. Тиманом [21]. В более общей ситуации задача совместного приближения рассматривалась в монографии В.Н. Малоземова [22], где приводится обобщение некоторых классических теорем на случай совместного приближения функций. Для некоторых классов периодических функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$, усредненный с весом обобщенный модуль непрерывности которых ограничен сверху заданной мажорантой Ψ, задача совместного приближения решена С.Б. Вакарчуком

Поступила в редакцию 03.05.2023, после доработки 23.06.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

и В.И. Забутной [23], а для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди и Бергмана, указанная задача изучалась в работах [24], [25]. В целом следует отметить, что по сформулированной задаче в комплексных пространствах аналитических в односвязных областях функций имеется немного результатов.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U.

Определение ([12])**.** Говорят, что аналитическая в круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho < 1, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{1}$$

принадлежит пространству Бергмана B_2, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Производную r-го порядка функции $f \in A(U)$ определим, как обычно, равенством

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Везде далее в изложении введем краткое обозначение

$$\alpha_{k,r} := k!/(k-r)!, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k > r.$$

Символом $B_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} = B_2)$ обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2, производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит B_2:

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_{B_2} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество комплексных алгебраических многочленов степени $n-1$, называют наилучшим среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$.

Хорошо известно ([26], с. 203), что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в виде

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}.$$

Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

где

$$\Delta_h^m f\big(\rho e^{it}\big) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right),$$

обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h. Модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$ определим соотношением

$$\omega_m(f,\tau)_2 = \sup\left\{\|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \le \tau\right\}.$$

В [27] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$

$$\omega_m^2\big(f^{(r)},\tau\big)_2 = 2^m \sup_{|h|\le\tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)h)^m. \tag{2}$$

Известно [28], что для функции $f \in B_2^{(r)}$, наравне с функцией f и старшей производной $f^{(r)}$, все промежуточные производные $f^{(s)}(s = 1, 2, \ldots, r-1, r \ge 2)$ также принадлежат пространству B_2 . Представляет интерес отыскание точных значений совместных приближений функций f и всех ее производных $f^{(s)}$ $(s = \overline{1,r})$:

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2 := \inf\left\{\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

на некотором подмножестве функций $\mathfrak{N}^{(r)} \subset H_2^{(r)}$ или на самом классе $H_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}^{(s)}\big(\mathfrak{N}^{(r)}\big)_2 := \sup\left\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2 : f \in \mathfrak{N}^{(r)}\right\},\ r \ge s. \tag{3}$$

Поскольку в данной работе используется норма только пространства B_2, всюду далее нижний индекс у нормы $\|\cdot\|_2$ будем опускать. Аналогично будем поступать и с величинами, определяемыми с помощью этой нормы: вместо $E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2$, $\mathcal{E}_{n-s-1}\big(\mathfrak{N}^{(r)}\big)_2$, $\omega\big(f^{(r)},t\big)_2$ будем писать $E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)$, $\mathcal{E}_{n-s-1}\big(\mathfrak{N}^{(r)}\big)$, $\omega\big(f^{(r)},t\big)$.

В [18] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ при условии $n > r \ge s$ имеет место неравенство

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big), \tag{4}$$

обращающееся в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$. Там же доказано, что для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ при всех $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ справедливо равенство

$$E_{n-s-1}^2\big(f^{(s)}\big) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}. \tag{5}$$

1. Основной результат

Всюду далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ предполагается, что $f \notin \mathcal{P}_r$. Справедлива

Теорема 1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)}{\left(\dfrac{n-r}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)\sin(n-r)t\,dt\right)^{m/2}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m. \tag{6}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2$ справедливо неравенство [27]

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt \le E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \omega_m^{2/m}(f,t). \tag{7}$$

Умножая обе стороны (7) на $\sin nt$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi/n]$ по переменному t, получаем

$$\frac{2}{n} E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \int_0^{\pi/n} \cos kt \sin nt dt \le E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f,t) \sin nt dt.$$

Так как

$$\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin nt dt = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = n; \\ -\dfrac{2n}{k^2 - n^2} \cos^2 \dfrac{k\pi}{2n}, & \text{если} \quad k > n, \end{cases}$$

то из (7) следует

$$\frac{2}{n} E_{n-1}^2(f) \le E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f,t) \sin nt dt,$$

или

$$E_{n-1}(f) \le \left(\frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f,t) \sin nt dt \right)^{m/2}. \tag{8}$$

Заменяя в (8) функцию f на производную r-го порядка $f^{(r)}$ и число n на $n-r$, получаем

$$E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big) \le \left(\frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \tag{9}$$

Учитывая (9) и применяя неравенство (4), имеем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big) \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big) \le$$

$$\le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left(\frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin(n-r)t dt \right)^{m/2} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{m/2} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left(\frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \tag{10}$$

Поскольку неравенство (10) справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, из него сразу следует оценка сверху для величины расположенной в левой части равенства (6)

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)}{\left(\dfrac{n-r}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} \le \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^m. \tag{11}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$, для которой при всех $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \ge s$ в силу (5) и (2) получаем

$$E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}},$$

$$\omega_m^2\big(f_0^{(r)},t\big)=\frac{2^m\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t)^m, \tag{12}$$

$$\left(\frac{n-r}{\pi}\int_0^{\pi/(n-r)}\omega_m^{2/m}\big(f_0^{(r)},t\big)\sin(n-r)tdt\right)^{m/2}=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m\frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Согласно равенствам (12) запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)}{\left(\frac{n-r}{\pi}\int_0^{\pi/(n-r)}\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)\sin(n-r)tdt\right)^{m/2}}\ge$$

$$\ge\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)}{\left(\frac{n-r}{\pi}\int_0^{\pi/(n-r)}\omega_m^{2/m}\big(f_0^{(r)},t\big)\sin(n-r)tdt\right)^{m/2}}=$$

$$=\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}(\alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1})}{(2/\sqrt{\pi})^m(\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1})}=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m. \tag{13}$$

Сопоставляя оценку сверху (11) с оценкой снизу (13), получаем равенство (6). □

Отметим, что доказанная теорема 1 в случае $s=0$ является своеобразным обобщением результата В.В.Шалаева [29] для класса $L_2^{(r)}:=L_2^{(r)}[0,2\pi]$ периодических дифференцируемых функций на случай класса $B_2^{(r)}$ аналитических в единичном круге функций с ограниченной по норме r-й производной в B_2. □

Следствие 1. При любых $m,n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\ge s$ для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{14}$$

Заметим, что (14) является неравенством типа Джексона–Стечкина для наилучшего совместного приближения функций $f\in B_2^{(r)}$ и их промежуточных производных $f^{(s)}\in B_2$ $(s=1,2,\ldots,r-1,\ r\ge2,\ r\in\mathbb{N})$.

Если функция $\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)$ удовлетворяет условию

$$2\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)};\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\ge\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)+\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n-r}-t\right)\quad\forall\ t\in\left[0,\frac{\pi}{n-r}\right], \tag{15}$$

в частности, если она выпукла вверх на $[0,\pi/(n-r)]$, то неравенство (15) можно уточнить. Действительно, повторяя схему рассуждений, приведенную в ([1], с. 266), применительно к интегралу в правой части (10), где в качестве $l(t)$ вместо линейной взята функция $l(t)=\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)$ при $t\in[0,\pi/2(n-r)]$ и $l(t)=2\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)};\pi/2(n-r)\big)-\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)};\pi/(n-r)-t\big)$ при $t\in[\pi/2(n-r),\pi/(n-r)]$, получим утверждение.

Следствие 2. На множестве функций $f\in B_2^{(r)}$, у которых $\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)$ удовлетворяет условию (15), справедливо неравенство типа Джексона–Стечкина при всех $s\in[0,r]$

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\omega_m\left(f^{(r)};\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)},\ n>r\ge s,\ n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+$.

2. Решение экстремальной задачи (3) для класса функций $W_m^{(r)}(\Phi)$

Пусть $\Phi(u)$ — положительная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Для любых $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ и $u\in(0,2\pi]$ в $B_2^{(r)}$ определим класс функций

$$W_m^{(r)}(\Phi):=\left\{f\in B_2^{(r)}:\frac{\pi}{2u}\int_0^u\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)\sin\frac{\pi}{u}tdt\le\Phi^2(u)\right\}.$$

Положим также

$$(1-\cos t)_*:=\begin{cases}1-\cos t, & \text{если}\quad t\le\pi;\\ 2, & \text{если}\quad t>\pi.\end{cases}$$

В этом разделе в силу теоремы 1 вычислим точное значение экстремальной задачи (3) в случае, когда $\mathfrak{N}^{(r)}:=W_m^{(r)}(\Phi)$.

Теорема 2. *Пусть мажоранта Φ при любом $\mu>0$ и $u\in(0,2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\pi\mu}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}dt\le2\mu\Phi^2(u). \tag{16}$$

Тогда при всех $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{17}$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (16)*, не пусто.*

Доказательство. Неравенство (10) запишем в виде

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\left(\frac{n-r}{2}\int_0^{\pi/(n-r)}\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)\sin(n-r)tdt\right)^{m/2}. \tag{18}$$

Так как (18) верно для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$, то, учитывая определение класса $W_m^{(r)}(\Phi)$ из неравенства (18), получаем

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)=\sup\left\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big):f\in W_m^{(r)}(\Phi)\right\}\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{19}$$

Оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (17), получена. В частности, из (19) следует

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \tag{20}$$

С целью получения оценки снизу указанной величины, согласно неравенству (20) в множестве полиномов $\mathcal{P}_n$ введем $(n+1)$-мерный шар

$$S_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\|p_n\|\le\frac{1}{2^{m/2}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(\Phi)$.

Докажем, что для произвольного полинома $p_n\in\mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega_m^2(p_n^{(r)},t)\le2^m\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t)_*^m\|p_n\|^2. \tag{21}$$

Действительно, в силу формулы (2) и равенства [24]

$$\max_{k\geq n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}=\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}$$

имеем

$$\omega_m^2(p_n^{(r)},t)=2^m\sup_{|h|\leq t}\sum_{k=r+1}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{|a_k(p_n)|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)h)^m=$$

$$=2^m\sup_{|h|\leq t}\sum_{k=r+1}^{n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}\frac{|a_k(p_n)|^2}{k+1}(1-\cos(k-r)h)^m\leq$$

$$\leq 2^m\max_{k\geq n}\alpha_{k,r}^2\frac{k+1}{k-r+1}(1-\cos(n-r)t)_*^m\sum_{k=r+1}^{n}\frac{|a_k(p_n)|^2}{k+1}\leq$$

$$\leq 2^m\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)t)_*^m\|p_n\|^2,$$

и (21) доказано. Учитывая (21) и ограничение (16), получаем

$$\frac{\pi}{2u}\int_0^u\omega_m^{2/m}\big(p_n^{(r)},t\big)\sin\frac{\pi}{u}tdt\leq$$

$$\leq 2\left(\alpha_{n,r}^2\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{1/m}\|p_n\|^{2/m}\frac{\pi}{2u}\int_0^u(1-\cos(n-r)t)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt\leq$$

$$\leq\frac{\pi}{2u}\Phi^2\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\int_0^u(1-\cos(n-r)t)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt\leq$$

$$\leq\frac{n-r}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\int_0^{\pi\mu/(n-r)}(1-\cos(n-r)t)_*\sin\frac{(n-r)t}{\mu}dt=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\pi\mu}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}dt\leq\Phi^2(u).$$

Таким образом, включение $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(\Phi)$ доказано.

Введем функцию

$$g_0(z)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{n-r+1}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right)z^n,\ n>r.$$

Поскольку

$$\|g_0\|=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

функция g_0 является элементом шара S_{n+1} и, следовательно, входит в класс $W_m^{(r)}(\Phi)$. Так как при всех $s=1,2,\ldots,r$ производная s-го порядка

$$g_0^{(s)}(z)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{n-r+1}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right)z^{n-s}$$

и, кроме того,

$$E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right),\tag{22}$$

то, учитывая равенство (22), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)\geq E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right).\tag{23}$$

Требуемое равенство (17) получаем из сопоставления оценки сверху (19) с оценкой снизу (23).

В заключение отметим, что ограничение (16) впервые встречается в работе [30] и там же доказывается, что множество мажорант, удовлетворяющих (16), не пусто. □

Литература

[1] Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* (Наука, М., 1987).

[2] Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений* (МГУ, М., 1976).

[3] Бабенко К.И. *О наилучших приближениях одного класса аналитических функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **22** (5), 631–640 (1958).

[4] Тихомиров В.М. *Теория приближений*, Анализ–2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, ВИНИТИ, М., **14**, 103–260 (1987).

[5] Тайков Л.В. *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций*, Матем. заметки **1** (2), 155–162 (1967).

[6] Тайков Л.В. *Поперечники некоторых классов аналитических функций*, Матем. заметки **22** (2), 285–295 (1977).

[7] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций*, Теория отображений и приближение функций (Наукова думка, Киев, 1983).

[8] Айнуллоев Н, Тайков Л.В. *Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций*, Матем. заметки **40** (3), 341–351 (1986).

[9] Вакарчук С.Б. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций* I, Укр. матем. журнал **42** (7), 873–881 (1990).

[10] Вакарчук С.Б. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций* II, Укр. матем. журнал **42** (8), 1019–1026 (1990).

[11] Вакарчук С.Б. *Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций*, Матем. заметки **57** (1), 30–39 (1995).

[12] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. *О поперечниках классов функций, аналитических в круге*, Матем. сб. **201** (8), 3–22 (2010).

[13] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. *Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве* $H_{q,\rho}\, 1 \le q \le \infty, 0 < \rho \le 1$, Сиб. матем. журн. **57** (2), 469–478 (2016).

[14] Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций*, Фундамент. и прикл. матем. **19** (5), 185–212 (2014).

[15] Парфенов О.Г. *Поперечники одного класса аналитических функций*, Матем. сб. **117(159)** (2), 279–285 (1982).

[16] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. *О поперечниках класса Харди* H_2 *в* n*-мерном шаре*, УМН **45** (5(275)), 193–194 (1990).

[17] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. *О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди* $H_{q,\rho}\, q \ge 1,\ 0 < \rho \le 1$, Матем. заметки **85** (3), 323–329 (2009).

[18] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. *Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам*, Тр. ИММ УрО РАН **25** (2), 258–272 (2019).

[19] Scheik J.T. *Polynomial approximation of functions analytic in a disk*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (6), 1238–1243 (1966).

[20] Гаркави А.Л. *О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **24** (1), 103–128 (1960).

[21] Тиман А.Ф. *К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **24** (3), 421–430 (1960).

[22] Малоземов В.Н. *Совместное приближение функций и ее производных* (ЛГУ, Л., 1973).

[23] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. *Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве* L_2, Матем. заметки **92** (4), 497–514 (2012).

[24] Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. *Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана*, Матем. заметки **110** (2), 266–281 (2021).

[25] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Д.Д. *О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди*, Тр. ИММ УрО РАН **27** (4), 239–254 (2021).

[26] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. *Конструктивная теория функций комплексного переменного* (Наука, М.–Л., 1964).
[27] Шабозов М.Ш. *О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2*, Матем. заметки **114** (3), 435–446 (2023).
[28] Вакарчук М.Б., Вакарчук С.Б. *Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации*, Укр. матем. журн. **63** (12), 1579–1601 (2011).
[29] Шалаев В.В. *О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков*, Укр матем. журн. **43** (1), 125–129 (1991).
[30] Айнуллоев Н. *Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2*, ДАН Тадж. ССР **27** (8), 415–418 (1984).

Мирганд Шабозович Шабозов

Институт математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана,
ул. Садриддина Айни, д. 299/1, г. Душанбе, 734063, Республика Таджикистан;
Таджикский национальный университет,
просп. Рудаки, д. 17, г. Душанбе, 734025, Республика Таджикистан,

e-mail: shabozov@mail.ru

Адолат Азамовна Шабозова

Таджикский национальный университет,
просп. Рудаки, д. 17, г. Душанбе, 734025, Республика Таджикистан,

e-mail: shabozova91@mail.ru

M.Sh. Shabozov and A.A. Shabozova

On simultaneous approximation of certain classes of functions in the Bergman space B_2

Abstract. The problem of finding the supremums of the best simultaneous polynomial approximations of some classes of functions analytic in the unit disk and belonging to the Bergman space B_2 is considered. The indicated function classes are defined by the averaged values of the mth order moduli of continuity of the highest derivative bounded from above by some majorant Φ.

Keywords: simultaneous approximation, upper bound, best approximation, Bergman space, modulus of continuity, majorant.

Mirgand Shabozovich Shabozov

A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
299/1 Sadriddin Aini str., Dushanbe, 734063 Republic of Tajikistan;
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan,

e-mail: shabozov@mail.ru

Adolat Azamovna Shabozova

Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan,

e-mail: shabozova91@mail.ru