Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 6, с. 37–48 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Д.М. МИРСАБУРОВА

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ И СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аннотация. Для уравнения $(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0|y|^{(m-2)/2}u_x + (\beta_0/y)u_y = 0$, рассматриваемого в некоторой неограниченной смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостающим условием смещения на граничных характеристиках и аналогом типа условия Франкля на отрезке линии вырождения уравнения.

Ключевые слова: неограниченная область, недостающее условие смещения, аналог условия Франкля, нефредгольмовый оператор, изолированная особенность первого порядка, сингулярное интегральное уравнение, уравнение Винера–Хопфа, индекс, однозначная разрешимость.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-37-48

1. Постановка задачи JNF (Жегалова, Нахушева, Франкля)

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ — неограниченная область, комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0|y|^{(m-2)/2}u_x + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

исходящей из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ прямой $y = 0$, $J = (-1,1)$ — интервал оси $y = 0$.

В уравнении (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0,\ |\alpha_0| < (m+2)/2,\ -m/2 < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависят от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1) [1], [2]. На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ рассматривается треугольник $\triangle A_0B_0C_0$, ограниченный прямыми

$$A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2;\ B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2;\ A_0B_0 : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай $P(\alpha_0, \beta_0) \in \triangle A_0B_0C_0$.

В задачах со смещением [3], [4], в отличие от задачи Трикоми ([5], с. 29), характеристики AC и BC равноправны в смысле носителей краевых данных, т. е. все точки характеристик AC и BC охвачены краевыми условиями. В настоящей работе в неограниченной области D исследуется корректность задачи, где нелокальное условие смещения задается на частях, AC_0 и BC_1 соответственно характеристик AC и BC, а части C_0C и C_1C этих характеристик

Поступила в редакцию 10.05.2023, после доработки 25.09.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

освобождены от краевых условий, и это недостающее условие заменено аналогом условия Франкля [6]–[10] на отрезке вырождения AB.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой G_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0)$, $B_R = B_R(R,0)$,

$$G_R : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2, \quad -R \leq x \leq R, \quad R > 1, \quad 0 \leq y \leq (((m+2)R)/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения:

$$J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\}; \quad J_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\},$$

$C_0(C_1)$ — точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где произвольное фиксированное число $c \in J$, $D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup J$, D_R — подобласть неограниченной области D.

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ — линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1,1]$ во множество точек отрезков $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответственно, где $a = (1+c)/2$, $b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = 1,\ q(1) = c$.

Задача JNF. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D_R}$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 (определение класса R_1 см.ниже) в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следующее условие сопряжения:

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x \to \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/2(m+2),\ \beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/2(m+2),\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ 0 < \alpha + \beta < 1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R \to +\infty} u(x,y) = 0,\ y \geq 0, \tag{3}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,+0) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{J_1}; \quad u(x,+0) = \tau_2(x), \quad x \in \overline{J_2}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \mu_0(x)(1+x)^{\alpha} D_{-1,x}^{1-\beta} u\left[\theta_0(p(x))\right] + \mu_1(x)(1+x)^{\beta} D_{-1,x}^{1-\alpha} u\left[\theta_1(q(x))\right] = \\ = \rho_0(x) u(p(x),0) + \rho_1(x) u(q(x),0) + \psi(x), \quad x \in J; \end{gathered} \tag{5}$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x), \quad x \in \overline{J}, \tag{6}$$

где $D_{-1,x}^{l}$ — оператор дифференцирования дробного порядка ([11], с. 17),

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}, \quad \theta_1(x_0) = \frac{x_0 + 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$$

— аффиксы точек пересечения граничных характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $(x_0,0)$, где $x_0 \in J$. $\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \mu_0(x),\ \mu_1(x),\ \rho_0(x),\ \rho_1(x),\ \psi(x),\ f(x)$ — достаточно гладкие функции в областях их определения.

Введя обозначение $u(x,0) = \tau(x),\ x \in \bar{J}$, условие (6) запишем в виде

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in \bar{J}. \tag{6*}$$

Отметим, что если $\theta_0(p(x)) \in AC_0$, $\theta_1(q(x)) \in BC_1$, то условие (5) является недостающим условием смещения, так как оно задается только на частях $AC_0 \subset AC$ и $BC_1 \subset BC$ граничных характеристик, а условие (6) является аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AB уравнения (1) [12].

Прежде всего укажем основную идею доказательства разрешимости задачи JNF. Эта идея состоит в том, что предварительно решаем задачу Дирихле в области D^+ и видоизмененную задачу Коши в области D^-, считая $\tau(x)$ и $\nu(x)$ известными функциями. Затем эти решения подчиним условиям (2), (4), (5) и (6). В итоге мы получим сингулярное интегральное уравнение для $\tau(x)$ с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения. Далее, применяя к полученному уравнению последовательно два раза метод регуляризации Карлемана, сведем его к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи JNF.

1.1. **Вывод первого функционального соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.** В области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными условиями

$$u(x,-0)=\tau(x),\quad x\in\bar{J};\quad \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in J,$$

для уравнения (1) имеет вид ([13], с. 34)

$$u(x,y)=\gamma_1\int\limits_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int\limits_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\alpha}dt, \tag{7}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\quad \gamma_2=-\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{\alpha+\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$$

Определение. Функция $u(x,y)$, определенная формулой (7), называется обобщенным решением класса R_1, если функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в промежутке $[-1,1)$ удовлетворяют условию Гёльдера, соответсвенно, с показателями α_1 и α_2, где $\alpha_1>1-\beta$, $\alpha_2>\beta$.

Имеют место следующие леммы К.И. Бабенко ([13], с. 35; [14]; [15], с. 32; [16]).

Лемма 1. *Если $u(x,y)$ — обобщенное решение класса R_1 уравнения (1), то u_x и u_y непрерывны в области D^-, а $(-y)^{\beta_0}u_y$ непрерывна вплоть до линии вырождения и*

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad -1<x<1.$$

Лемма 2. *Пусть*
1) функция $u(x,y)\in C(\overline{D_R^+})\bigcap C^2(D_R^+)$ удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) по $\overline{D}_R^+$ значение в некоторой точке $(x_0,0), x_0\in[-R,R]$;
2) значение $u(x,y)$ на кривой G_R меньше (больше), чем $u(x_0,0)$.
Тогда

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}<0\ (>0)$$

при условии, что этот предел существует.

В силу (7) из краевого условия (5) с учетом (6*), т. е. $\tau(q(x)) = \tau(p(x)) - f(x)$, имеем

$$a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)\mu_0(x)\nu(p(x)) + b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)\mu_1(x)\nu(q(x)) =$$
$$= -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\left[\Gamma(\alpha)\mu_0(x) + \Gamma(\beta)\mu_1(x)\right] D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x)) +$$
$$+\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\left[\rho_0(x) + \rho_1(x)\right]\tau(p(x)) + \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\psi(x) +$$
$$+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\beta)\mu_1(x)D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}f(x) - \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\rho_1(x)f(x), \quad x \in (-1,1). \quad (8)$$

Равенство (8) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал $(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

2. Единственность решения задачи JNF

Теорема 1. *Пусть* $\tau_1(x) \equiv 0, \ \tau_2(x) \equiv 0, \ \psi(x) \equiv 0, \ f(x) \equiv 0,$

$$\rho_1(x) + \rho_2(x) < 0, \quad \mu_0(x) > 0, \quad \mu_1(x) > 0, \quad (9)$$

тогда решение задачи JNF в замкнутой области $\overline{D}$ тождественно равно нулю.

Доказательство. Рассмотрим конечную область $D_R = D_R^+ \bigcup D^-$. Решение $u(x,y)$ задачи JNF рассмотрим в области D_R и покажем, что функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{D_R^+}$ достигает на кривой G_R.

Пусть (x_0, y_0) — точка НПЗ функции $u(x,y)$ в области $\overline{D_R^+}$. В силу принципа Хопфа ([17], с. 25) функция $u(x,y)$ своего НПЗ во внутренних точках области D_R^+ не достигает, следовательно, $(x_0,y_0) \notin D_R^+$. Допустим, что функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D_R^+}$ достигает на отрезке $[-R,R]$ оси $y=0$.

Здесь расмотрим три случая возможного расположения точки $(x_0,0)$ на отрезке $[-R,R]$ оси $y=0$.

1. Пусть $x_0 \in [-R,-1]\bigcup[1,R]$, так как в силу условия теоремы 1 значение $u(x_0,0)=0$, тогда функция $u(x,y)$ своего НПЗ в этих точках не достигает, т. е. $x_0 \notin [-R,-1]\bigcup[1,R]$;

2. Пусть $x_0 = p(\xi_0) \in (-1,c]$, где $\xi_0 \in (-1,1]$ — решение уравнения $p(x) = x_0$. Тогда в силу аналога условия Франкля(6*) $\tau(p(\xi_0)) = \tau(q(\xi_0))$ (с $f(x) \equiv 0$), этот экстремум достигается в двух точках $(p(\xi_0),0)$ и $(q(\xi_0),0)$ оси $y=0$. Так как $\overline{D_R^+}$ — конечная область и значение искомого решения на границе G_R в силу условия (3) достаточно мало, то для этих точек имеет место аналог леммы К.И. Бабенко (лемма 2), ввиду которого имеют место неравенства $\nu(p(\xi_0)) < 0, \ \nu(q(\xi_0)) < 0$, следовательно, в силу (9) (с $\mu_0(\xi_0) > 0, \ \mu_1(\xi_0) > 0$)

$$a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)\mu_0(\xi_0)\nu(p(\xi_0)) + b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)\mu_1(\xi_0)\nu(q(\xi_0)) < 0. \quad (10)$$

Хорошо известно ([11], с. 19), что в точке $x_0 = p(\xi_0)$ положительного максимума функции $\tau(x)$ значение оператора дифференцирования дробного порядка строго положительно, т. е. $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x))\big|_{x=p(\xi_0)} > 0$, отсюда следует, что правая часть равенства (8) (с $\psi(x) = 0$, $f(x) = 0$) в силу условий (9), с учетом $\gamma_2 < 0$ строго положительна при $x_0 = p(\xi_0)$, поэтому и его левая часть также будет положительна при $x_0 = p(\xi_0)$, что согласно условию сопряжения (2) противоречит неравенству (10), значит, $x_0 \notin (-1,c]$.

3. Пусть $x_0 = q(\xi_0) \in [c,1)$. Здесь, как и выше, легко показать, что $x_0 \notin [c,1)$.

Таким образом, из рассмотренных случаев возможного расположения точки $(x_0, 0)$ на отрезке AB и принципа Хопфа заключаем, что решение $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям (9) теоремы 1, своего НПЗ в замкнутой области $\overline{D_R^+}$ достигает на нормальной кривой G_R.

Аналогично доказывается, что функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям (9) теоремы 1, своего НОЗ в замкнутой области $\overline{D_R^+}$ также достигает на нормальной кривой G_R.

Таким образом, решение $u(x,y)$ задачи JNF, удовлетворяющее условиям (9) теоремы 1, в замкнутой области $\overline{D_R^+}$ своего НПЗ и НОЗ достигает только в точках нормальной кривой G_R, отсюда в силу (3) для $\forall\varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|u(x,y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in G_R. \tag{11}$$

Следовательно, неравенство (11) выполняется и для произвольной точки (x,y) области $\overline{D_R^+}$ и в силу произвольности R неравенство $-\varepsilon \le u(x,y) \le \varepsilon$ имеет место всюду на $\overline{D}^+$. Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в замкнутой области $\overline{D}^+$.

Согласно единственности решения видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D^- с нулевыми условиями

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) \equiv 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \quad \lim_{y\to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \quad \forall x \in J$$

следует $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}^-$, тогда и в $\overline{D}$.

3. Существование решения задачи JNF

3.1. **Вывод второго функционального соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.** Решение задачи Дирихле в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(x,+0) = \tau(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{12}$$

дается формулой [18]

$$u(x,y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau(t) \left(r_0^2\right)^{a_0-1} \exp\left(2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right) dt, \tag{13}$$

где

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-2a_0} \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\bar{\delta})}{\Gamma(2-\delta-\bar{\delta})}, \quad 2a_0 = \alpha+\beta, \quad \delta = a_0 + b_0 i,$$

$$\bar{\delta} = a_0 - b_0 i, \quad b_0 = \frac{\alpha_0}{m+2}, \quad r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}.$$

В (12) значения функции $\tau(x)$ на промежутках $(-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$ в силу краевого условия (4) известны. С учетом этого формулу (13) перепишем в виде

$$u(x,y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0} \int\limits_{-1}^{1} \tau(t) \left(r_0^2\right)^{a_0-1} \exp\left(2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right) dt + F(x,y), \tag{14}$$

где

$$F(x,y) = k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-1} \tau_1(t) \left(r_0^2\right)^{a_0-1} \exp\left(2b_0 \arcsin \frac{x-t}{r_0}\right) dt + \right.$$

$$+\int_{1}^{+\infty}\tau_2(t)\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt\Bigg\}. \tag{15}$$

В силу краевого условия (4) правая часть (15) — известная функция, т. е. $F(x,y)$ — известная функция.

Дифференцируя (14) по y, с учетом тождества

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^{1-\beta_0}\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right\}=$$
$$=\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(x-t)\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right\}$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_{-1}^{1}\tau(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[(x-t)\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right]dt+$$
$$+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}. \tag{16}$$

Умножив обе части равенства (16) на y^{β_0}, перейдем к пределу при $y\to+0$, далее, выполнив операцию интегрирования по частям, приходим к соотношению

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt+$$
$$+\Phi(x),\ x\in(-1,1), \tag{17}$$

где

$$\Phi(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left(e^{b_0\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-e^{-b_0\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}\right).$$

Соотношение (17) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на интервал $J=(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^+.

3.2. **Вывод нестандартного сингулярного интегрального уравнения.** Из равенства (17) найдем $\nu(p(x))$ и $\nu(q(x))$, затем из соотношения (8), исключая $\nu(p(x))$ и $\nu(q(x))$, имеем

$$a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)\mu_0(x)\left\{-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)(p(x)-t)}{|p(x)-t|^{2-2a_0}}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-p(x)}{|t-p(x)|}\right)dt\right\}+$$
$$+b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)\mu_1(x)\left\{-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)(q(x)-t)}{|q(x)-t|^{2-2a_0}}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-q(x)}{|t-q(x)|}\right)dt\right\}=$$
$$=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\left[\Gamma(\alpha)\mu_0(x)+\Gamma(\beta)\mu_1(x)\right]D^{1-\alpha-\beta}_{-1,x}\tau(p(x))+$$
$$+\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\left[\rho_0(x)+\rho_1(x)\right]\tau(p(x))+F_0(x),\quad x\in J, \tag{18}$$

где

$$F_0(x)=\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\psi(x)+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\beta)\mu_1(x)D^{1-\alpha-\beta}_{-1,x}f(x)-$$
$$-\frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\rho_1(x)f(x)-a^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)\mu_0(x)\Phi(p(x))-b^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\alpha)\mu_1(x)\Phi(q(x))$$

— известная функция. В (18) упростим интегралы, содержащие производные $\tau'(x)$.

Имеют место равенства

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,(p(x)-t)}{|p(x)-t|^{2-2a_0}}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-p(x)}{|t-p(x)|}\right)dt=$$
$$=\frac{e^{-2b_0}}{a^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau\left(p(x)\right)+\frac{e^{2b_0}}{a^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2\beta}_{x,1}\tau\left(p(x)\right)-$$
$$-\frac{be^{2b_0}}{a}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(q(s))ds}{\left(q(s)-p(x)\right)^{1-2a_0}},\tag{19}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,(q(x)-t)}{|q(x)-t|^{2-2a_0}}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-q(x)}{|t-q(x)|}\right)dt=$$
$$=-\frac{ae^{-2b_0}}{b}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{\left(q(x)-p(s)\right)^{1-2a_0}}+\frac{e^{-2b_0}\Gamma(2a_0)}{b^{1-2a_0}}D^{1-2a_0}_{x,1}\tau\left(q(x)\right)+$$
$$+\frac{e^{2b_0}}{b^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2a_0}_{-1,x}\tau\left(q(x)\right).\tag{20}$$

В силу (19) и (20) соотношение (18) запишем в виде

$$a^{1-2a_0}\Gamma(1-\beta)\mu_0(x)\left[\frac{e^{-2b_0}}{a^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau\left(p(x)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{2b_0}}{a^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2\beta}_{x,1}\tau\left(p(x)\right)-\frac{be^{2b_0}}{a}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(q(s))ds}{\left(q(s)-p(x)\right)^{1-2a_0}}\right]+b^{1-2a_0}\Gamma(1-\alpha)\mu_1(x)\times$$
$$\times\left[-\frac{ae^{-2b_0}}{b}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{\left(q(x)-p(s)\right)^{1-2a_0}}+\frac{e^{-2b_0}\Gamma(2a_0)}{b^{1-2a_0}}D^{1-2a_0}_{x,1}\tau\left(q(x)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{2b_0}}{b^{1-2a_0}}\Gamma(2a_0)D^{1-2a_0}_{-1,x}\tau\left(q(x)\right)\right]=\mu_2(x)D^{1-2a_0}_{-1,x}\tau\left(p(x)\right)+\rho_2(x)\tau\left(p(x)\right)+F(x),\quad x\in J,\tag{21}$$

где

$$\mu_2(x)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2k_2(1-\beta_0)}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{2-2a_0}\left[\Gamma(\alpha)\mu_0(x)+\Gamma(\beta)\mu_1(x)\right],$$
$$\rho_2(x)=-\frac{1}{\gamma_2k_2(1-\beta_0)}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{2-2a_0}[\rho_1(x)+\rho_2(x)],$$

$F(x)=-\dfrac{2F_0(x)}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}$ — известная функция. Теперь упростим соотношение (21).

Применяя к соотношению (21) оператор интегрирования дробного порядка $D^{2a-1}_{-1,x}$ и вводя обозначения $\tau\left(p(s)\right)=\tau_0(x)$, с учетом (6*), $\tau\left(q(x)\right)=\tau_0(x)-f(x)$ получим

$$A(x)\tau_0(x)-B(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+s}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_0(s)ds}{s-x}=M_0(x)\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs}+$$

$$+M_1(x)\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}+R[\tau_0]+F_1(x),\quad x\in\bar{J},\tag{22}$$

где

$$A(x)=\Gamma(1-\beta)\Gamma(2a_0)\left[e^{-2b_0}-e^{2b_0}\cos(2a_0\pi)\right]\mu_0(x)+$$

$$+\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2a_0)\left[e^{2b_0}-e^{-2b_0}\cos(2a_0\pi)\right]\mu_1(x),$$

$$B(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2a_0)}\left[\Gamma(1-\beta)e^{2b_0}\mu_0(x)-\Gamma(1-\alpha)e^{-2b_0}\mu_1(x)\right],$$

$$M_0(x)=\frac{\Gamma(1-\beta)be^{2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}\mu_0(x),\quad M_1(x)=\frac{\Gamma(1-\alpha)ae^{-2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}\mu_1(x),$$

$R[\tau_0]$ — регулярный оператор, $F_1(x)$ — известная функция.

Отметим, что уравнение (22) является нестандартным сингулярным интегральным уравнением, так как ядра $1/(1-ax-bs), 1/(1-bx-as)$ интегральных операторов в нехарактерической части уравнения имеют единственную изолированную особенность первого порядка при $(x,s)=(1,1)$ (так как $a+b=1$), т. е. они не являются фредгольмовыми операторами, и поэтому эти интегральные операторы выделены отдельно [12].

3.3. **Регуляризация нестандартного сингулярного интегрального уравнения (22).** Временно считая правую часть уравнения (22) известной функцией, запишем его в виде

$$A(x)\tau_0(x)-B(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+s}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau_0(s)ds}{s-x}=g_0(x),\quad x\in\bar{J},\tag{23}$$

где

$$g_0(x)=M_0(x)\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs}+M_1(x)\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}+R[\tau_0]+F_1(x).\tag{24}$$

Решение уравнения (23) будем искать в классе $H(-1,1)$ функций Гёльдера, в котором функция $(1+x)^{2a_0-1}\tau_1(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограниченной в точке $x=1$, т. е. в классе $h(1)$ ([11], с. 43). Имеет место

Теорема 2. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,1)$ и $g_0(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$ и $A(-1)>0$, $A(1)>0$, то решение уравнения (23) в классе функций Гёльдера H, в котором функция $(1+x)^{2a_0-1}\tau_0(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограниченной на правом конце интервала $(-1,1)$, т. е. в классе $h(1)$ ([11], с. 43), выражается формулой*

$$\tau_1(x)=\frac{g_0(x)A(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}+\frac{B(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta_0}\times$$

$$\times\frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)}\frac{A(x)-\pi B(x)i}{A(t)-\pi B(t)i}\frac{g_0(t)dt}{t-x},\quad x\in[-1,1],\tag{25}$$

где $\delta_0=(\operatorname{arctg}\pi B(-1)/A(-1))/\pi$, $\delta_1=(\operatorname{arctg}\pi B(1)/A(1))/\pi$.

Доказательство теоремы 2 идентично доказательству в работе ([11], с. 41).

3.4. **Вывод и исследование интегрального уравнения Винера–Хопфа.** Подставляя в (25) выражение для $g_0(x)$, из (24) получим

$$\tau_0(x) = \frac{A(x)M_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs} + \frac{A(x)M_1(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}+$$

$$+\frac{B(x)M_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\tau_0(s)ds\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta_0}\frac{dt}{(1-at-bs)(t-x)}+$$

$$+\frac{B(x)M_1(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\tau_0(s)ds\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0-\delta_0}\frac{dt}{(1-bt-as)(t-x)}+$$

$$+R_1[\tau_0]+F_2(x), \tag{26}$$

где $R_1[\tau_0]$ — регулярный оператор.

В (26), вычислив внутренние интегралы, имеем

$$\tau_0(x) = \frac{M_0(x)\left(A(x)-B(x)\pi\operatorname{ctg}(\delta_1\pi)\right)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs} + \frac{M_1(x)\left(A(x)-B(x)\pi\operatorname{ctg}(\delta_1\pi)\right)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as} - \frac{\pi a^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\frac{B(x)M_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{1}{b^{\delta_1}}\left(\frac{1+x}{1+b-as}\right)^{1-2a_0-\delta_1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\delta_1}\times$$

$$\times\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs} - \frac{\pi b^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\frac{B(x)M_1(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{1}{a^{\delta_1}}\left(\frac{1+x}{1+a-bs}\right)^{1-2a_0-\delta_1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\delta_1}\times$$

$$\times\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}+R_2[\tau_0]+F_2(x),\quad x\in J, \tag{27}$$

где $R_2[\tau_0]$ — регулярный оператор. Здесь заметим, что $A(1)-B(1)\pi\operatorname{ctg}(\delta_1\pi)=0$.

Выделив характеристическую часть уравнения (27), т. е. интегралы с особенностью первого порядка в изолированной особой точке $(x,s)=(1,1)$, получим

$$\tau_0(x) = M_0^*\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\delta_1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs}+M_1^*\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\delta_1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}+R_3[\tau_0]+F_2(x), \tag{28}$$

где

$$M_0^* = -\frac{\pi a^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\left(\frac{1}{b}\right)^{1-2a_0}\frac{B(1)M_0(1)}{A^2(1)+\pi^2B^2(1)},\quad M_1^* = -\frac{\pi b^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1-2a_0}\frac{B(1)M_1(1)}{A^2(1)+\pi^2B^2(1)},$$

$$R_3[\tau_0] = R_2[\tau_0] + \frac{M_0(x)\left(A(x)-B(x)\pi\operatorname{ctg}(\delta_1\pi)\right)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs}+$$

$$+\frac{M_1(x)\left(A(x)-B(x)\pi\operatorname{ctg}(\delta_1\pi)\right)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as} - \frac{\pi a^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\left[\frac{B(x)M_0(x)}{A^2(x)+\pi^2B^2(x)}\left(\frac{1}{b}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1+x}{1+b-as}\right)^{1-2a_0-\delta_1} - \frac{B(1)M_0(1)}{A^2(1)+\pi^2B^2(1)}\left(\frac{1}{b}\right)^{1-2a_0}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{1-2a_0-\delta_1}\frac{\tau_0(s)ds}{1-ax-bs} - \frac{\pi b^{\delta_1-\delta_0-2a_0}}{\sin(\delta_1\pi)}\times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[\frac{B(x)M_1(x)}{A^2(x)+\pi^2 B^2(x)} \left(\frac{1}{a}\right)^{\delta_1} \left(\frac{1+x}{1+b-as}\right)^{1-2a_0-\delta_1} - \frac{B(1)M_1(1)}{A^2(1)+\pi^2B^2(1)} \left(\frac{1}{a}\right)^{1-2a_0} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{1-2a_0-\delta_1} \frac{\tau_0(s)ds}{1-bx-as}$$

— регулярный оператор.

С учетом тождеств $1-ax-bs = a(1-x)+b(1-s),\ 1-bx-as = b(1-x)+a(1-s)$ уравнение (28) запишем в виде

$$\tau_0(x) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{\delta_1} \left(\frac{M_0^*}{a(1-x)+b(1-s)} + \frac{M_1^*}{b(1-x)+a(1-s)} \right) \tau_0(s)ds + R_3[\tau_0] + F_2(x). \tag{29}$$

В уравнении (29), сделав замену переменных $x = 1-2e^{-y},\ s = 1-2e^{-t}$, имеем

$$e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}\tau_0(1-2e^{-y}) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{M_0^*}{ae^{-\frac{y-t}{2}}+be^{\frac{y-t}{2}}} + \frac{M_1^*}{be^{-\frac{y-t}{2}}+ae^{\frac{y-t}{2}}} \right) \times$$

$$\times e^{t\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}\tau(1-2e^{-t})dt + e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}R_3[\tau_0] + e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}F_2(1-2e^{-y}). \tag{30}$$

Введя обозначения $\rho(y) = e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}\tau_0(1-2e^{-y})$,

$$K_0(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} \left(\frac{M_0^*}{e^{\frac{x}{2}}+ke^{-\frac{x}{2}}} + \frac{M_1^*}{ke^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} \right),$$

уравнение (30) запишем в виде

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} K_0(y-t)\rho(t)dt + R_4[\rho] + F_3(y), \tag{31}$$

где $R_4[\rho] = e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}R_3[\tau_0]$ — регулярный оператор, $F_3(y) = e^{y\left(\delta_1-\frac{1}{2}\right)}F_2(1-2e^{-y})$ — известная функция. Уравнения (31) является интегральным уравнением Винера–Хопфа ([19], с. 55).

Функция $K_0(x)$ непрерывно дифференцируема и имеет показательный порядок убывания на бесконечности. Следовательно, $K_0(x) \in L_2 \bigcap H_\alpha = \{0\}$ ([19], с. 12). Так как $\alpha - \dfrac{1}{2} < 0$ $\left(\text{где } 0 < \alpha < \dfrac{1}{4}\right)$, то оператор $R_4[\rho]$ и функция $F_3(y)$ также имеют показательный порядок убывания на бесконечности.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки справедливы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю ([19], с. 46). Индекс χ уравнения (31) совпадает с индексом выражения $1-K^\wedge(x)$ ([19], с. 56), взятым с обратным знаком: $\chi = -\mathrm{Ind}(1-K^\wedge(x))$ ([13], с. 56), где

$$K^\wedge(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}K_0(t)dt = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{M_0^*}{e^{\frac{t}{2}}+ke^{-\frac{t}{2}}} + \frac{M_1^*}{ke^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}} \right) e^{-ixt}dt.$$

Используя равенство [20]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}dt}{e^{\frac{t}{2}}+ke^{-\frac{t}{2}}} = \frac{\pi e^{-ix\ln k}}{\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)},$$

имеем

$$K^\wedge(x) = \frac{1}{b}\left(\frac{M_0^*\pi e^{ix\ln k}}{\sqrt{k}ch(\pi x)} + \frac{M_1^*\pi e^{-ix\ln k}}{\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)}\right) = \frac{\pi}{b\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)}\left(M_0^* e^{ix\ln k} + M_1^* e^{-ix\ln k}\right).$$

Пусть

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-c^2}}\left|\frac{\Gamma(1-\beta)be^{2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}M_0(1) + \frac{\Gamma(1-\alpha)ae^{-2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}M_1(1)\right| < 1. \tag{32}$$

Тогда

$$\left|\mathrm{Re}\,K^\wedge(x)\right| = \frac{\pi}{b\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)}\left|M_0^*\cos(x\ln k) + M_1^*\cos(x\ln k)\right| \le \frac{\pi}{b\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi x)}\left|M_0^* + M_1^*\right| =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{ch}(\pi x)}\left(\frac{\Gamma(1-\beta)be^{2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}\left|M_0(1)\right| + \frac{\Gamma(1-\alpha)ae^{-2b_0}}{\Gamma(1-2a_0)}\left|M_1(1)\right|\right) < 1. \tag{33}$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\,(1-K^\wedge(x)) > 0$.

Заметим, что если $z = x + iy$ — комплексная переменная, то $\arg z = \mathrm{arctg}(y/x)$, если $\mathrm{Re}\,z = x > 0$.

Из (33) очевидно, что $|\mathrm{Re}\,K^\wedge(x)| = 0\ (1/\mathrm{ch}(\pi x))$, $\mathrm{Im}\,K^\wedge(x) = 0\ (1/\mathrm{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$. Отсюда следует

$$\mathrm{Ind}(1-K^\wedge(x)) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(1-K^\wedge(x)\right)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,(1-K^\wedge(x))}{\mathrm{Re}\,(1-K^\wedge(x))}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{arctg}\,0 - \mathrm{arctg}\,0] = 0,$$

т. е. изменение аргумента выражения $1 - K^\wedge(x)$ на действительной оси, представленного в полных оборотах, равно нулю ([19], с. 28). Следовательно, уравнение (31) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи JNF. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если заданные функции* $\tau_i(x) \in C(\overline{J_i})\bigcap C^2(J_j)$, $i = 1, 2$; $\mu_0(x)$, $\mu_1(x)$, $\rho_0(x)$, $\rho_1(x) \in C(\overline{J})\bigcap C^2(J)$, *причем* $\tau_1(-1) = 0$, $\tau_2(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\tau_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_2(x) = 0$ *и выполнены неравенства* (9) *и* (32), *то задача* JNF *однозначна разрешима.*

Литература

[1] Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области,* ДАН СССР **77** (2), 181–183 (1951).

[2] Бицадзе А.В. *К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа,* в кн: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, 47–52 (Наука, М., 1972).

[3] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии,* Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).

[4] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа,* Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).

[5] Трикоми Ф.Д. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Гостехиздат, М.-Л., 1947).

[6] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверх-звуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения,* Прикл. матем. и механ. **20** (2), 196–202 (1956).

[7] Девингталь Ю.В. *К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля,* Успехи матем. наук **14** (1), 177–182 (1959).

[8] Линь Цзянь-бин *О некоторых задачах Франкля,* Вестн. ЛГУ. Сер. матем. механ. и астрон. **3** (13), 28–39 (1961).

[9] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного типа* (Физматлит, М., 2014).
[10] Капустин Н.Ю., Сабитов К.Б. *О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа,* Дифференц. уравнения **27** (1), 60–68 (1991).
[11] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. шк., М., 1985).
[12] Мирсабурова Гулнора М. *Задача с нелокальными условиями на частях граничных характеристик и на отрезке вырождения для уравнения Геллерстедта с сингуларным коэффициентом,* Изв. вузов. Матем. (1), 64–83 (2020).
[13] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Университет, Ташкент, 2005).
[14] Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа.* Докт. дис. (М., МИАН, 1951).
[15] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Наука, М., 1970).
[16] Волкодавов В.Ф. *О единственности решения задачи TN для одного уравнения смешанного типа,* Волжск. матем. сб. Вып. 9. Куйбышев. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 55–65 (1970).
[17] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
[18] Мирсабурова У.М. *Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом*, Изв. вузов. Матем. (9), 70–82 (2022).
[19] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).
[20] Мирсабуров М., Хуррамов Н. *Задача с условием Бицадзе–Самарского на характеристиках одного семейства и обшими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом,* Дифференц. уравнения **56** (8), 1073–1094 (2020).

Дилдора Мирахматовна Мирсабурова

Термезский государственний университет,
ул. Баркамол авлод, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

e-mail: dmirsaburova@mail.ru

D.M. Mirsaburova

A problem with analogue of the Frankl and mixing conditions for the Gellerstedt equation with singular coefficient

Abstract. For the equation $(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{(m-2)/2} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0$,, considered in some unbounded mixed domain, uniqueness and existence theorems for a solution to the problem with the missing shift condition on the boundary characteristics and an analogue of the Frankl type condition on the interval of degeneracy of the equation are proved.

Keywords: unbounded domain, missing shift condition, analogue of the Frankl condition, non-Fredholm operator, isolated first-order singularity, singular integral equation, Wiener–Hopf equation, index, unique solvability.

Dildora Mirakhmatovna Mirsaburova

Termez State University,
43 Barkamol avlod str., Termez, 190111, Republic of Uzbekistan,

e-mail: dmirsaburova@mail.ru