Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 6, с. 27–36 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.Р. ЛАНГАРШОЕВ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Аннотация. В работе получены точные неравенства между наилучшими приближениями аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами и модулями непрерывности высших порядков производных в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$. На основе этих неравенств вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, модуль непрерывности m-го порядка, весовое пространство Бергмана, поперечник.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-27-36

Введение

Одной из основных задач теории приближения функций, как в действительной, так и в комплексной областях, является задача вычисления точных значений поперечников классов функций в различных банаховых пространствах.

При этом важную роль играют точные неравенства, содержащие оценки величины наилучшего полиномиального приближения функции, посредством усредненных значений модуля непрерывности высших порядков производных функций.

Более подробно вопросы приближения аналитических функций и вычисления поперечников классов функций изучены в пространствах Харди. Здесь в первую очередь следует упомянуть работы К.И. Бабенко, В.М. Тихомирова, Л.В. Тайкова, М.З. Двейрина, Ю.А. Фаркова и А. Пинкуса [1]–[7]. Далее, это тематика нашла свое отражение в работах [8]–[15]. Первые работы, в которых были затронуты вопросы нахождения точных значений поперечников в пространстве Бергмана, принадлежат С.Б. Вакарчуку [16], [17]. В дальнейшем это направление развивалось в работах [18]–[21]. Существуют различные обобщения пространства Бергмана. Например, в работе [22] было введено весовое пространство Бергмана $B_p(\gamma, D)$, $1 \le p < \infty$, аналитических в единичном круге D функций $f(z)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_p(\gamma,D)} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|)|f(z)|^p d\sigma\right)^{1/p},$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная в области (D) функция. Значительные результаты в пространстве $B_p(\gamma, D)$, где были решены задачи нахождения точных неравенств между наилучшим приближением аналитических в единичном круге функций и усредненными модулями

Поступила в редакцию 13.04.2023, после доработки 21.06.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

непрерывности, а также вычисление значения поперечников различных классов функций, получены в работах [23]–[30].

В настоящей работе мы рассмотрим вышеизложенные задачи в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$, где $\mu > -1$.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $D = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\Big\}$ — единичный круг в этой плоскости и $U(D)$ — множество аналитических в D функций.

Символом $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\mu > -1$, обозначим банахово пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in U(D)$, для которых

$$\|f\|_{2,\mu} \stackrel{def}{=} \|f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} = \left(\int\limits_D |f(z)|^2 dA_\mu(z)\right)^{1/2} < \infty, \tag{1}$$

где

$$dA_\mu(z) = (\mu+1)(1-|z|^2)^\mu dA(z),$$

$dA(z) = \dfrac{1}{\pi}dxdy$ — элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Используя обозначение $z = x + iy = \rho e^{it}$, $0 < \rho \le 1$, $0 < t \le 2\pi$, норму (1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(\mu+1)(1-\rho^2)^\mu |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt\right)^{1/2} < \infty.$$

В частности, если $\mu = 0$, то пространство $\mathscr{B}_{2,0} \stackrel{def}{=} \mathscr{B}_2$ является известным пространством Бергмана.

Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\le n-1$ обозначим

$$\mathscr{P}_{n-1} = \left\{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) z^k, a_k \in \mathbb{C}\right\}.$$

Наилучшее приближение функции $f \in \mathscr{B}_{2,\mu}$ множеством $\mathscr{P}_{n-1}$ обозначим

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\} \tag{2}$$

Величину

$$\omega_m(f,t)_{2,\mu} = \sup\left\{\|\Delta_m(f;\rho,t,h)\|_{2,\mu} : |h| \le t\right\}, \tag{3}$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,t,h) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right) \tag{4}$$

— разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Для любых $r \in \mathbb{N}$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$.

Поскольку функция $f \in \mathscr{B}_{2,\mu}$ аналитична в D, то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k(f) z^k \tag{5}$$

следует

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1) = k!\{(k-r)!\}^{-1}, \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

$c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f.

Обозначим через $\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, множество функций $f \in U(D)$, у которых $z^r f^{(r)} \in \mathscr{B}_{2,\mu}$.

1. О наилучшем приближении аналитических функций в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Для произвольной $r \in \mathbb{Z}_+$ с учетом соотношения (4) и (6) получаем

$$\Delta_m\big(z^r f^{(r)}, \rho, t, h\big) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^k e^{ikt} \big(1 - e^{ikh}\big)^m.$$

Отсюда с использованием равенства Парсеваля будем иметь

$$\big\|\Delta_m(z^r f^{(r)}, \rho, t, h)\big\|_{2,\mu}^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \alpha_{k,r}^2 \frac{k!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(k+\mu+2)} (1-\cos kh)^m, \tag{7}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Для произвольной функции $f \in \mathscr{B}_{2,\mu}$ непосредственным вычислением имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(k+\mu+2)} \right\}^{1/2},$$

где $T_{n-1}(f)$ — частная сумма n-го порядка ряда Маклорена (5).

Теорема 1. *Пусть функция $f(z) \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$. Тогда для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $0 < p \leq 2$, $0 \leq \gamma < pn \ln[n/(n-r)]$, $0 < u \leq \pi/n$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \frac{\left(\int\limits_0^u \omega_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{2,\mu} \sin^\gamma \dfrac{\beta}{u} t dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \dfrac{\beta}{u} t dt\right)^{1/p}}. \tag{8}$$

Неравенство (8) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$ для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Из соотношений (3) и (7) для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, при любых $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, имеем

$$\omega_m^2\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{2,\mu} \geq 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \alpha_{k,r}^2 \frac{k!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(k+\mu+2)} (1-\cos kt)^m. \tag{9}$$

Возведем обе части неравенства (9) в степень $p/2$, умножив на $\sin^\gamma \dfrac{\beta}{u} t$ и проинтегрировав по переменной t от 0 до u. Затем, извлекая корень степени $1/p$ от полученного результата, имеем

$$\left\{\int_0^u \omega_m^p\big(z^r f^{(r)},t\big)_{2,\mu}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\int_0^u\left(2^m\sum_{k=r+1}^{\infty}|c_k(f)|^2\alpha_{k,r}^2\frac{k!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(k+\mu+2)}(1-\cos kt)^m\right)^{p/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt\right\}^{1/p}. \qquad (10)$$

Далее, воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского [31]:

$$\left(\int_0^u\left[\sum_{k\geq n}|f_k(t)|^2\right]^{p/2}dt\right)^{1/p}\geq\left(\sum_{k\geq n}\left[\int_0^u|f_k(t)|^p dt\right]^{2/p}\right)^{1/2},\quad u>0,\quad 0<p\leq 2,$$

в результате которого правая часть неравенства (10) принимает вид

$$\left\{\int_0^u \omega_m^p\big(z^r f^{(r)},t\big)_{2,\mu}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\frac{k!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(k+\mu+2)}\left[\alpha_{k,r}^p\int_0^u(1-\cos kt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt\right]^{2/p}\right\}^{1/2}. \qquad (11)$$

Рассмотрим функцию натурального аргумента

$$\varphi(k)=\alpha_{k,r}^p\int_0^u(1-\cos kt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt$$

и покажем, что она для всех значений $k\geq n>r$ является строго возрастающей. Для этого сначала найдем производную функции $\varphi(k)$:

$$\varphi'(k)=p\alpha_{k,r}^p\sum_{s=0}^{r-1}\frac{1}{k-s}\int_0^u(1-\cos kt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt+\alpha_{k,r}^p\int_0^u\frac{d}{dk}(1-\cos kt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t dt.$$

Так как

$$\frac{d}{dk}(1-\cos kt)^{mp/2}=\frac{t}{k}\frac{d}{dt}(1-\cos kt)^{mp/2},$$

то

$$\varphi'(k)=\alpha_{k,r}^p\left\{\frac{1}{k}u(1-\cos ku)^{mp/2}\sin^\gamma\beta+\right.$$

$$\left.+\int_0^u(1-\cos kt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}t\left[p\sum_{s=1}^{r-1}\frac{1}{k-s}+(p-1)\frac{1}{k}-\frac{\gamma}{k}\frac{\beta}{u}t\operatorname{ctg}\frac{\beta}{u}t\right]dt\right\}.$$

Поскольку функция $\theta(t)=\dfrac{\beta}{u}t\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{u}t$ на отрезке $[0,u]$ является строго убывающей, для любого $0<p\leq 2$ и $k\geq n>r$ имеем

$$p\sum_{s=1}^{r-1}\frac{1}{k-s}+(p-1)\frac{1}{k}-\frac{\gamma}{k}\frac{\beta}{u}t\operatorname{ctg}\frac{\beta}{u}t\geq p\sum_{s=0}^{r-1}\frac{1}{k-s}-\frac{\gamma}{k}=p\ln\frac{k}{k-r}-\frac{\gamma}{k}>0.$$

Отсюда получаем условие теоремы на число γ :

$$0\leq\gamma<pk\ln[k/(k-r)]<pn\ln[n/(n-r)],\quad k\geq n>r.$$

Следовательно, $\varphi'(k) > 0$. Это означает, что $\min\Big\{\varphi(k) : k \geq n > r\Big\} = \varphi(n)$. Поэтому соотношение (11) принимает вид

$$\left\{\int\limits_0^u \omega_m^p\Big(z^r f^{(r)}, t\Big)_{2,\mu} \sin^\gamma \frac{\beta}{u} t dt\right\}^{1/p} \geq 2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}tdt\right)^{1/p} E_{n-1}(f)_{2,\mu}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (8).

Чтобы доказать точность неравенства (8), рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r < n$. Для этой функции из соотношений (2) и (3) имеем

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = \left\{\frac{n!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(n+\mu+2)}\right\}^{1/2}, \tag{12}$$

$$\omega_m\left(z^r f_0^{(r)}, t\right)_{2,\mu} = \left\{2^m\alpha_{n,r}^2\frac{n!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(n+\mu+2)}(1-\cos nt)^m\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

С учетом равенств (12) и (13) запишем

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\frac{\left(\int\limits_0^u \omega_m^p(z^r f_0^{(r)}, t)_{2,\mu}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}tdt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}tdt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\frac{\left(\int\limits_0^u \left\{2^m\alpha_{n,r}^2\frac{n!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(n+\mu+2)}(1-\cos nt)^m\right\}^{p/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}tdt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^{mp/2}\sin^\gamma\frac{\beta}{u}tdt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{n!\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(n+\mu+2)}\right\}^{1/2}.$$

□

Из теоремы 1 при различных значениях параметров p, m, γ, β, u вытекают ряд следствий.

Следствие 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $\gamma = 0$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\frac{\left(\int\limits_0^u \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}.$$

Следствие 2. Пусть $p = 2$, $m = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = \pi$, $u = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2\alpha_{n,r}}\left(n\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}\sin nt dt\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Следствие 3. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N},\ p = 2,\ \gamma = 0,\ 0 < u \le \pi/n$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^u \omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} dt\right)^{1/2}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(\int\limits_0^u (1-\cos nt)^m dt\right)^{1/2}}. \tag{15}$$

При $u = \pi/n$ из неравенства (15) получим

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\frac{m!n}{2^m\pi(2m-1)!!}\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} dt\right)^{1/2}.$$

Следствие 4. Пусть $m \in \mathbb{N},\ p = 2/m,\ \gamma = 1,\ \beta = \pi,\ u = \pi/n$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{2^m\alpha_{n,r}}\left(n\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \sin nt dt\right)^{m/2}. \tag{16}$$

Следствие 5. Пусть $p = 2,\ m, n, r \in \mathbb{N},\ \gamma = 1,\ \beta = \pi,\ u = \pi/n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^{m+1/2}\alpha_{n,r}}\left(n\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \sin nt dt\right)^{1/2}.$$

Из неравенств (14)–(16), в частности, при $\mu = 0$, вытекают результаты, полученные в работах [18]–[20].

2. О значении поперечников классов $W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi)$ в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n, $\mathcal{L} : \mathscr{B}_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор и $\mathcal{L}^{\perp} : \mathscr{B}_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset \mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} : \varphi \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}\mathscr{B}_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}\mathscr{B}_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$. Поскольку $\mathscr{B}_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками выполняются следующие соотношения ([32], с. 239):

$$b_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) \le d^n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) \le d_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \lambda_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}) = \Pi_n(\mathfrak{M}, \mathscr{B}_{2,\mu}). \tag{17}$$

Также полагаем

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M}) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{M}\}. \tag{18}$$

Пусть $\Phi(u)$ $(u \geq 0)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Через $W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq 2$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma < pn \ln[n/(n - r)]$, $r < n$, $0 < u \leq \pi/n$, обозначим класс функций $f \in \mathfrak{B}^{(r)}_{2,\mu}$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^u \omega^p_m\Big(z^r f^{(r)}, t\Big)_{2,\mu} \sin^\gamma \frac{\beta}{u} t dt \leq \Phi^p(u).$$

Положим

$$(1 - \cos nt)^m_* = \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если} \quad nt < \pi; \\ 2^m, & \text{если} \quad nt \geq \pi. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma < pn \ln[n/(n - r)]$, $r < n$, $0 < \beta \leq \pi$ и функция Φ при любых значениях $0 < u \leq \pi/n$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(\pi/n) \int_0^u (1 - \cos nt)^{mp/2}_* \sin^\gamma \frac{\beta}{u} t dt \leq \Phi^p(u) \int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi} t dt. \tag{19}$$

Тогда имеет место равенство

$$\sigma_n \left(W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi), \mathscr{B}_{2,\mu}\right) = \mathscr{E}_n \left(W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi)\right)_{\mathscr{B}_{2,\mu}} =$$

$$= 2^{-m/2} \alpha^{-1}_{n,r} \left(\int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n), \tag{20}$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. При этом множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих ограничению (19), не пусто.

Доказательство. На основании неравенства (18), из соотношения (8) в утверждения теоремы 2, определения класса $W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi)$ и соотношения (17) при $u = \pi/n$ получаем оценку сверху для проекционного n-поперечника

$$\sigma_n \left(W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi), \mathscr{B}_{2,\mu}\right) \leq \Pi_n \left(W^{(r)}_{m,p,\beta,\gamma}(u, \Phi), \mathscr{B}_{2,\mu}\right) \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \alpha^{-1}_{n,r} \left(\int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \tag{21}$$

Чтобы получить оценки снизу введем шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \|p_n\|_{2,\mu} = 2^{-m/2} \alpha^{-1}_{n,r} \left(\int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n) \right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \in \mathfrak{B}^{(r)}_{2,\mu}$. Для любого $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega^2_m\Big(z^r p^{(r)}_n, t\Big)_{2,\mu} \leq 2^m \alpha^2_{n,r} (1 - \cos nt)^m_* \|p_n\|^2_{2,\mu}. \tag{22}$$

Возводя обе части неравенства (22) в степень $p/2$, умножая результат на $\sin^\gamma \dfrac{\beta}{u}t$ и интегрируя полученное неравенство по переменной t от 0 до u, согласно условию (19) имеем

$$\int\limits_0^u \omega_m^p\left(z^r p_n^{(r)}, t\right)_{2,\mu} \sin^\gamma \frac{\beta}{u}tdt \le 2^{mp/2}\alpha_{n,r}^p \|p_n\|^p \int\limits_0^u (1-\cos nt)_*^{mp/2} \sin^\gamma \frac{\beta}{u}tdt =$$

$$= \left(\int\limits_0^{\pi/n} (1-\cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi}tdt\right)^{-1} \Phi^p(\pi/n) \int\limits_0^u (1-\cos nt)_*^{mp/2} \sin^\gamma \frac{\beta}{u}tdt \le \Phi^p(u).$$

Это означает, что $S_{n+1} \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$. Воспользовавшись соотношением (17) и определением бернштейновского поперечника, запишем оценку снизу всех поперечников

$$\sigma_n(W_{m,p,\beta,\gamma}^{(r)}(u,\Phi), \mathscr{B}_{2,\mu}) \ge b_n(W_{m,p,\beta,\gamma}^{(r)}(u,\Phi), \mathscr{B}_{2,\mu}) \ge b_n\left(S_{n+1}, \mathscr{B}_{2,\mu}\right) =$$

$$= 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^{\pi/n} (1-\cos nt)^{mp/2} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\pi}tdt\right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \tag{23}$$

Из сопоставления соотношений (21) и (23) получим равенство (20). $\square$

Следует отметит, что множество функций Φ, для которых выполняется условие (19), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где значения α ради простоты определены при $\gamma = 0$:

$$\alpha = \frac{\pi}{p\int\limits_0^\pi \left(\sin\dfrac{t}{2}\right)^{mp} dt}. \tag{24}$$

Из (24) получаем

$$\frac{1}{p} < \alpha < m + \frac{1}{p}.$$

Дальнейшие рассуждения выполнения условия (19) при $\gamma = 0$ для функции $\Phi_*(u)$ повторяют схему доказательства теоремы 3 из работы [33].

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

[1] Бабенко К.И. *О наилучших приближениях одного класса аналитических функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **22** (5), 631–640 (1958).

[2] Тихомиров В.М. *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*, УМН **15** (3), 81–120 (1960).

[3] Тайков Л.В. *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций*, Матем. заметки **1** (2), 155–162 (1967).

[4] Двейрин М.З. *Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге*, Теория функций, функц. анализ и их прил. **23**, 32–46 (1975).

[5] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций*, в сб. : *Теория отображений и приближение функций,* Наукова думка, 62–73 (Киев, 1983).

[6] Фарков Ю.А. *О поперечниках некоторых классов аналитических функций*, УМН **39** (1), 161–162 (1984).

[7] Pinkus A. *n-Widths in Approximation Theory* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1985).

[8] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. *Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций*, Матем. заметки **40** (3), 341–351 (1986).

[9] Вакарчук С.Б. *О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости*, Укр. матем. журн. **56** (9), 1155–1171 (2004).

[10] Вакарчук С.Б. *О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций*, Матем. заметки **65** (2), 186–193 (1999).

[11] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2*, Матем. заметки **68** (5), 796–800 (2000).

[12] Вакарчук С.Б. *Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения*, Матем. заметки **72** (5), 665–669 (2002).

[13] Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. *Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_r^p*, $1 \le p \le 2$, Докл. РАН **394** (4), 19–24 (2004).

[14] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$, Сиб. матем. журн. **57** (2), 469–478 (2016).

[15] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Д.Д. *О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди*, Тр. ИММ УрО РАН **27** (4), 239–254 (2021).

[16] Вакарчук С.Б. *О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций*, Укр. матем. журн. **42** (7), 872-882 (1990).

[17] Вакарчук С.Б. *Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций*, Матем. заметки **57** (1), 30–39 (1995).

[18] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. *Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p*, Вестн. ХоГУ **1** (1), 45–50 (1999).

[19] Шабозов М.Ш. *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана*, Докл. РАН **383** (2), 171–174 (2002).

[20] Пиров Х.Х., Лангаршоев М.Р. *Значение поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков, в пространстве Бергмана*, Докл. АН. Респ. Тадж. **54** (7), 519–525 (2011).

[21] Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. *Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана*, Матем. заметки **110** (2), 266–281 (2021).

[22] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. *О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$*, Докл. РАН **412** (4), 466–469 (2007).

[23] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. *О поперечниках классов функций, аналитических в круге*, Матем. сб. **201** (8), 3–22 (2010).

[24] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. *Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **50** (6), 999–1004 (2010).

[25] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. *О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана*, Докл. РАН **450** (5), 518–521 (2013).

[26] Акопян Р.Р., Саидусайнов М.С. *Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге*, Тр. ИММ УрО РАН **23** (3), 22–32 (2017).

[27] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. *Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана*, Владикавк. матем. журн. **20** (1), 86–97 (2018).

[28] Лангаршоев М.Р. *О наилучшем полиномиальном приближении функций в весовом пространстве Бергмана*, Владикавк. матем. журн. **21** (1), 27–36 (2019).

[29] Вакарчук С.Б. *Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$*, Матем. заметки **108** (6), 803–822 (2020).

[30] Лангаршоев М.Р. *Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана*, Чебышевский сб. **22** (2), 135–144 (2021).

[31] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequality* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952).

[32] Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений* (МГУ, М., 1976).

[33] Шабозов М.Ш. *Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$*, Матем. заметки **87** (4), 616–623 (2010).

Мухтор Рамазонович Лангаршоев

Академия гражданской защиты МЧС России,
ул. Соколовская, д. 1 А, мкр. Новогорск, г. Химки, Московская область, 141435, Россия,

e-mail: mukhtor77@mail.ru

M.R. Langarshoev

On the best approximation of analytic in a disk functions in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Abstract. We obtain sharp inequalities between the best approximations of analytic in the unit disk functions by algebraic complex polynomials and the moduli of continuity of higher-order derivatives in the Bergman weighted space $\mathscr{B}_{2,\mu}$. Based on these inequalities, the exact values of some known n-widths of classes of analytic in the unit disk functions are calculated.

Keywords: best polynomial approximation, mth order modulus of continuity, Bergman weighted space, width.

Mukhtor Ramazonovich Langarshoev

Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia,
1 A Sokolovskaya str., micr. Novogorsc, Khimki, Moscow region, 141435 Russia,

e-mail: mukhtor77@mail.ru