Известия вузов. Математика
2024, № 6, с. 49–67
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.Р. МУРЯСОВ

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СВЯЗЬ С ФУНКЦИЯМИ, ВЫПУКЛЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРЫ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Исследуются необходимые и достаточные условия субгармоничности функций, представимых в виде произведения пары функций одной вещественной переменной в декартовой системе координат или в полярной системе координат в областях на плоскости. Устанавливается связь таких функций с функциями, выпуклыми от решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. выпуклыми относительно двух функций.

Ключевые слова: субгармоническая функция, обобщенная производная, обобщенная функция, выпуклая функция, дифференциальный оператор, выпуклость относительно пары функций.

УДК: 517.574: 517.926: 517.927

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-49-67

Введение

В данной работе исследуется, при каких условиях функции вида

$$u(x, y) = f(x)g(y) \tag{1}$$

являются субгармоническими в открытом прямоугольнике $(a, b) \times (c, d)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$. Также в данной работе исследуется, при каких условиях функции вида

$$u(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r)g(\theta) \tag{2}$$

являются субгармоническими в кольцевых секторах, угловых секторах, углах, которым в полярных координатах соответствует открытый прямоугольник $(r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$, а также в кольцах и во всей плоскости.

Вопрос о необходимых и достаточных условиях субгармоничности функций такого вида возник при исследовании Б.Н. Хабибуллиным вопросов, связанных с полнотой систем экспонент. Полученные им ранее результаты о полноте экспоненциальных систем достаточно детально представлены в работах [1]–[4].

Условия будут даны в терминах функций, выпуклых от решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Такие функции, называемые также *L-выпуклыми*, были определены и исследованы А.И. Хейфицем в [5]. Частные случаи *L-выпуклых* функций

Поступила в редакцию 24.04.2023, после доработки 05.07.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Исследование выполнено за счет средств гранта РНФ, проект №22-21-00026 (https://rscf.ru/project/22-21-00026/).

рассматривались ранее Ф.Ф. Бонсаллом, Е.Ф. Беккенбахом, Р.Х. Бингом, М.М. Пейксото в работах [6]–[9] и Б.Я. Левиным в книге [10].

Понятие *субгармонической функции* ввел Ф. Рисс в работе [11]. Субгармонические функции применяются в теории аналитических функций комплексной переменной и в теории потенциала. Подробное изложение теории субгармонических функций дано в книгах [12], [13].

В разделе 1 дана постановка задачи, в разделе 2 сформулирован основной результат в полярных координатах, в разделе 3 сформулированы и доказаны вспомогательные леммы, в разделе 4 дано доказательство основного результата в полярных координатах, в разделе 5 сформулирован и доказан основной результат в декартовых прямоугольных координатах.

1. Постановка задачи

Пусть в интервале (a,b) *вещественной оси* $\mathbb{R}$ задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве лебеговой меры нуль, непрерывна в (a,b), а также имеет в (a,b) обобщенные производные f'_s и f''_s, принадлежащие $L_{1,\mathrm{loc}}(a,b)$. Под обобщенными производными, следуя [14], в данной статье будем понимать *обобщенные производные в смысле Соболева,* т. е. $D^{(l)}f = g$ в области G для мультииндекса l тогда и только тогда, когда $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, и $D^{(l)}T_f = T_g$, где T_f, T_g — регулярные обобщенные функции, или регулярные распределения, порожденные функциями f и g соответственно.

Кроме того, пусть в интервале $(c,d) \subset \mathbb{R}$ задана вещественная функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве лебеговой меры нуль, непрерывна в (c,d), имеет в (c,d) обобщенные производные в смысле Соболева g'_s и g''_s, принадлежащие $L_{1,\mathrm{loc}}(c,d)$ (локально интегрируемые по Лебегу в интервале (c,d)).

Рассмотрим функцию u вида (1). В данной работе будут сформулированы и доказаны необходимое и достаточное условие субгармоничности функции u в $(a,b) \times (c,d)$. Так как (a,b) и (c,d) — конечные или бесконечные интервалы, то рассматриваемое множество может быть открытым прямоугольником, полуполосой, полосой, параллельно перенесенной координатной четвертью, полуплоскостью или всей плоскостью.

Пусть теперь f задана в интервале (r_1,r_2), где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$, g задана в интервале (θ_1,θ_2), где $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, и функции f, g в этих интервалах удовлетворяют таким же условиям, как и в рассмотренном выше случае.

Рассмотрим функцию u, в полярной системе координат имеющую вид (2). В данной работе будут сформулированы и доказаны необходимое и достаточное условия субгармоничности функции u в угловом секторе, угле или кольцевом секторе, которому в полярных координатах соответствует прямоугольник $(r_1,r_2) \times (\theta_1,\theta_2)$. Для случая, когда функция g определена на всей числовой прямой и 2π-периодична, будут доказаны необходимое и достаточное условия субгармоничности функции u в кольце и во всей плоскости без начала координат.

Приведем данное в [5] определение L-выпуклой функции.

Определение 1. Рассмотрим конечный или бесконечный интервал (a,b) и линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q, \tag{3}$$

где p и q непрерывные в интервале (a,b) функции. Функция f называется *L-выпуклой* в интервале (a,b), если для каждого интервала единственности $(a_1,b_1) \subset (a,b)$ и для любых x, x_1, $x_2 \in (a_1,b_1)$: $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant v(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)),$$

где $v(x, x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ — решение краевой задачи
$$Lv = 0, v(x_1) = f(x_1), v(x_2) = f(x_2).$$

Определение 2. Пусть функции f_1, f_2 образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $Lf = 0$, где L — оператор вида (3). Функцию f будем называть $\{f_1, f_2\}$-*выпуклой* в интервале (a, b), если она L-выпуклая в интервале (a, b).

Пример 1. Функции $f_1 = 1$, $f_2 = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L_0 f = 0$, где $L_0 = \dfrac{d^2}{dx^2}$, а класс L_0-выпуклых функций совпадает [5] с классом обычных выпуклых функций. Таким образом, $\{1, x\}$-выпуклые функции в интервале (a, b) — *обычные выпуклые функции.*

Пример 2. $\{\ln(x), 1\}$-выпуклую функцию в интервале (a, b) чаще всего называют *выпуклой относительно* ln, или иногда логарифмически выпуклой функцией.

Пример 3. Конечные *ρ-тригонометрически выпуклые функции* в интервале (a, b) — в точности $\{\sin(\rho x), \cos(\rho x)\}$-выпуклые функции в интервале (a, b).

Замечание 1. Заметим, что ρ-тригонометрически выпуклые функции, вообще говоря, могут принимать и бесконечные значения ([10], гл. 1, с. 74, лемма 6).

Пример 4. *ρ-гиперболически выпуклая функция* в интервале (a, b) — в точности $\{e^{\rho x}, e^{-\rho x}\}$-выпуклая функция в интервале (a, b).

По аналогии с примерами 3 и 4 введем

Определение 3. $\{x^{\rho}, x^{-\rho}\}$-выпуклую функцию в интервале (a, b) будем называть *ρ-степенно выпуклой* функцией в интервале (a, b).

Замечание 2. В данной статье под положительными функциями будем понимать функции, которые больше или равны нулю.

Замечание 3. Под мерой всюду далее будем понимать n-мерную меру Лебега, для одномерных и двумерных областей — линейную или плоскую меру Лебега соответственно. Связанные с мерой понятия, например, почти всюду, тоже будем понимать в смысле n-мерной меры Лебега.

2. Формулировка основного результата в полярных координатах

Сформулируем необходимое и достаточное условие субгармоничности функции, представимой в полярных координатах в виде произведения пары функций одной переменной в углах, угловых секторах и кольцевых секторах.

Теорема 1. *Пусть в интервале (r_1, r_2), где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$, задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (r_1, r_2), а также имеет в (r_1, r_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f'_s и f''_s. Пусть в интервале (θ_1, θ_2), где $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, задана вещественная функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (θ_1, θ_2), а также имеет в (θ_1, θ_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g'_s и g''_s. Функция u, в полярной системе координат (r, θ) имеющая вид (2), является субгармонической функцией в угле, угловом секторе или кольцевом секторе G, заданном соотношениями $r_1 < r < r_2$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, которому в полярных координатах соответствует открытый* *прямоугольник (или полуполоса) $P = (r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$, тогда и только тогда, когда существует вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2), где*

$$L_{h1} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - h, \tag{4}$$

$$L_{h2} = \frac{d^2}{d\theta^2} + h. \tag{5}$$

Если вместо понятия L-выпуклости воспользоваться определением 2 выпуклости от пары функций и рассмотренными в определении 3 и примерах 1–4 понятиями, то теореме 1 можно придать такой вид.

Следствие 1. *Пусть в интервале (r_1, r_2), где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$, задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (r_1, r_2), а также имеет в (r_1, r_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f'_s и f''_s. Пусть в интервале (θ_1, θ_2), где $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, задана вещественная функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (θ_1, θ_2), а также имеет в (θ_1, θ_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g'_s и g''_s. Функция u, в полярной системе координат (r, θ) имеющая вид (2), является субгармонической функцией в угле, угловом секторе или кольцевом секторе G, заданном соотношениями $r_1 < r < r_2$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, которому в полярных координатах соответствует открытый прямоугольник (или полуполоса) $P = (r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$, тогда и только тогда, когда существует вещественное число h, для которого выполняется одно из трех нижеследующих утверждений*:

1) *$h > 0$, f — $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2);*
2) *$h = 0$, f — логарифмически выпуклая в интервале (r_1, r_2) функция, g — выпуклая в интервале (θ_1, θ_2) функция;*
3) *$h < 0$, f — $\Big\{\sin\big(\sqrt{|h|}\ln(r)\big), \cos\big(\sqrt{|h|}\ln(r)\big)\Big\}$-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{|h|}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2).*

Теорема 1 и следствие 1 дают необходимое и достаточное условие субгармоничности функции u в углах, угловых и кольцевых секторах. Наложив на функцию g условия 2π-периодичности и отличности от константы, сформулируем необходимое и достаточное условие субгармоничности функции u в кольцах и во всей плоскости без начала координат.

Теорема 2. *Пусть в интервале (r_1, r_2), где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$, задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (r_1, r_2), а также имеет в (r_1, r_2) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f'_s и f''_s. Пусть в интервале $(-\infty, +\infty)$ задана отличная от константы вещественная 2π-периодическая функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в $(-\infty, +\infty)$, а также имеет в $(-\infty, +\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g'_s и g''_s. Функция u, в полярной системе координат (r, θ) имеющая вид (2), является субгармонической функцией в кольце K, заданном соотношениями $r_1 < r < r_2$ (K является всей плоскостью без начала координат, если $r_1 = 0$, $r_2 = +\infty$), которому в полярных координатах соответствует полуполоса или полуплоскость $P = (r_1, r_2) \times (-\infty, +\infty)$, тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.*

Так как функция u имеет вид

$$u(x(r,\theta), y(r,\theta)) = f(r)g(\theta),$$

то в начале координат она либо не определена, либо обращается в нуль. Для случая, когда функция u в начале координат обращается в нуль, сформулируем необходимое и достаточное условия субгаромоничности функции u во всей плоскости.

Следствие 2. *Пусть в $[0,+\infty)$ задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, $f(0) = 0$, f непрерывна в $[0,+\infty)$, а также имеет в $(0,+\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f'_s и f''_s. Пусть в интервале $(-\infty,+\infty)$ задана отличная от константы вещественная 2π-периодическая функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в $(-\infty,+\infty)$, а также имеет в $(-\infty,+\infty)$ локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g'_s и g''_s. Функция u, в полярной системе координат (r,θ) имеющая вид (2), является субгармонической во всей плоскости тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале $(0,+\infty)$, g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty,+\infty)$.*

3. Вспомогательные леммы. Некоторые свойства L-выпуклых функций

Лемма 1. *Пусть в конечном или бесконечном интервале (a,b) задана вещественная функция f, которая непрерывна слева или непрерывна справа в интервале (a,b). Пусть вещественная функция g непрерывна в интервале (a,b). Если почти всюду в (a,b) $f(x) = g(x)$, то $f \equiv g$ в (a,b).*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f(x) = g(x)$ почти всюду в (a,b), и найдется такая точка $x_0 \in (a,b)$, в которой $f(x_0) \neq g(x_0)$. Тогда пусть $f(x_0) - g(x_0) = c \neq 0$. Так как функция g непрерывна в (a,b), то она непрерывна и слева и справа в этом интервале.

Если f непрерывна слева в (a,b), то

$$\lim_{x\to x_0-0}(f(x) - g(x)) = c.$$

Тогда по определению предела слева найдется левая полуокрестность $(x_0 - h, x_0) \subset (a,b)$, где $h > 0$, в которой

$$|f(x) - g(x) - c| < \frac{|c|}{2},$$

следовательно,

$$\frac{|c|}{2} < \bigl|f(x) - g(x)\bigr| < \frac{3|c|}{2}$$

в $(x_0 - h, x_0)$. Отсюда следует $|f - g| > 0$ в интервале $(x_0 - h, x_0)$ положительной меры h, принадлежащем интервалу (a,b), что противоречит предположению о равенстве f и g почти всюду в (a,b). Из полученного противоречия следут истинность утверждения леммы для непрерывной слева функции f.

Если f непрерывна справа в (a,b), то

$$\lim_{x\to x_0+0}(f(x) - g(x)) = c.$$

Тогда по определению предела справа найдется правая полуокрестность $(x_0, x_0+h) \subset (a,b)$, где $h > 0$, в которой

$$|f(x) - g(x) - c| < \frac{|c|}{2},$$

следовательно,

$$\frac{|c|}{2} < \bigl|f(x) - g(x)\bigr| < \frac{3|c|}{2}$$

в $(x_0, x_0 + h)$. Отсюда получаем, что $|f - g| > 0$ в интервале $(x_0, x_0 + h)$ положительной меры h, принадлежащем интервалу (a, b), что противоречит предположению о равенстве f и g почти всюду в (a, b). Из полученного противоречия следут истинность утверждения леммы для непрерывной справа функции f. □

Лемма 2. *Пусть вещественные функции f, g непрерывны в конечном или бесконечном интервале (a, b) и совпадают в нем почти всюду, тогда $f \equiv g$ в (a, b).*

Доказательство. Так как функция f непрерывна в (a, b), то она непрерывна слева в этом интервале. Тогда, если $f(x) = g(x)$ почти всюду в (a, b), по лемме 1 $f \equiv g$ в (a, b), что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Пусть функция f локально интегрируема по Лебегу в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и пусть $f \geqslant 0$ почти всюду в G тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset G$*

$$\int_K f(x)dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как $f \geqslant 0$ почти всюду в G, то $f \geqslant 0$ почти всюду на произвольном компакте $K \subset G$. Поскольку функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, она интегрируема по Лебегу на K. Так как $f \geqslant 0$ почти всюду на K, то

$$\int_K f(x)dx \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Так как $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то f — измеримая в области G функция. Тогда множество $X = \{x \in G : f(x) < 0\}$ измеримо. Пусть для произвольного компакта $K \subset G$

$$\int_K f(x)dx \geqslant 0.$$

Предположим что множество X имеет положительную или бесконечную меру. Из σ-аддитивности меры Лебега следует, что существуют $\varepsilon > 0$, множество $Y \subset X$ положительной или бесконечной меры, для которых $f \leqslant -\varepsilon$ на Y. Вследствие регулярности меры Лебега найдется компакт $K \subset Y$ такой, что

$$\int_K f(x)dx < 0.$$

Получаем противоречие, которое доказывает достаточность. □

Лемма 4. *Пусть функция f локально интегрируема по Лебегу в области G. Тогда $f \geqslant 0$ почти всюду в G тогда и только тогда, когда для любой положительной основной функции $\varphi \in D(G)$*

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то для любой основной функции $\varphi \in D(G)$ функция $f\varphi$ интегрируема по Лебегу в области G. Если $f \geqslant 0$ почти всюду в G, то для любой положительной основной функции $\varphi \in D(G)$ $f\varphi \geqslant 0$ почти всюду в G. Тогда, так как

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx = \int_{K_\varphi} f(x)\varphi(x)dx,$$

где K_φ — носитель основной функции φ, по лемме 3 для любой положительной основной функции $\varphi \in D(G)$

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для любой положительной основной функции $\varphi \in D(G)$

$$\int_G f(x)\varphi(x)dx \geqslant 0.$$

Так как $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, то f — измеримая в области G функция. Пусть компакт $K \subset G$, χ_M — характеристическая функция множества M. Существует последовательность функций $\varphi_n \in D(G)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ в G, $\varphi_n|_K \equiv 1$ и $\varphi_n \to \chi_K$ поточечно в G. По теореме Лебега

$$\int_K f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_K f(x)\varphi_n(x)dx,$$

а значит,

$$\int_K f(x)dx \geqslant 0.$$

По лемме 3 $f \geqslant 0$ в G, что и требовалось доказать.

□

Лемма 5. *Пусть задан линейный дифференциальный оператор L вида* (3)*, где p, q — непрерывные в конечном или бесконечном интервале (a, b) функции. Если f является L-выпуклой функцией в интервале (a, b) и имеет в интервале (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные в смысле Соболева f'_s, f''_s, то функция f и ее обычная производная f' абсолютно непрерывны на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, а ее обычная производная второго порядка f'' локально интегрируема по Лебегу в интервале (a, b), и обычные производные f' и f'' также являются обобщенными производными первого и второго порядка, соответственно, в смысле Соболева.*

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условиям данной леммы. Так как она L-выпуклая в интервале (a, b), то согласно [5] f непрерывна в интервале (a, b), имеет в (a, b) непрерывную слева левостороннюю производную f'_- и непрерывную справа правостороннюю производную f'_+, причем за исключением не более чем счетного множества точек $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$, а также почти всюду в (a, b) существует вторая производная f''. Так как функция f имеет в интервале (a, b) обобщенную производную $f'_s \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$, то согласно ([14], с. 41–44) f совпадает почти всюду в (a, b) с некоторой абсолютно непрерывной на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ функцией f_0, а ее обобщенная производная f'_s почти всюду совпадает с обычной производной f'_0 функции f_0. Поскольку функция f_0 абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, она равномерно непрерывна, а значит, и непрерывна на любом таком отрезке. Тогда функция f_0 непрерывна в интервале (a, b). Так как функции f и f_0 непрерывны в интервале (a, b) и совпадают в нем почти всюду, то по лемме 2 $f \equiv f_0$ в (a, b), следовательно, и $f' \equiv f'_0$ в (a, b). Отсюда получаем, что f абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, а $f' = f'_s$ почти всюду в (a, b), т. е. f' также является обобщенной производной первого порядка в смысле Соболева. Поскольку функция f имеет в интервале (a, b) обобщенную производную второго порядка $f''_s \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$, согласно ([14], с. 41–44) f почти всюду в (a, b) совпадает с функцией f_{00}, имеющей в (a, b) абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1]$ производную f'_{00}, и f''_s почти всюду в (a, b) совпадает с обычной второй производной f''_0. Тогда f'_{00} равномерно непрерывна, а значит, и непрерывна на произвольном отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, следовательно, она непрерывна в интервале (a, b). Тогда f_{00} непрерывно дифференцируема в интервале (a, b), поэтому и непрерывна в интервале (a, b). Тогда по лемме 2 $f \equiv f_{00}$ в (a, b). Так как $f \equiv f_{00}$ в (a, b), то $f' \equiv f'_{00}$ в интервале (a, b) и $f'' \equiv f''_{00}$ в (a, b). Отсюда получаем, что f' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и непрерывна в интервале (a, b). В силу абсолютной непрерывности f' на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ f'' интегрируема по Лебегу на каждом таком отрезке, отсюда следует $f'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$, а так как $f'' \equiv f''_{00}$ в (a, b), то $f'' = f''_s$ почти всюду в (a, b), а значит, является обобщенной производной второго порядка в смысле Соболева. □

Лемма 6. *Пусть задан линейный дифференциальный оператор L вида* (3), *где p, q — непрерывные в конечном или бесконечном интервале (a, b) функции. Если f — L-выпуклая функция в интервале (a, b) и ее производная f' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, то f имеет в (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные первого и второго порядка в смысле Соболева f'_s, f''_s, которые совпадают почти всюду с обычными производными f' и f'' соответственно.*

Доказательство. Так как f' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, то f также абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Тогда согласно ([14] с. 41–44), так как f абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, она имеет обобщенную производную $f'_s \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$, совпадающую почти всюду в (a, b) с обычной производной f', а поскольку f' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, существует обобщенная производная $f''_s \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$, совпадающая почти всюду в (a, b) с f''. □

Лемма 7. *Пусть функция f непрерывна в интервале (a, b). Тогда f имеет локально интегрируемые по Лебегу в (a, b) обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядка f'_s и f''_s, если и только если f абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и имеет в (a, b) абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ обычную производную f'.*

Доказательство. Согласно ([14], с. 41–44) функция f имеет локально интегрируемую обобщенную производную порядка l $f_s^{(l)}$ тогда и только тогда, когда совпадает почти всюду в (a, b) с некоторой функцией f_0, имеющей абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ обычную производную порядка $l-1$ $f_0^{(l-1)}$, причем обобщенной производной $f_s^{(l)}$ является любая функция, совпадающая почти всюду в (a, b) с обычной производной $f_0^{(l)}$.

Отсюда получаем, что если функция f имеет локально интегрируемые по Лебегу в (a, b) обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядка f'_s и f''_s, то она совпадает почти всюду в (a, b) с некоторой функцией f_0, которая имеет в (a, b) абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ обычную производную f'_0. Так как f_0 имеет в (a, b) абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ производную, то f_0 абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, тогда она непрерывна в интервале (a, b). Отсюда по лемме 2 получаем, что функции f и f_0 тождественно совпадают в интервале (a, b), значит, f и ее производная f' абсолютно непрерывны на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. *Необходимость* доказана.

Если функция f абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и имеет в (a, b) абсолютно непрерывную на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ обычную производную f', ее вторая производная f'' существует почти всюду в (a, b) и интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, т. е. $f'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(a, b)$. С учетом приведенных в начале доказательства леммы условий существования локально интегрируемых обобщенных производных f имеет в (a, b) обобщенные производные в смысле Соболева f'_s, f''_s , совпадающие почти всюду с ее обычными производными того же порядка. *Достаточность* доказана. $\square$

Лемма 8. *Пусть задан линейный дифференциальный оператор L вида (3), где p, q — непрерывные в конечном или бесконечном интервале (a, b) функции. Если f — L-выпуклая функция в интервале (a, b) и имеет в (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядка f'_s, f''_s, то*

$$f''_s + pf'_s + qf \geqslant 0$$

почти всюду в (a, b).

Доказательство. Так как согласно [5] функция f L-выпуклая в интервале (a, b), то функция

$$s(x) = f'_-(x) + \int_{x_0}^{x} f'(t)p(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(t)q(t)dt$$

является неубывающей в интервале (a, b), тогда для любых $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$, $s(x_2) \geqslant s(x_1)$, т. е. для произвольных $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

$$f'_-(x_2) - f'_-(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f'(t)p(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)q(t)dt \geqslant 0. \tag{6}$$

Так как ввиду леммы 5 f' абсолютно непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу (a, b), то f' непрерывна в интервале (a, b), следовательно, $f'_- \equiv f$ в (a, b), отсюда из (6) получаем для всех $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

$$f'(x_2) - f'(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f'(t)p(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)q(t)dt \geqslant 0. \tag{7}$$

В силу абсолютной непрерывности f' на произвольном отрезке, принадлежащем интервалу (a, b), для любых $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

$$f'(x_1) - f'(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f''(t)dt. \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекает, что для произвольных $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} (f''(t) + p(t)f'(t) + q(t)f(t))dt \geqslant 0. \tag{9}$$

Согласно лемме 5 почти всюду в (a, b) $f'_s = f'$ и $f''_s = f''$, тогда из (9) получаем для всех $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} (f''_s(t) + p(t)f'_s(t) + q(t)f(t))dt \geqslant 0. \tag{10}$$

Из (10) по лемме 3 следует $f''_s + pf'_s + qf \geqslant 0$ почти всюду в (a, b), что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 9. *Пусть задан линейный дифференциальный оператор L вида (3), где p, q — непрерывные в конечном или бесконечном интервале (a, b) функции. Если функция f непрерывна в интервале (a, b) и имеет в (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядка f'_s, f''_s, и*

$$f''_s + pf'_s + qf \geqslant 0$$

почти всюду в (a, b), то f — L-выпуклая функция в интервале (a, b).

Доказательство. Так как $f_s'' + pf_s' + qf \geqslant 0$ почти всюду в (a, b), то в силу леммы 3 для всех $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ верно неравенство (10). По лемме 7 функции f и f' абсолютно непрерывны на любом отрезке, принадлежащем интервалу (a, b), тогда почти всюду в (a, b) $f_s' = f'$ и $f_s'' = f''$. Следовательно, для любых $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ верно неравенство (9). Отсюда, так как в силу абсолютной непрерывности f' на любом отрезке, принадлежащем интервалу (a, b), для всех $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ верно равенство (8), то для любых $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ верно неравенство (7). Значит, для всех $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ верно неравенство (6), следовательно, функция

$$s(x) = f_-'(x) + \int_{x_0}^{x} f'(t)p(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(t)q(t)dt$$

является неубывающей в интервале (a, b). Поэтому согласно [5] f — L-выпуклая функция в интервале (a, b), что и требовалось доказать. □

Лемма 10. *Пусть функция f измерима в конечном или бесконечном интервале (a, b), функция g измерима в конечном или бесконечном интервале (c, d) и почти всюду в смысле двумерной меры Лебега в области $(a, b) \times (c, d)$ верно неравенство*

$$f(x) \geqslant g(y).$$

Тогда существует вещественное число h, для которого почти всюду в смысле одномерной меры Лебега в интервале (a, b)

$$f(x) \geqslant h$$

и почти всюду в смысле одномерной меры Лебега в интервале (c, d)

$$g(y) \leqslant h.$$

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях данной леммы f существенно ограничена снизу в интервале (a, b) и g существенно ограничена сверху в интервале (c, d). Предположив противное, получаем, что возможны три случая:

1) f не является существенно ограниченной снизу в интервале (a, b) и g не является существенно ограниченной сверху в интервале (c, d);
2) f существенно ограничена снизу в интервале (a, b) и g не является существенно ограниченной сверху в интервале (c, d);
3) f не является существенно ограниченной снизу в интервале (a, b) и g существенно ограничена сверху в интервале (c, d).

В первом случае для любого $h \in \mathbb{R}$ найдутся множества $X_1 = \{x \in (a, b) : f(x) < h\}$, имеющее положительную меру μ_1, и $X_2 = \{y \in (c, d) : g(y) > h\}$, имеющее положительную меру μ_2. Тогда $f(x) < g(y)$ на множестве $X_1 \times X_2$, имеющем положительную меру $\mu_1 \cdot \mu_2$, что противоречит условию данной леммы.

Во втором случае так как f существенно ограничена снизу в интервале (a, b), то она имеет существенную нижнюю грань h_1. Тогда для всех $h > h_1$ найдутся множества $X_1 = \{x \in (a, b) : f(x) < h\}$, имеющее положительную меру μ_1, и $X_2 = \{y \in (c, d) : g(y) > h\}$, имеющее положительную меру μ_2. Поэтому $f(x) < g(y)$ на множестве $X_1 \times X_2$, имеющем положительную меру $\mu_1 \cdot \mu_2$, что противоречит условию данной леммы.

В третьем случае, так как g существенно ограничена сверху в интервале (c, d), то она имеет существенную верхнюю грань h_2. Тогда для всех $h < h_2$ найдутся множества $X_1 = \{x \in (a, b) : f(x) < h\}$, имеющее положительную меру μ_1, и $X_2 = \{y \in (c, d) : g(y) > h\}$, имеющее положительную меру μ_2. Поэтому $f(x) < g(y)$ на множестве $X_1 \times X_2$, имеющем положительную меру $\mu_1 \cdot \mu_2$, что противоречит условию данной леммы.

Из вышедоказанного следует, что в условиях данной леммы функция f существенно ограничена снизу в интервале (a,b) и функция g существенно ограничена сверху в интервале (c,d). Тогда существуют существенная нижняя грань функции f в интервале (a,b) h_1 и существенная верхняя грань функции g в интервале (c,d) h_2. Докажем, что $h_1 \geqslant h_2$. Предположим противное: пусть $h_1 < h_2$. Тогда для всех $h_1 < h < h_2$ найдутся множества $X_1 = \{x \in (a,b) : f(x) < h\}$, имеющее положительную меру μ_1, и $X_2 = \{y \in (c,d) : g(y) > h\}$, имеющее положительную меру μ_2. Поэтому $f(x) < g(y)$ на множестве $X_1 \times X_2$, имеющем положительную меру $\mu_1 \cdot \mu_2$, что противоречит условию данной леммы. Полученное противоречие доказывает, что $h_1 \geqslant h_2$. Тогда существует $h \in \mathbb{R}$: $h_1 \geqslant h \geqslant h_2$. Отсюда следует $f \geqslant h$ почти всюду в (a,b) и $g \leqslant h$ почти всюду в (c,d), что и требовалось доказать. □

4. Доказательство основного результата в полярных координатах

Доказательство теоремы 1. Из ([15], с. 117, теорема 4.1.8) следует, что u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда $\Delta T_u \geqslant 0$, где T_u — распределение, заданное локально интегрируемой в G функцией u. Так как функции f, g имеют локально интегрируемые в интервалах (r_1, r_2) и (θ_1, θ_2), соответствено, обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядков f'_s, f''_s, g'_s, g''_s, то функция $u(x(r,\theta), y(r,\theta)) = f(r)g(\theta)$ имеет в $P = (r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$ локально интегрируемые обобщенные частные производные в смысле Соболева первого и второго порядка $u'_r = f'_s(r)g(\theta)$, $u'_\theta = f(r)g'_s(\theta)$, $u''_{rr} = f''_s(r)g(\theta)$, $u''_{r\theta} = f'_s(r)g'_s(\theta)$, $u''_{\theta\theta} = f(r)g''_s(\theta)$ (это верно, так как обобщенная производная в смысле Соболева произвольной локально интегрируемой в некоторой области функции u является локально интегрируемой в этой области функцией, задающей регулярное распределение (регулярную обобщенную функцию), являющееся производной того же порядка в смысле распределений для распределения, задаваемого функцией u, тогда данные выше формулы для обобщенных производных функции u следуют из формул дифференцирования прямого произведения распределений). Так как отображение области G в область P путем преобразования координат из декартовой системы координат в полярную есть взаимно однозначное отображение класса C^∞ с ненулевым якобианом (диффеоморфизм класса C^∞), то обратное отображение области P на область G также есть диффеоморфизм класса C^∞. Значит, функция u в области G имеет локально интегрируемые обобщенные производные в смысле Соболева первого и второго порядков u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}, причем соотношения между обобщенными производными в декартовых координатах и в полярных координатах такие же, как и для гладких функций, понимаются в смысле классов эквивалентности. Поэтому в силу существования локально интегрируемых обобщенных производных первого и второго порядков в области G $\Delta T_u \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда для любой основной функции $\varphi \in D(G)$, $\varphi(x,y) \geqslant 0$ в G,

$$\iint_G (u''_{xx} + u''_{yy})\varphi(x,y)\,dxdy \geqslant 0. \qquad (11)$$

Так как по лемме 4 (11) верно тогда и только тогда, когда почти всюду в G выполняется неравенство

$$u''_{xx} + u''_{yy} \geqslant 0. \qquad (12)$$

В силу того, что при диффеоморфизме множество меры нуль отображается в множество меры нуль, верно (12) почти всюду в G тогда и только тогда, когда почти всюду в P верно неравенство

$$u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \geqslant 0. \qquad (13)$$

Из вышеизложенного следует, что u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда почти всюду в области P верно неравенство (13). Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть u — субгармоническая функция в области G, тогда почти всюду в области $P=(r_1,r_2)\times(\theta_1,\theta_2)$ верно неравенство (13). Так как $u'_r=f'_s(r)g(\theta)$, $u''_{rr}=f''_s(r)g(\theta)$, $u''_\theta=f(r)g''_s(\theta)$, то почти всюду в P верно неравенство

$$r^2f''_s(r)g(\theta)+rf'_s(r)g(\theta)+f(r)g''_s(\theta)\geqslant 0. \tag{14}$$

Поскольку $f\geqslant 0$ в (r_1,r_2) и $f=0$ лишь на множестве меры нуль в (r_1,r_2), $g\geqslant 0$ в (θ_1,θ_2) и $g=0$ лишь на множестве меры нуль в (θ_1,θ_2), то $f(r)g(\theta)\geqslant 0$ в $P=(r_1,r_2)\times(\theta_1,\theta_2)$ и $f(r)g(\theta)=0$ лишь на множестве меры нуль в P. Поэтому из (14) следует, что почти всюду в P верно неравенство

$$\frac{r^2f''_s(r)+rf'_s(r)}{f(r)}+\frac{g''_s(\theta)}{g(\theta)}\geqslant 0. \tag{15}$$

Из (15) получаем, что почти всюду в P верно неравенство

$$\frac{r^2f''_s(r)+rf'_s(r)}{f(r)}\geqslant -\frac{g''_s(\theta)}{g(\theta)}. \tag{16}$$

Так как f'_s,$f''_s\in L_{1,\mathrm{loc}}(r_1,r_2)$, f непрерывна в интервале (r_1,r_2) и $f(r)=0$ лишь на множестве меры нуль в (r_1,r_2), то функция $\dfrac{r^2f''_s(r)+rf'_s(r)}{f(r)}$ измерима в интервале (r_1,r_2). Так как $g''_s\in L_{1,\mathrm{loc}}(\theta_1,\theta_2)$, g непрерывна в интервале (θ_1,θ_2) и $g(\theta)=0$ лишь на множестве меры нуль в (θ_1,θ_2), то функция $-\dfrac{g''_s(\theta)}{g(\theta)}$ измерима в интервале (θ_1,θ_2). Тогда по лемме 10 из неравенства (16) следует, что существует такое вещественное число h, для которого почти всюду в (r_1,r_2) верно неравенство

$$\frac{r^2f''_s(r)+rf'_s(r)}{f(r)}\geqslant h \tag{17}$$

и почти всюду в (θ_1,θ_2) верно неравенство

$$-\frac{g''_s(\theta)}{g(\theta)}\leqslant h. \tag{18}$$

Так как $f\geqslant 0$ в (r_1,r_2) и $f=0$ лишь на множестве меры нуль в (r_1,r_2), то из (17) имеем, что почти всюду в (r_1,r_2) верно неравенство

$$r^2f''_s+rf'_s-hf\geqslant 0. \tag{19}$$

В силу того, что $g\geqslant 0$ в (θ_1,θ_2) и $g=0$ лишь на множестве меры нуль в (θ_1,θ_2), из (18) следует, что почти всюду в (θ_1,θ_2) верно неравенство

$$g''_s+hg\geqslant 0. \tag{20}$$

Через L_{h1} обозначив оператор вида (4), через L_{h2} — оператор вида (5), из (19) в силу леммы 9 вытекает, что f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1,r_2), а из (20) в силу леммы 9 вытекает, что g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1,θ_2), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть существует такое вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1,r_2), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1,θ_2). Тогда по лемме 8 почти всюду в (r_1,r_2) верно неравенство (19) и почти всюду в (θ_1,θ_2) верно неравенство (20). Так как $f\geqslant 0$ в (r_1,r_2) и $f=0$ лишь на множестве меры нуль в (r_1,r_2), то из (19) следует, что почти всюду в (r_1, r_2) верно неравенство (17), а поскольку $g \geqslant 0$ в (θ_1, θ_2) и $g = 0$ лишь на множестве меры нуль в (θ_1, θ_2), из (20) следует, что почти всюду в (θ_1, θ_2) верно неравенство (18). Тогда почти всюду в области P верно неравенство (16), значит, почти всюду в P выполняется неравенство (15). Поскольку $f \geqslant 0$ в (r_1, r_2) и $f = 0$ лишь на множестве меры нуль в (r_1, r_2), $g \geqslant 0$ в (θ_1, θ_2) и $g = 0$ лишь на множестве меры нуль в (θ_1, θ_2), то $f(r)g(\theta) \geqslant 0$ в $P = (r_1, r_2) \times (\theta_1, \theta_2)$ и $f(r)g(\theta) = 0$ лишь на множестве меры нуль в P. Поэтому из (15) следует, что почти всюду в P верно неравенство (14), тогда почти всюду в P верно неравенство (13), а это означает, что u — субгармоническая функция в области G, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство следствия 1. Так как по теореме 1 u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2), где L_{h1} — оператор вида (4), L_{h2} — оператор вида (5),

Так как при $h > 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $r^{\sqrt{h}}$, $r^{-\sqrt{h}}$, а фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $\sin(\sqrt{h}\theta)$, $\cos(\sqrt{h}\theta)$, то с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 при $h > 0$ u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2).

Поскольку при $h = 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $\ln(r)$, 1, $L_{h2} = \dfrac{d^2}{dy^2} = L_0$ и согласно [5] L_0-выпуклые в некотором интервале функции являются выпуклыми в этом интервале, с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 при $h = 0$ u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — логарифмически выпуклая в интервале (r_1, r_2) функция, g — выпуклая в интервале (θ_1, θ_2) функция.

Так как при $h < 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $\sin(\sqrt{|h|}\ln(r))$, $\cos(\sqrt{|h|}\ln(r))$, а фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $e^{\sqrt{|h|}\theta}$, $e^{-\sqrt{|h|}\theta}$, то с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 при $h < 0$ u — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — $\{\sin(\sqrt{|h|}\ln(r)), \cos(\sqrt{|h|}\ln(r))\}$-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{h}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2). $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как отображение области K путем преобразования координат из декартовых прямоугольных в полярные будет диффеоморфизмом класса C^∞ при выборе каждого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ на область $P_k = (r_1, r_2) \times [2\pi k, 2\pi(k+1))$, то с учетом изложенного в доказательстве теоремы 1 функция u является субгармонической в области K тогда и только тогда, когда $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ почти всюду в P_k выполняется неравенство (13). Тогда, так как область $P = (r_1, r_2) \times (-\infty, +\infty) = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} P_k$ есть счетное объединение всех таких областей P_k и объединение счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, u — субгармоническая функция в области K тогда и только тогда, когда почти всюду в P верно неравенство (13). Повторив доказательство теоремы 1 с заменой интервала θ_1, θ_2 на $(-\infty, +\infty)$, получаем, что почти всюду в области P верно неравенство (13), т. е. u — субгармоническая функция в области K тогда и только тогда, когда существует вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2), где L_{h1} — оператор вида (4), L_{h2} — оператор вида (5).

При $h = 0$ имеем $L_{h2} = \dfrac{d^2}{d\theta^2} = L_0$. Таким образом, согласно [5] функция g выпуклая на $\mathbb{R}$. Так как функция g непрерывна в $(-\infty, +\infty)$ и 2π-периодична, то она ограничена в $(-\infty, +\infty)$, а всякая выпуклая и ограниченная на всей числовой прямой функция есть константа, то случай $h = 0$ невозможен в условиях данной теоремы.

Поскольку при $h < 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $e^{\sqrt{|h|}\theta}$, $e^{-\sqrt{|h|}\theta}$, решение любой краевой задачи

$$L_{h2}v = 0, v(\theta_1) = g(\theta_1), v(\theta_2) = g(\theta_2)$$

есть линейная комбинация $c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}$, причем, так как при $\theta_1 \neq \theta_2$

$$e^{\sqrt{|h|}\theta_1} e^{-\sqrt{|h|}\theta_2} - e^{\sqrt{|h|}\theta_2} e^{-\sqrt{|h|}\theta_1} = e^{\sqrt{|h|}(\theta_1 - \theta_2)} - e^{\sqrt{|h|}(\theta_2 - \theta_1)} \neq 0,$$

то при произвольных $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$: $\theta_1 < \theta_2$ решение этой краевой задачи существует и единственно. Тогда для любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$: $\theta_1 < \theta_2$ в силу того, что g — L_{h2}-выпуклая функция, в любом интервале (θ_1, θ_2)

$$g(\theta) \leqslant c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}, \tag{21}$$

где c_1, c_2 выбраны таким образом, что g совпадает с этой линейной комбинацией в точках θ_1 и θ_2. Так как $g \geqslant 0$ на всей числовой прямой, то на каждом рассматриваемом отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ в силу (21)

$$c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta} \geqslant 0. \tag{22}$$

Поскольку

$$\left(c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}\right)'' = |h| \left(c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}\right),$$

из (22) следует, что на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ $\left(c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}\right)'' \geqslant 0$, т. е.

$$v(\theta) = c_1 e^{\sqrt{|h|}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{|h|}\theta}$$

— выпуклая на отрезке θ_1, θ_2 функция. Тогда ее график внутри интервала (θ_1, θ_2) лежит ниже прямой, проведенной через точки $(\theta_1, g(\theta_1))$ и $(\theta_2, g(\theta_2))$. Отсюда с учетом (21) получаем, что внутри интервала (θ_1, θ_2) график функции g лежит ниже прямой, проведенной через точки $(\theta_1, g(\theta_1))$ и $(\theta_2, g(\theta_2))$. Поскольку θ_1, θ_2 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\theta_1 < \theta_2$, функция g есть выпуклая функция в $(-\infty, +\infty)$. Так как функция g непрерывна в $(-\infty, +\infty)$ и 2π-периодична, то она ограничена в $(-\infty, +\infty)$. Всякая выпуклая и ограниченная на всей числовой прямой функция есть константа, поэтому случай $h < 0$ невозможен в условиях данной теоремы.

Мы показали, что в случаях, когда число $h \leqslant 0$, функция g не будет удовлетворять условиям данной теоремы. Следовательно, функция u — субгармоническая в области K тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (θ_1, θ_2), где L_{h1} — оператор вида (4), L_{h2} — оператор вида (5). Отсюда, поскольку фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $r^{\sqrt{h}}$, $r^{-\sqrt{h}}$, а фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $\sin(\sqrt{h}\theta)$, $\cos(\sqrt{h}\theta)$, с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 получаем, что функция u является субгармонической в K тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале (r_1, r_2), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство следствия 2. Так как $f(0) = 0$, то функция $u = 0$ в начале координат. Поэтому, поскольку $u \geqslant 0$ во всей плоскости, в начале координат значение функции u не превосходит своего интегрального среднего по любому кругу и по любой окружности с центром в начале координат. Следовательно, функция u является субгармонической во всей плоскости тогда и только тогда, когда она является субгармонической во всей плоскости без начала координат, а по теореме 2 функция u является субгармонической во всей плоскости без начала координат тогда и только тогда, когда существует вещественное число $h > 0$, для которого f — это $\sqrt{h}$-степенно выпуклая функция в интервале $(0, +\infty)$, g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале $(-\infty, +\infty)$. □

5. Основной результат в декартовых прямоугольных координатах

Необходимое и достаточное условие субгармоничности функции, представимой в декартовых прямоугольных координатах в виде произведения пары функций одной переменной, в прямоугольнике, полуполосе, полосе, полуплоскости или всей плоскости дает

Теорема 3. *Пусть в конечном или бесконечном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ задана вещественная функция $f \geqslant 0$, f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (a, b), а также имеет в (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f'_s и f''_s. Пусть в конечном или бесконечном интервале $(c, d) \subset \mathbb{R}$ задана вещественная функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (c, d), а также имеет в (c, d) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g'_s и g''_s. Функция u вида* (1) *субгармоническая в области $G = (a, b) \times (c, d)$ тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (a, b), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (c, d), где*

$$L_{h1} = \frac{d^2}{dx^2} - h, \tag{23}$$

$$L_{h2} = \frac{d^2}{dy^2} + h. \tag{24}$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция u субгармоническая в $G = (a, b) \times (c, d)$, то согласно ([15], с. 117, теорема 4.1.8) $\Delta T_u \geqslant 0$, где T_u — распределение, заданное локально интегрируемой в области G функцией u. Это означает, что для любой основной функции $\varphi \in D(G)$, которая удовлетворяет условию $\varphi(x, y) \geqslant 0$ в G, $\Delta T_u \varphi \geqslant 0$. Так как

$$T_u \varphi = \iint_G u(x, y)\varphi(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\varphi(x, y)dxdy,$$

то $T_u = T_f \times T_g$, где T_f — распределение, заданное локально интегрируемой в интервале (a, b) функцией f, T_g — распределение, заданное локально интегрируемой в интервале (c, d) функцией g. Тогда в силу свойств дифференцирования прямого произведения из существования локально интегрируемых в интервалах (a, b) и (c, d), соответственно, обобщенных производных в смысле Соболева f'_s, f''_s, g'_s, g''_s следует, что в области G существуют локально интегрируемые обобщенные частные производные в смысле Соболева функции u первого и второго порядка $u'_x = f'_s(x)g(y)$, $u'_y = f(x)g'_s(y)$, $u''_{xx} = f''_s(x)g(y)$, $u''_{xy} = f'_s(x)g'_s(y)$, $u''_{yy} = f(x)g''_s(y)$. Значит, распределение ΔT_u задано локально интегрируемой в области G функцией $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = f''_s(x)g(y) + f(x)g''_s(y)$, т. е.

$$\Delta T_u \varphi = \iint_G \Delta u(x, y)\varphi(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d (f''_s(x)g(y) + f(x)g''_s(y))\varphi(x, y)dxdy.$$

Поскольку $\Delta T_u\varphi \geqslant 0$ для любой основной функции $\varphi \in D(G)$, которая удовлетворяет условию $\varphi(x,y) \geqslant 0$ в G, по лемме 4 получаем, что почти всюду в области G верно неравенство

$$f_s''(x)g(y) + f(x)g_s''(y) \geqslant 0. \tag{25}$$

Так как $f(x) \geqslant 0$ в (a,b) и $f(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (a,b), $g(y) \geqslant 0$ в (c,d) и $g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (c,d), то $f(x)g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в области $G = (a,b)\times(c,d)$. Поэтому из (25) следует, что почти всюду в G верно неравенство

$$\frac{f_s''(x)}{f(x)} + \frac{g_s''(y)}{g(y)} \geqslant 0. \tag{26}$$

Из (26) имеем, что почти всюду в области G верно неравенство

$$\frac{f_s''(x)}{f(x)} \geqslant -\frac{g_s''(y)}{g(y)}. \tag{27}$$

Так как $f_s'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(a,b)$, f непрерывна в интервале (a,b) и $f(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (a,b), то функция $\dfrac{f_s''(x)}{f(x)}$ измерима в интервале (a,b). Поскольку $g_s'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(c,d)$, g непрерывна в интервале (c,d) и $g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (c,d), функция $-\dfrac{g_s''(y)}{g(y)}$ измерима в интервале (c,d). Тогда по лемме 10 из неравенства (27) следует, что найдется такое вещественное число h, для которого почти всюду в (a,b) верно неравенство

$$\frac{f_s''(x)}{f(x)} \geqslant h \tag{28}$$

и почти всюду в (c,d) верно неравенство

$$-\frac{g_s''(y)}{g(y)} \leqslant h. \tag{29}$$

Так как $f(x) \geqslant 0$ в (a,b) и $f(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (a,b), то из (28) получим, что почти всюду в (a,b) верно неравенство

$$f_s'' + hf \geqslant 0, \tag{30}$$

а так как $g(y) \geqslant 0$ в (c,d) и $g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (c,d), то из (29) имеем, что почти всюду в (c,d) верно неравенство

$$g_s'' + hg \geqslant 0. \tag{31}$$

Через L_{h1} обозначив оператор вида (23), через L_{h2} — оператор вида (24), получаем, что из (30) в силу леммы 9 f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (a,b), а из (31) в силу леммы
9
g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (c,d), что и требовалось доказать.

Достаточность. Если существует такое вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (a,b), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (c,d), то по лемме 8 почти всюду в (a,b) верно неравенство (30) и почти всюду в (c,d) верно неравенство (31). Тогда, поскольку $f(x) \geqslant 0$ в (a,b) и $f(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (a,b), из (30) следует, что почти всюду в (a,b) верно неравенство (28), а поскольку $g(y) \geqslant 0$ в (c,d) и $g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (c,d), из (31) следует, что почти всюду в (c,d) верно неравенство (29). Отсюда имеем, что почти всюду в области G верно неравенство (27), значит, почти всюду в области G верно неравенство (26). Так как $f(x) \geqslant 0$ в (a,b)

и $f(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (a, b), $g(y) \geqslant 0$ в (c, d) и $g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в (c, d), то $f(x)g(y) \geqslant 0$ в G и $f(x)g(y) = 0$ лишь на множестве меры нуль в области G. Поэтому из (26) следует, что почти всюду в G верно неравенство (25). Отсюда по лемме 4 получаем, что для любой основной функции $\varphi \in D(G)$, которая удовлетворяет условию $\varphi(x, y) \geqslant 0$ в G, $\Delta T_u \varphi \geqslant 0$, т. е. распределение $\Delta T_u \geqslant 0$, тогда согласно ([15], с. 117, теорема 4.1.8) u — субгармоническая функция в области $G = (a, b) \times (c, d)$, что и требовалось доказать. □

Если вместо понятия L-выпуклости воспользоваться определением 2 выпуклости от пары функций, и рассмотренными в определении 3 и примерах 1–4 понятиями, то теореме 3 можно придать такой вид.

Следствие 3. *Пусть в конечном или бесконечном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ задана вещественная функция $f \geqslant 0$ в интервале (a, b), f обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (a, b), а также имеет в (a, b) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные f_s' и f_s''. Пусть в конечном или бесконечном интервале $(c, d) \subset \mathbb{R}$ задана вещественная функция $g \geqslant 0$, g обращается в нуль лишь на множестве меры нуль, непрерывна в (c, d), а также имеет в (c, d) локально интегрируемые по Лебегу обобщенные производные g_s' и g_s''. Функция u вида (1) субгармоническая в области $G = (a, b) \times (c, d)$ тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число h, для которого выполняется одно из трех утверждений*:

1) *$h > 0$, и f — $\sqrt{h}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (a, b), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (c, d)*;
2) *$h = 0$, и f — выпуклая в интервале (a, b) функция, g — выпуклая в интервале (c, d) функция*;
3) *$h < 0$, и f — $\sqrt{|h|}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (a, b), g — $\sqrt{|h|}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (a, b).*

Доказательство. По теореме 3 $u(x, y) = f(x)g(y)$ — субгармоническая функция в области $G = (a, b) \times (c, d)$ тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число h, для которого f — L_{h1}-выпуклая функция в интервале (a, b), g — L_{h2}-выпуклая функция в интервале (c, d), где L_{h1} — оператор вида (23), L_{h2} — оператор вида (24).

Так как при $h > 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $e^{\sqrt{h}x}$, $e^{-\sqrt{h}x}$, а фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $\sin(\sqrt{h}y)$, $\cos(\sqrt{h}y)$, то с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 при $h > 0$ $u(x, y) = f(x)g(y)$ — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — $\sqrt{h}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (a, b), g — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (c, d).

Поскольку при $h = 0$ $L_{h1} = \dfrac{d^2}{dx^2} = L_0$, $L_{h2} = \dfrac{d^2}{dy^2} = L_0$ и согласно [5] L_0-выпуклые в некотором интервале функции являются выпуклыми в этом интервале, то при $h = 0$ $u(x, y) = f(x)g(y)$ — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — выпуклая в интервале (a, b) функция, g — выпуклая в интервале (c, d) функция.

Так как при $h < 0$ фундаментальную систему решений уравнения $L_{h1}v = 0$ образуют функции $\sin(\sqrt{|h|}x)$, $\cos(\sqrt{|h|}x)$, а фундаментальную систему решений уравнения $L_{h2}v = 0$ образуют функции $e^{\sqrt{|h|}y}$, $e^{-\sqrt{|h|}y}$, то с учетом определений 2, 3 и примеров 1–4 при $h < 0$ $u(x, y) = f(x)g(y)$ — субгармоническая функция в области G тогда и только тогда, когда f — $\sqrt{h}$-тригонометрически выпуклая функция в интервале (a, b), g — $\sqrt{h}$-гиперболически выпуклая функция в интервале (c, d). □

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Б.Н. Хабибуллину за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

[1] Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций*, Матем. заметки **66** (4), 603–616 (1999).

[2] Khabibullin B.N. *Excess of systems of exponentials in a domain, and directional convexity deficiency of a curve*, St. Petersburg Math. J. **13** (6), 1047–1080 (2002).

[3] Khabibullin B.N. *Stability of Completeness for Systems of Exponentials on Compact Convex Sets in* $\mathbb{C}$, Math. Notes **72** (4), 542–550 (2002).

[4] Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности. Монография-обзор, 4-е изд., доп.* (Редакционно-издательский центр БашГУ, г. Уфа, 2012).

[5] Хейфиц А.И. *Аналитические свойства функций, выпуклых относительно решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения **17** (6), 1025–1034 (1981).

[6] Bonsall F.F. *The characterization of generalized convex functions*, Quart. J. Math., Oxford Ser. (2), **1**, 100–111 (1950).

[7] Beckenbach E.F. *Generalized convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 363–371 (1937).

[8] Beckenbach E.F., Bing R.H. *On generalized convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (2), 220–230 (1945).

[9] Peixoto M.M. *Generalized convex functions and second order differential inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (6), 563–572 (1949).

[10] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* (Гостехиздат, М., 1956).

[11] Riesz F. *Sur les Fonctions Subharmoniques et Leur Rapport a la Théorie du Potentiel*, Acta Math. **48**, 329–343 (1926).

[12] Привалов И.И. *Субгармонические функции* (Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит., М.–Л., 1937).

[13] Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции* (М., Мир, 1980).

[14] Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. *Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления **26**, 5–157 (1988).

[15] Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т.* Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье* (пер. с англ. — М., Мир, 1986).

Роман Русланович Мурясов

Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,

`e-mail:` romrumur@yandex.ru

R.R. Muryasov

Subharmonic functions with separated variables and their connection with generalized convex functions

Abstract. In this paper, we consider the necessary and sufficient conditions for the subharmonicity of functions of two variables, representable as a product of two functions of one variable in the Cartesian coordinate system or in the polar coordinate system in domains on the plane. We establish a connection of such functions with functions that are convex with respect to solutions of second-order linear differential equations, i.e., convex with respect to two functions.

Keywords: subharmonic function, generalized derivative, distribution, convex function, differential operator, generalized convex function.

Roman Ruslanovich Muryasov

Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevskogo str., Ufa, 450008 Russia,

`e-mail:` romrumur@yandex.ru