*Известия вузов. Математика*
*2024, № 6, с. 15–26*

*https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
*e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Н.Х. КАСЫМОВ*

# ЛОГИЧЕСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ ЭФФЕКТИВНО ОТДЕЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ

*Аннотация.* Установлено, что любая эффективно отделимая многосортная универсальная алгебра имеет обогащение, которое является единственной (с точностью до изоморфизма) моделью, построенной из констант для подходящего вычислимо перечислимого множества предложений.

*Ключевые слова*: эффективно отделимая многосортная алгебра, модель данных, спецификация.

*УДК*: 510.5: 510.6: 519.681

*DOI*: 10.26907/0021-3446-2024-6-15-26

## Введение

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1]–[3].

Понятие многосортной модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\Sigma = \langle C, F, P, \Lambda \rangle$, где $C$ $(F, P, \Lambda)$ — множество символов для констант (функциональных символов, предикатных символов, символов для сортов соответственно), включает в себя основное множество $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, являющееся объединением попарно непересекающихся разнотипных множеств, на котором задана интерпретация $\gamma$ типизированных констант, операций и отношений. Каждый символ $c \in C$ имеет интерпретацию $\gamma c \in \lambda$ фиксированного типа $\lambda$, каждому символу $f \in F$ приписан его тип $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda \rangle$ и интерпретация, сопоставляющая этому символу операцию $\gamma f : M_{\lambda_1} \times \cdots \times M_{\lambda_m} \longrightarrow M_\lambda$, а каждому символу $p \in P$ типа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$ — некоторое отношение $\gamma p \subseteq M_{\lambda_1} \times \cdots \times M_{\lambda_n}$.

В данной статье будут рассматриваться многосортные алгебры, поэтому будем полагать, что множество отношений $P$ сигнатуры $\Sigma$ является пустым.

В теоретической информатике моделью данных называется многосортная универсальная алгебра, порожденная значениями сигнатурных констант и обладающая эффективным (при том или ином уточнении понятия эффективности) алгоритмическим представлением (обоснования этого подхода можно найти в статьях и обзорах [4]–[8]). При этом, с точки зрения Computer Science, под эффективной представимостью модели естественно понимать наличие алгоритмического представления, находящегося достаточно низко в классических алгоритмических иерархиях. Важнейшим классом алгоритмических представлений является класс вычислимых представлений моделей [2], однако имеется масса свидетельств в

---

Поступила в редакцию 11.05.2023, после доработки 11.05.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

пользу того, что необходимо рассматривать более широкие классы. Например, в теоретическом программировании можно считать довольно убедительным тезис о том, что всякая абстрактная структура данных имеет позитивное представление (см. [5]–[7]). Это связано, в частности, с тем, что в объектно-ориентированном программировании программой (спецификацией понятия) по сути является конечная система квазитождеств, семантика которой с математической точки зрения заключена в свободной системе, которая всегда существует и обладает естественным позитивным представлением, автоматически извлекаемым из текста программы ([9]). При этом позитивное представление свободной системы не обязано быть вычислимым и, более того, даже если имеется вычислимость, то не существует единообразного способа извлечения алгоритмов разрешения из текста программы (что соответствует отсутствию равномерно эффективной процедуры перехода от перечислимых индексов вычислимых множеств к их характеристическим индексам [3]). Какое бы уточнение языка и семантики не принималось, ему сопутствуют две проблемы: "существования и единственности семантики для спецификации (т. е. модели, реализующей спецификацию) и существования спецификации в том или ином языке для модели данных". В работе [4] был предложен метод конечных эквациональных спецификаций, в котором в качестве языка спецификаций абстрактных моделей данных используется язык тождеств, а в качестве семантики — инициальная система соответствующего конечно-базируемого многообразия систем. В этой же работе было показано, что всякая вычислимо представимая структура данных имеет обогащение, являющееся инициальной системой некоторого конечно-базируемого многообразия. Рассмотрение обогащений является необходимым, так как даже простейшие модели данных, например, просматриваемый стек, могут быть неспецифицируемыми в своей сигнатуре ([8]). Неполнота этого языка в обогащениях без новых сортов для позитивно представимых моделей данных была показана посредством предъявления примера конечно порожденной позитивной алгебры, никакое обогащение которой не является свободной системой ни в каком конечно-базируемом многообразии ([10]). Оказалось, что неспецифицируемые конечными множествами тождеств в обогащениях структуры можно построить среди классических объектов — полугрупп ([11]) и групп ([12]). Сказанное не умаляет методологической важности определения канонической модели (семантики) конечной эквациональной спецификации как свободной системы многообразия, заданного этой спецификацией.

Алгоритмическими "двойниками" позитивных систем являются негативные системы, важность которых обусловлена как минимум четырьмя обстоятельствами.

1. Вычислимая отделимость любой негативной модели в вычислимо порожденной топологии, к которой должны апеллировать сложные системы распознавания различия объектов путем обращения к алгоритмически задаваемым окрестностям этих объектов. В данной ситуации (т. е. для вычислимо отделимых нумераций) соответствующие пространства будут $T_4$-пространствами, в то время как для позитивных систем соответствующие вычислимые топологические пространства могут быть вообще пространствами слипшихся точек ([7], [13], [14]).

2. Согласно структурной теореме о строении вычислимо отделимо нумерованных алгебр нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами, т. е. негативные алгебры играют исключительно важную роль в теории вычислимо отделимых алгебр ([7], [15]).

3. Представимость алгебр над негативными эквивалентностями. Над негативными эквивалентностями представимы весьма богатые классы систем. Например, над любой негативной эквивалентностью представима конечно порожденная конгруэнц-простая алгебра ([16]).

Для позитивных эквивалентностей ничего подобного не имеет места ([7], [17], [18]).

4. Стандартная модель арифметики Пеано имеет единственную (с точностью до изоморфизма) позитивно представимую модель — натуральные числа с естественными интерпретациями операций следования, сложения и умножения. Однако существуют невычислимые негативные представления этой модели (см. [19]). Тем не менее, введение негативного линейного порядка, согласованного с операциями, превращает стандартную модель арифметики в вычислимо устойчивую, и сделать это достаточно просто ([20]). Более того, любая негативная эквивалентность является ядром представления подходящего негативного линейного порядка, например, над всякой негативной эквивалентностью с бесконечным числом смежных классов представим плотный линейный порядок, причем множество вычислимых дедекиндовых сечений в этом случае будет продуктивным, но существуют позитивные эквивалентности над которыми вообще не представимы никакие линейные порядки, при этом существует позитивное представление плотного линейного порядка, в котором нет вычислимых сечений ([7], [21], [22]).

Исходя из вышесказанного, негативно представимые системы представляются во многих аспектах не менее важными, чем позитивные, и понятие эффективно представимой модели, заявленное в названии работы, отражает тот факт, что мы принимаем тезис об эффективной отделимости (в том числе о позитивности или негативности) любой модели данных, так как, во-первых, эти представления лежат на самых нижних этажах арифметической иерархии и, во-вторых, они достаточно емкие, чтобы содержать в себе значительную часть моделей данных, возникающих на практике.

**Определение 1.** Нумерованная универсальная алгебра $(\mathfrak{A},\mu)$ называется вычислимо отделимой (отделимой), если для всякой пары чисел, различных по модулю ядра представления, найдется вычислимое (вычислимо перечислимое) множество, отделяющее одно из этих чисел от второго.

Пусть $(\mathfrak{A},\mu)$ — нумерованная алгебра и $\mathcal{B}=\{(\mathfrak{B}_i,\nu_i)|i\in I\}$ — семейство нумерованных алгебр. Будем говорить, что $(\mathfrak{A},\mu)$ аппроксимируется $\mathcal{B}$-алгебрами, если для любых различных $a_0,a_1\in\mathfrak{A}$ существует гомоморфизм $\varphi^i_{\{a_0,a_1\}}$ из $(\mathfrak{A},\mu)$ на подходящую $\mathcal{B}$-алгебру $(\mathfrak{B}_i,\nu_i)$, различающий эти элементы $\Big($т. е. $\varphi^i_{\{a_0,a_1\}}(a_0)\neq\varphi^i_{\{a_0,a_1\}}(a_1)\Big)$.

Исключительная роль негативных алгебр в рамках теории вычислимо отделимых алгебр вытекает из следующей характеризации, позволяющей развить структурную теорию вычислимо отделимых алгебр.

**Предложение 1** (Н.Х. Касымов [14], [15]). *Нумерованная универсальная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.*

Заметим, что ничего подобного для позитивных алгебр не имеет места ([7]).

Однако более фундаментальный тип отделимости с точки зрения алгоритмических процессов представляют отделимые представления (см. Ю.Л. Ершов [1], с. 51–62). В этом случае имеет место важное

**Предложение 2** (Н.Х. Касымов [23]). *Нумерованная универсальная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.*

Таким образом, роль и место эффективно отделимых алгебр в классе отделимых алгебр подобны роли и месту негативных алгебр в классе вычислимо отделимых алгебр.

Напомним, что эффективная отделимость нумерации означает наличие вычислимого семейства вычислимо перечислимых отделяющих множеств ([1], с. 59–60).

Важно отметить, что в отличие от класса негативных представлений, являющихся в точности $\Pi_1^0$-множествами, класс эффективно отделимых представлений не имеет четкой характеризации в терминах иерархии Клини-Мостовского. Любая эффективно отделимая нумерация лежит в классе $\Pi_2^0$, но имеются как отделимые нумерации вне класса $\Delta_2^0$, так и $\Delta_2^0$-нумерации, не являющиеся эффективно отделимыми. Тем не менее важнейшие с точки зрения теоретической информатики негативные и позитивные типы нумераций являются эффективно отделимыми (даже равномерно эффективно отделимыми [8]). При этом сами эффективно отделимые нумерации лежат вполне "низко" в упомянутой иерархии и потому представляется актуальной задача адекватного описания моделей данных, имеющих эффективно отделимые алгоритмические представления.

Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}$ представима над эквивалентностью $\eta$ на множестве натуральных чисел $N$, если существует нумерация алгебры $\mathfrak{A}$ с ядром $\eta$ (т. е. такая нумерация $\mu : N \longrightarrow \mathfrak{A}$, что $\eta = \{\langle x, y\rangle | \mu x = \mu y\}$).

Из предложения 1 вытекает, что если над вычислимо отделимой эквивалентностью представима подпрямо неразложимая алгебра или алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, то эта эквивалентность негативна, т. е. лежит в классе $\Pi_1^0$ ([7]).

Аналогично, из предложения 2 прямо следует, что если над отделимой эквивалентностью представима подпрямо неразложимая алгебра или алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, то эта эквивалентность эффективно отделима, т. е. эта эквивалентность лежит в классе $\Pi_2^0$ ([23]).

Ответ на вопрос: "Существуют ли эффективно отделимые эквивалентности из $\Pi_2^0 \backslash \Pi_1^0$ (т. е. не негативные), над которыми представимы алгебры с классическими условиями конечности (подпрямо неразложимые и/или с артиновыми решетками конгруэнций)", дан в работе [24], в которой показано, что эта разность непуста. Этот результат еще раз подчеркивает важность адекватного описания эффективно отделимых моделей данных, так как даже в предположении наличия естественных алгебраических ограничений обойтись негативными алгоритмическими представлениями не удается в силу существования эффективно отделимых не негативных алгебр, удовлетворяющих этим ограничениям.

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы вычислимо перечислимой определимости многосортных универсальных алгебр, обладающих эффективно отделимыми нумерациями. Установлено, что всякая эффективно отделимо представимая многосортная алгебра эффективной сигнатуры имеет обогащение, являющееся единственной моделью построенной из констант для подходящего вычислимо перечислимого множества предложений.

Касательно терминологии отметим, что понятие алгоритмического представления мы будем отождествлять с классическим понятием нумерации. Иногда, если это не вызывает недоразумений, алгоритмические представления будем называть представлениями, без прилагательного "алгоритмические".

## 1. Основные определения

Всюду далее под словом алгебра, если не оговорено противное, будем понимать произвольную многосортную универсальную алгебру эффективной сигнатуры, т. е. функция, сопоставляющая сигнатурному символу его тип, является вычислимой.

**Определение 2.** Алгоритмическим представлением (нумерацией) счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ эффективной многосортной сигнатуры $\Sigma$ называется всякое такое семейство $\mu = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mu_\lambda$ сюръективных отображений, где

$$\mu_\lambda : \omega_\lambda \longrightarrow A_\lambda \ (\lambda \in \Lambda),$$

для которого существует эффективное семейство $F_{comp}$ вычислимых функций, представляющих $\Sigma$-операции системы $\mathfrak{A}$ в нумерации $\mu$, т. е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ типа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda \rangle$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией

$$f_\sigma \in F_{comp} : \omega_{\lambda_1} \times \cdots \times \omega_{\lambda_n} \longrightarrow \omega_\lambda,$$

что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\forall x_1 \in \omega_{\lambda_1} \ldots \forall x_n \in \omega_{\lambda_n} \; [\sigma(\mu_{\lambda_1} x_1, \ldots, \mu_{\lambda_n} x_n) = \mu_\lambda f_\sigma(x_1, \ldots, x_n)].$$

**Определение 3.** Если $\mu$ — алгоритмическое представление универсальной алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \mu)$ называется нумерованной алгеброй, а семейство нумерационных эквивалентностей $ker(\mu) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\langle x, y \rangle | \mu_\lambda x = \mu_\lambda y\}$ — ядром представления.

Отображение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ многосортных алгебр сигнатуры $\Sigma = \langle C, F, \Lambda \rangle$ называется гомоморфизмом, если $\varphi$ является объединением семейства отображений $\varphi_\lambda : A_\lambda \longrightarrow B_\lambda, \lambda \in \Lambda$, сохраняющих операции, т. е.

для всякой константы $c_\lambda \in A_\lambda$ сорта $\lambda$ значение $\varphi_\lambda(c_\lambda)$ есть значение $c_\lambda \in B_\lambda$;

если $\sigma$ — $\Sigma$-операция типа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda \rangle$, то $\forall x_1 \in A_{\lambda_1} \ldots \forall x_n \in A_{\lambda_n} [\varphi_\lambda \sigma_A(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_B(\varphi_{\lambda_1} x_1, \ldots, \varphi_{\lambda_n} x_n)]$, где $\sigma_A, \sigma_B$ обозначают интерпретацию функционального символа $\sigma$ в алгебрах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.

Все рассматриваемые нами гомоморфизмы нумерованных алгебр являются вычислимыми, т. е. поддерживаются вычислимыми на номерах функциями в следующем смысле ([1]).

**Определение 4.** Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ многосортных алгебр сигнатуры $\Sigma = \langle C, F, \Lambda \rangle$ называется вычислимым гомоморфизмом (или морфизмом) нумерованных алгебр $(\mathfrak{A}, \mu)$ и $(\mathfrak{B}, \nu)$, если он эффективен на номерах, т. е. для каждого экземпляра натурального ряда $\omega_\lambda$ типа $\lambda \in \Lambda$ (являющегося нумерационным множеством для $A_\lambda$ и $B_\lambda$) существует такая вычислимая функция $f_\lambda : \omega_\lambda \longrightarrow \omega_\lambda$, что

$$\varphi_\lambda \mu_\lambda = \nu_\lambda f_\lambda; \quad \lambda \in \Lambda.$$

Далее, для простоты изложения и упрощения обозначений, мы будем рассматривать двухсортные алгебры, т. е. обычные универсальные алгебры (основной сорт) вместе с нумерацией (вспомогательный сорт), так как в большинстве рассматриваемых нами случаев принципиальной разницы между двухсортными и многосортными системами нет.

Если $\eta$ — фиксированная эквивалентность на $\omega$ и $\mathfrak{A}$ — алгебра, обладающая представлением с ядром равным $\eta$, то алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть представимой над $\eta$. В многосортном случае речь идет о разнотипных копиях натурального ряда и соответствующих эквивалентностях на них. Равносильно можно рассматривать один экземпляр натурального ряда и различные нумерующие отображения на семейство основных сортов.

При фиксированной системе классической является проблема изучения различных ее представлений и соотношений между ними, в частности, проблема существования хороших представлений (например, вычислимых) и соотношений между ними (в том числе единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма, представления).

С другой стороны, можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений систем в теоретической информатике ([7]). В рамках такого подхода в последнее время появились работы, связанные с различными типами сводимостей (см. библиографию в [25], [26]).

Например, универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ представима над эквивалентностью $\eta$, если существует такая вычислимая алгебра $\langle \omega; F \rangle$, где $F$ — подходящее семейство вычислимых функций, что $\eta$ является конгруэнцией алгебры $\langle \omega; F \rangle$ и $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; F \rangle$.

Вполне очевидно, что в сложных саморегулирующихся интенсионально заданных системах одну из ключевых ролей играет проблема распознавания, предполагающая наличие алгоритмически определяемых отделяющих окрестностей элементов системы.

Подмножество $A_0$ нумерованного множества $(A, \mu)$ называется $\mu$-вычислимым ($\mu$-вычислимо перечислимым), если вычислимо (вычислимо перечислимо) множество $\mu^{-1}A_0$. Если из контекста ясно о какой нумерации $\mu$ идет речь, то подмножество будем называть просто вычислимым (вычислимо перечислимым), без приставки $\mu$.

**Определение 5.** Нумерованная алгебра $(\mathfrak{A}, \mu)$ называется вычислимой (позитивной, негативной, эффективно отделимой, вычислимо отделимой, отделимой), если ядро нумерации, т. е. множество $\{\langle x, y\rangle | \mathfrak{A} \vDash \mu x = \mu y\}$, вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо, эффективно отделимо, вычислимо отделимо, отделимо).

В многосортном случае подразумевается, что вычислимым (вычислимо перечислимым, коперечислимым, эффективно отделимым, вычислимо отделимым, отделимым) является семейство полных прообразов представлений $\mu_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, т. е. если $(\mathfrak{A}, \mu)$ — нумерованная алгебра с основным множеством $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, то ядро каждого отображения $\mu_\lambda$ вычислимо (соответственно вычислимо перечислимо, коперечислимо, эффективно отделимо, вычислимо отделимо, отделимо). При этом в случае бесконечности множества типов $\Lambda$ предполагается наличие равномерно эффективной процедуры, сопоставляющей каждому символу $\Sigma$-операции алгоритм вычисления функции соответствующего типа, представляющей данную $\Sigma$-операцию в нумерации $\mu$.

Далее, следуя традиционной терминологии Computer Science, многосортные алгебры, порожденные значениями сигнатурных констант, будем часто называть моделями данных, а вычислимо перечислимые множества предложений логики первого порядка — спецификациями.

## 2. Специфицируемость эффективно отделимых алгебр

Как отмечалось выше, представляется целесообразной разработка математических методов адекватного описания моделей данных (т. е. многосортных универсальных алгебр, порожденных значениями сигнатурных констант), обладающих эффективно отделимыми алгоритмическими представлениями.

Таким образом, мы работаем в рамках принимаемого нами тезиса:

*всякая модель данных имеет эффективно отделимое алгоритмическое представление.*

Хорошо известно, что если модель счетной сигнатуры имеет счетную бесконечную модель, то она имеет и модели любой бесконечной мощности, т. е. ее нельзя охарактеризовать с точностью до изоморфизма. Вместе с тем, иногда можно характеризовать системы с точностью до вычислимого изоморфизма в классе как позитивных, так и негативных представлений. Например, как уже отмечалось выше, стандартная модель арифметики Пеано, обогащенная естественным отношением линейного порядка, является вычислимо категоричной в классе всех своих позитивных и негативных представлений (см. [8]). Заметим, что, как отмечалось выше, стандартная модель арифметики без отношения порядка имеет вычислимо неизоморфные негативные представления ([19]). Введение линейного порядка, согласованного со всеми операциями, в структуру негативной системы оказалось полезным с точки зрения возможности определения более обозримых алгоритмических представлений ([21], [22]). Однако эти и другие факты о различных описаниях (спецификациях) негативных моделей данных не снимают актуальности вопроса о том, какие же модели считать "каноническими" в негативном случае и более общем, но не менее важном случае эффективно отделимых моделей данных?

Далее, если $(\mathfrak{A}, \mu)$ — нумерованная система, то неявно "зашивая" алгоритмическое представление $\mu$ в обогащение $\mathfrak{A}_\mu$ (счетным множеством "констант" $\{0, s(0), s^2(0), \dots\}$, полагая $\mu s^m(0) = \mu m$), мы получим возможность инвариантного рассмотрения важнейших алгоритмических свойств нумерованной системы $(\mathfrak{A}, \mu)$, так как при естественной нумерации $\mu m = s^m(0)$ нумерованная система $(\mathfrak{A}_\mu, \mu)$ обладает тем свойством, что $\mu$ образует наименьший элемент относительно сводимости представлений в множестве классов эквивалентных представлений (по модулю отношения "быть взаимно сводимыми друг к другу").

Пусть $\mathfrak{A}$ — универсальная алгебра сигнатуры $\Sigma$, порожденная значениями сигнатурных констант. Перейдем к формулировке главного определения.

**Определение 6.** Универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ эффективной сигнатуры $\Sigma$ называется универсально (экзистенциально, $\exists\forall$-,$\forall\exists$- и т.д.) специфицируемой, если существует такое обогащение $\mathfrak{A}^*$ системы $\mathfrak{A}$ в сигнатуре $\Sigma^*$, что для подходящего вычислимо перечислимого множества $\Phi$ универсальных (экзистенциальных, $\exists\forall$-,$\forall\exists$- и т.д.) предложений (спецификации) сигнатуры $\Sigma^*$ в $\mathfrak{A}^*$ реализуется $\Phi$ (т. е. $\mathfrak{A}^* \models \Phi$) и для всякой $\Sigma$-системы ее подсистема, порожденная константами либо изоморфна $\mathfrak{A}^*$, либо не является $\Phi$-системой.

Другими словами, определимость алгебры $\mathfrak{A}^*$ спецификацией $\Phi$ означает, что $\mathfrak{A}^*$ является единственной (с точностью до изоморфизма) $\Phi$-алгеброй (т. е. алгеброй, в которой реализуется $\Phi$), построенной из замкнутых $\Sigma^*$-термов.

**Определение 7.** Нумерация $\mu$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется стандартной, если для всякой нумерации $\nu$ этой системы существует такая вычислимая функция $f_\nu$, которая сводит $\mu$ к $\nu$, т. е. $\mu = \nu f_\nu$.

**Замечание 1.** Очевидно, что стандартная нумерация образует наименьший элемент в множестве классов эквивалентных (относительно отношения взаимной сводимости) нумераций. Всякая алгебра эффективной сигнатуры, порожденная конечным множеством своих элементов (в частности, конечно порожденная) имеет стандартную нумерацию ([20]). При этом, если $\gamma$ — взаимно однозначная геделевская нумерация абсолютно свободной алгебры замкнутых термов $T(\Sigma)$ эффективной сигнатуры $\Sigma$, то для любой $\Sigma$-алгебры ее подалгебра, порожденная значениями сигнатурных констант, является гомоморфным образом алгебры $T(\Sigma)$. Если $\varphi$ — соответствующий гомоморфизм, то $\varphi\gamma$ и будет стандартной нумерацией этой подалгебры. Очевидно, эта нумерация обладает тем свойством, что всякий замкнутый $\Sigma$-терм является значением подходящего натурального числа при отображении $\varphi\gamma$ (более строго, элементами вышеупомянутой подалгебры являются классы эквивалентных $\Sigma$-термов и каждый терм в любом из этих классов является значением подходящего натурального числа при отображении $\varphi\gamma$). Отметим, что стандартные нумерации наличествуют не всегда. Более того, существуют нумерации алгебр, для которых число минимальных нумераций (т. е. таких, к которым не сводятся никакие нумерации) континуально ([1]).

В доказательстве следующей теоремы будем использовать стандартные $\lambda$-обозначения, т. е. $\lambda\overline{y}.f(\overline{x}, \overline{y})$ обозначает функцию $f$ от списка аргументов $\overline{y}$ при фиксированном наборе $\overline{x}$, элементы которого рассматриваются как параметры.

Говоря об универсальной алгебре $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\Sigma$, будем полагать, что основное множество этой алгебры есть $A$, т. е. $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$.

**Теорема.** *Всякая универсальная алгебра, имеющая эффективно отделимое алгоритмическое представление, является специфицируемой.*

*Доказательство.* Пусть $(\mathfrak{A},\mu)$ — эффективно отделимо нумерованная универсальная алгебра эффективной сигнатуры $\Sigma = C\bigcup F$. Можно полагать, что $\mu$ — стандартная нумерация, так как в противном случае можно заменить нумерацию $\mu$ на стандартную и в силу сводимости стандартной нумерации к $\mu$ стандартная нумерация также будет эффективно отделимой.

По условию существует семейство вычислимо перечислимых $\mu$-замкнутых множеств $\mathfrak{S} = \{S_0, S_1, \dots\}$ (т. е. семейство $\nu$-вычислимо перечислимых подмножеств множества $A$), которое обладает подходящей вычислимой нумерацией $\nu : \omega \longrightarrow \mathfrak{S}$ (т. е. $\{\langle x,y\rangle | y \in \nu x\}$ вычислимо перечислимо) такой, что $\forall x,y[\mu x \neq \mu y \to \exists z((x \in \nu z \wedge y \notin \nu z) \vee (x \notin \nu z \wedge y \in \nu z))]$.

Можно считать, что $\mathfrak{S}$ не содержит пустое множество, так как в противном случае, используя тот факт, что множество $\nu$-номеров непустых множеств вычислимо перечислимо, очевидным образом строится вычислимая нумерация для семейства $\mathfrak{S}\setminus\{\emptyset\}$.

Будем последовательно строить обогащение $\mathfrak{A}^*$ структуры $\mathfrak{A}$ в сигнатуре $\Sigma^*$, попутно комментируя смысл вводимых операций и логических предложений, следующим образом.

Введем новый сорт $\omega$, на котором определим натуральные числа посредством константы $0$ типа $\omega$ и функции следования $s(x) = x+1$ типа $\omega \to \omega$. Далее, во избежание двусмысленности, через $N$ мы будем обозначать множество натуральных чисел, так как $\omega$ — множество дополнительного сорта в $\mathfrak{M}^*$. Основному множеству $A$ алгебры $\mathfrak{A}$ припишем сорт $A$. Таким образом, множество сортов обогащения $\Lambda = \{\omega, A\}$.

Определим предикат отделимости $\{\langle x,y\rangle | y \in \nu x\}$ (типа $\langle\omega,\omega\rangle$, где $\nu x$ — $\mu$-вычислимо перечислимое непустое подмножество множества $A$ с $\nu$-номером $x$) путем введения универсальной вычислимой функции $Sep$ от двух аргументов для семейства $\mathfrak{S}$. Вычисление $Sep$ зададим следующей процедурой.

При фиксированном $x$ область значений функции $\lambda t.Sep(x,t)$ есть в точности множество $\nu x \in \mathfrak{S}$. Заметим, что для каждого $x$ множество $\nu x$ непустое вычислимо перечислимое, поэтому $Sep$ — вычислимая всюду определенная функция, значением которой будет последний перечисленный на текущий момент в $\nu x$ элемент, пока не появится новый (в случае конечного $\nu x$, перечислив последний элемент этого множества, $\lambda t.Sep(x,t)$ будет почти константой, выдавая этот последний в пересчете элемент почти для всех значений аргумента). Функция $Sep$ в точности описывает ядро исходной нумерации. Если пара элементов различается, то посредством функции $Sep$ через конечное число шагов этот факт определится. Типом функции $Sep$ объявим $\langle\omega \times \omega \to \omega\rangle$.

Если $c$ — константный символ сигнатуры $\Sigma$ и интерпретация этого символа есть $\mu n \in A$, то полагаем $c = \mu s^n(0)$.

Для каждой $\Sigma$-операции $f$ добавим к $\Sigma^*$ символ операции $f_\omega$ типа $\langle\omega \times \dots \times \omega \to \omega\rangle$ соответствующей местности.

Все операции и отношения сигнатуры $\Sigma$ считаем определенными только на множестве сорта $A$. Важнейшее отображение типа $\omega \to A$ задается нумерацией $\mu$, которое мы обозначим через эту же букву. Неформально мы хотим определить все необходимые вычислимые процедуры на множестве сорта $\omega$ и перенести нужные свойства на множество сорта $A$ с помощью нумерующей функции $\mu$, осуществляющей гомоморфизм из вычислимой алгебры сигнатуры $\Sigma^*\setminus\Sigma$ (определенной на $\omega$) на нумеруемую алгебру сигнатуры $\Sigma$ (определенной на $A$). Тот факт, что сигнатуры различны, не должен вводить в заблуждение. Хотя мы рассматриваем разные (даже непересекающиеся) сигнатуры, наличие гомоморфных соотношений очевидно, так как каждому константному символу $c = \mu m$ ($c \in C$) сопоставляется терм $s^m(0)$ (т. е. $c = \mu s^m(0)$), а каждой $\Sigma$-операции $f$ сопоставляется $(\Sigma^*\setminus\Sigma)$-операция $f_\omega$, которая является вычислимой функцией, представляющей операцию $f$ в нумерации $\mu$.

Поэтому "лишними" в $\Sigma^*$ оказываются только константа 0, функция-последователь (конструктор натуральных чисел) $s$ и функция отделимости $Sep$, элиминируя которые, получаем гомоморфизм в "чистом виде".

Пусть $\Phi_0 = \{c = \mu s^m(0) | c = \mu m; c \in C\} \cup \{f(\mu x_1, \ldots, \mu x_n) = \mu f_\omega(x_1, \ldots, x_n) | f \in F\}$. Множество тождеств $\Phi_0$, как отмечалось выше, по сути описывает тот факт, что $\mu$ есть гомоморфизм из вычислимой алгебры (определенной на $\omega$) на нумеруемую алгебру (заданную на $A$). Ясно, что $\Phi_0$ — вычислимо перечислимое множество.

Следующая группа предложений предназначена для описания всех функций со значениями типа $\omega$ (в сигнатуре $\Sigma^* \setminus \Sigma$). Таковыми будут $0, s, Sep, f_\omega$ $(f \in \Sigma)$. Очевидно, что алгебра с основным множеством типа $\omega$ в сигнатуре $\Sigma^* \setminus \Sigma$ вычислимая. Обозначим ее диаграмму (т. е. все равенства и неравенства между замкнутыми термами со значениями типа $\omega$ в сигнатуре $\Sigma^* \setminus \Sigma$) через $\Phi_1$. Очевидно, что $\Phi_1$ вычислимо перечислимо (даже вычислимо).

Наконец, определим ядро представления $\mu$ алгебры $\mathfrak{M}$ путем введения двух групп предложений:

$$\exists x \in \omega[(\exists t \in \omega\ Sep(x,t) = s^m(0) \wedge \forall t \in \omega\ Sep(x,t) \neq s^n(0)) \vee$$
$$\vee(\exists t \in \omega\ Sep(x,t) = s^n(0) \wedge \forall t \in \omega\ Sep(x,t) \neq s^m(0))] \Rightarrow \mu s^m(0) \neq \mu s^n(0).$$

Множество всех этих предложений, определяющих неравенства между $\mu$-термами (по всем $m, n \in N, m \neq n$), обозначим через $\Phi_2$.

$$\forall x \in \omega[\exists t \in \omega\ Sep(x,t) = s^m(0) \Leftrightarrow \exists t \in \omega\ Sep(x,t) = s^n(0)] \Rightarrow \mu s^m(0) = \mu s^n(0).$$

Множество всех этих предложений, определяющих равенства между $\mu$-термами (по всем $m, n \in N, m \neq n$), обозначим через $\Phi_3$.

Положим

$$\Phi = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant 3} \Phi_i.$$

Тогда $\Phi$ — вычислимо перечислимое множество предложений, реализующееся в обогащении $\mathfrak{A}^*$ системы $\mathfrak{A}$ в сигнатуре $\Sigma^*$, т. е. $\mathfrak{A}^* \models \Phi$. Напомним, что специфицируемость $\mathfrak{A}^*$ посредством вычислимо перечислимого множества предложений $\Phi$ означает, что $\mathfrak{A}^* \models \Phi$ и во всякой $\Phi$-алгебре ее подалгебра, порожденная сигнатурными константами либо изоморфна $\mathfrak{A}^*$, либо не является $\Phi$-алгеброй. При этом $\Phi$ называется спецификацией для $\mathfrak{A}^*$.

Покажем, что $\mathfrak{A}^*$ специфицируется посредством $\Phi$.

Обозначим через $T(\Sigma^*)$ множество всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma^*$, а через $\equiv_{\mathfrak{A}^*}$ — отношение конгруэнтности $\{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle | \mathfrak{A}^* \models \tau_1 = \tau_2; \tau_1, \tau_2 \in T(\Sigma^*)\}$. Очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}^*$ изоморфна $T(\Sigma^*)/ \equiv_{\mathfrak{A}^*}$.

Замкнутый терм сигнатуры $\Sigma^*$ назовем $\mu$-термом ($\omega$-термом), если его значение имеет тип $A$ (тип $\omega$). Заметим, что всякий замкнутый терм сигнатуры $\Sigma$ является $\mu$-термом и соотношения между $\mu$-термами определяются группой предложений $\Phi_0$.

**Лемма 1.** *Во всяком классе $\equiv_{\mathfrak{A}^*}$-конгруэнтных $\omega$-термов имеется в точности один $\omega$-терм вида $s^n(0)$ для подходящего $n \in N$.*

*Доказательство.* В силу $\Phi_1 \subseteq \Phi$ верно $\Phi \vdash s^m(0) \neq s^n(0)$ для $m \neq n$, т. е. термы $s^m(0), s^n(0)$ лежат в разных классах $\equiv_{\mathfrak{A}^*}$-конгруэнтности при различных $m, n$. С другой стороны, никакой $\mu$-терм не переводится никакой операцией ни в какой $\omega$-терм (единственная операция, связывающая различные типы — $\mu$, переводящая $\omega$ в $A$). Поэтому, если значение $\omega$-терма $\tau$ равно натуральному числу $n$, то $\tau$ и $s^n(0)$ являются $\equiv_{\mathfrak{A}^*}$-конгруэнтными. $\square$

Пусть $\gamma$ — взаимно однозначная геделевская нумерация множества замкнутых $\Sigma^*$-термов.

**Лемма 2.** *Для любой пары $\mu$-термов $\tau_1$ и $\tau_2$ эффективно находятся такие $k_1, k_2$, что $\tau_1 = \gamma k_1, \tau_2 = \gamma k_2$ и $\mathfrak{A}^* \models \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^* \models \mu s^{k_1}(0) = \mu s^{k_2}(0)$.*

*Доказательство.* Существование эффективной процедуры следует из стандартности нумерации $\mu$, которая представляет собой композицию нумераций $\gamma$, а затем сюръективного гомоморфизма $\varphi : T(\Sigma^*) \longrightarrow \mathfrak{A}$. Поэтому каждый замкнутый $\mu$-терм является $\gamma$-образом подходящего натурального числа $k \in N$ (см. замечание 1). Пусть $\mathfrak{A}^* \models \tau_1 = \mu s^{k_1}(0)$ и $\mathfrak{A}^* \models \tau_2 = \mu s^{k_2}(0)$. Тогда $\mathfrak{A}^* \models \tau_1 = \tau_2$, если и только если $\mathfrak{A}^* \models \mu s^{k_1}(0) = \mu s^{k_2}(0)$. □

Согласно лемме 2 рассмотрение равенства двух $\mu$-термов можно свести к рассмотрению равенства термов вида $\mu s^m(0)$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная $\Phi$-алгебра сигнатуры $\Sigma^*$ и $\mathfrak{B}_0$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, порожденная значениями сигнатурных констант (на самом деле, в силу леммы 1 она порождается одним элементом — константой 0 типа $\omega$). Допустим, что $\mathfrak{B}_0 \models \Phi$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{B}_0$ изоморфна $\mathfrak{A}^*$. Для этого прежде всего заметим, что сужение $\mathfrak{B}_0$ на тип $\omega$ изоморфно $\omega$-сужению алгебры $\mathfrak{A}^*$, так как вычислимая диаграмма $\Phi_1$ содержит все равенства и неравенства между замкнутыми $\omega$-термами сигнатуры $\Sigma^* \setminus \Sigma$, поэтому все такие равенства и неравенства — логические следствия множества предложений $\Phi$ (отметим, что это сужение автоматически реализует диаграмму $\Phi_1$ во всякой подалгебре любой $\Phi$-алгебры в силу устойчивости универсальных предложений относительно подсистем).

Заметим, что из реализуемости $\Phi_1$ как в $\mathfrak{A}^*$, так и в $\mathfrak{B}_0$, а также стандартности представления $\mu$ следует, что мы фактически "зашили" алгоритмические свойства нумерации $\mu$ в структуру подалгебры $\mathfrak{B}_0$.

Предположим, что для двух $\mu$-термов $\tau_1, \tau_2$ имеет место $\mathfrak{A}^* \models \tau_1 \neq \tau_2$, но $\mathfrak{B}_0 \models \tau_1 = \tau_2$. По лемме 2 это значит, что значения этих термов равные, скажем, $\tau_1 = \mu s^m(0), \tau_2 = \mu s^n(0)$ таковы, что $\mathfrak{A}^* \models \mu s^m(0) \neq \mu s^n(0)$, а значит, в силу группы предложений $\Phi_2$ подходящее $\mu$-вычислимо перечислимое $\mathfrak{S}$-множество отделяет элементы $\mu m, \mu n$ множества типа $A$. Другими словами, $\mathfrak{A}^* \models \mu s^m(0) \neq \mu s^(0)$, но $\mathfrak{B}_0 \models \mu s^m(0) = \mu s^n(0)$. Из $\Phi_2$ в силу истинности левой части импликации следует, что для некоторого $x$, скажем $x = s^k(0)$, существует такое $t = s^l(0)$, что $Sep(s^k(0), s^l(0)) = s^m(0)$ (т. е. $\mu s^m(0)$ лежит в области значений функции $\lambda t.\mu Sep(s^k(0), t)$, которая определяет некоторое $\mu$-вычислимо перечислимое подмножество множества $A$), но ни для какого $t \in \omega$ значение функции $\lambda t.\mu Sep(s^k(0), t)$ не совпадает с $\mu s^n(0)$ (т. е. $\mu s^n(0)$ не принадлежит области значений функции $\lambda t.\mu Sep(s^k(0), t)$). Либо наоборот, с точностью до симметрии, заменяем $m$ на $n$ и $n$ на $m$. Но тогда в силу изоморфизма $\omega$-сужений алгебр $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}_0$ графики всех функций в сигнатуре $\Sigma^* \setminus \Sigma$ (и функции $Sep$ в том числе) в обоих $\omega$-сужениях совпадают. Поэтому в случае $\mathfrak{B}_0 \models \mu s^m(0) = \mu s^n(0)$ истинна левая часть импликации в $\Phi_3$, утверждающая неотделимость элементов $\mu s^m(0)$ и $\mu s^n(0)$, что противоречит наличию отделимости.

Пусть $\mathfrak{A}^* \models \mu s^m(0) = \mu s^n(0)$, но $\mathfrak{B}_0 \models \mu s^m(0) \neq \mu s^n(0)$. В этом случае в силу реализуемости в $\mathfrak{A}^*$ множества $\Phi_3$ получаем, что элементы $\mu s^m(0)$ и $\mu s^n(0)$ одновременно принадлежат любому множеству из семейства $\mathfrak{S}$. Однако по $\Phi_2$ получаем, что для $\mathfrak{B}_0$ имеется $\mathfrak{S}$-множество, отделяющее эти элементы, что невозможно. □

Если основное множество $A$ модели данных $\mathfrak{A}$ типизировано по двум и более сортам, то добавляя для каждого сорта $A_\lambda$ соответствующий этому сорту тип $\omega_\lambda$, затем фиксируя эффективно отделимую нумерацию $\mu$, являющуюся объединением отображений $\mu_\lambda : \omega_\lambda \longrightarrow A_\lambda$ по всем $\lambda$, определим множества предложений, введенные в теореме 3. В многосортном случае мы фактически начинаем работать на "бессортном"экзкмпляре натурального ряда $\omega$

и переносим нужные свойства на сорта семейством нумерационных отображений. Повторив рассуждения теоремы 3, приходим к справедливости следующего утверждения.

**Следствие 1.** Для всякой многосортной алгебры, обладающей эффективно отделимым алгоритмическим представлением, существует такое обогащение, которое выделяется подходящим вычислимо перечислимым множеством предложений логики первого порядка с точностью до изоморфизма в классе всех алгебр, порожденных значениями сигнатурных констант.

Нетрудно оценить верхнюю границу алгоритмической сложности спецификации $\Phi$ из теоремы 1.

**Следствие 2.** Всякая модель данных, обладающая эффективно отделимым алгоритмическим представлением, является $\exists\forall\exists$-специфицируемой (равно как и $\forall\exists\forall$-специфицируемой).

**Замечание 2.** В частности, алгоритмическая сложность ядра эффективно отделимого представления любой алгебры не выходит за рамки класса $\Delta^0_3$. Предельно точная оценка дана в [1] — класс эффективно отделимых эквивалентностей лежит собственным образом в $\Pi^0_2$ и, как отмечалось выше, Ю.Л.Ершовым в [1] же показано, что класс эффективно отделимых эквивалентностей не имеет строгой характеризации в терминах арифметической иерархии.

Отметим, что универсальная специфицируемость модели данных $\mathfrak{M}$ равносильна вычислимости ее стандартной нумерации ([27]), которая всегда существует ([7]), и потому невычислимые эффективно отделимые модели данных (тем более невычислимые позитивные и негативные модели данных) не имеют универсальных спецификаций.

## Литература

[1] Ершов Ю.Л. *Теория нумераций* (Наука, М., 1977).

[2] Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. *Конструктивные модели* (Научн. кн., Новосибирск, 1999).

[3] Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени* (Казанск. матем. о-во, Казань, 2000).

[4] Bergstra J.A., Tucker J.V. *A characterization of computable data types by means of a finite equational specification method*, Lecture Notes in Comput. Sci. **85**, 76–90 (1980).

[5] Гончаров С.С. *Модели данных и языки их описаний*, Вычисл. системы, ИМ СО АН СССР **122**, 73–96 (1987).

[6] Касымов Н.Х., Морозов А.С. *Логические аспекты теории абстрактных типов данных*, Вычисл. системы, ИМ СО АН СССР **107**, 52–70 (1987).

[7] Касымов Н.Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*, Успехи матем. наук. **51** (3), 145–176 (1996).

[8] Касымов Н.Х., Дадажанов Р.Н., Ибрагимов Ф.Н. *Отделимые алгоритмические представления классических систем и их приложения*, Современная матем. Фундамент. направл. **67** (4), 707–754 (2021).

[9] Мальцев А.И. *Алгебраические системы* (Наука, М., 1970).

[10] Касымов Н.Х. *Об алгебрах с финитно-аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями*, Алгебра и логика **26** (6), 715–730 (1987).

[11] Khoussainov B.M. *Randomness, computability, and algebraic specifications*, Ann. Pure and Applied Logic **91** (1), 1–15 (1998).

[12] Khoussainov B.M., Miasnikov A.G. *Finitely presented expansions of groups, semigroups, and algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (3), 1455–1474 (2014).

[13] Касымов Н.Х. *Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда*, Сиб. матем. журн. **34** (3), 81–85 (1993).

[14] Касымов Н.Х. *Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 85–102 (1993).

[15] Касымов Н.Х. *О гомоморфизмах на негативные алгебры*, Алгебра и логика **31** (2), 132–144 (1992).

[16] Касымов Н.Х. *Об алгебрах над негативными эквивалентностями*, Алгебра и логика **33** (1), 76–80 (1994).
[17] Касымов Н.Х. *Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса*, Алгебра и логика **30** (3), 293–305 (1991).
[18] Касымов Н.Х. *Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций*, Алгебра и логика **31** (1), 21–37 (1992).
[19] Khoussainov B.M., Slaman T., Semukhin P. $\prod_1^0$-*Presentasions of Algebras*, Archive for Math. Logic **45** (6), 769–781 (2006).
[20] Касымов Н.Х., Дадажанов Р.Н., Джавлиев С.К. *Структуры степеней негативной представимости линейных порядков*, Изв. вузов. Матем. (12), 31–55 (2021).
[21] Касымов Н.Х., Дадажанов Р.Н. *Негативные плотные линейные порядки*, Сиб. матем. журн. **58** (6), 1306–1331 (2017).
[22] Касымов Н.Х., Морозов А.С. *Об определимости линейных порядков над негативными эквивалентностями*, Алгебра и логика **55** (1), 37–57 (2016).
[23] Касымов Н.Х. *О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 47–66 (2016).
[24] Касымов Н.Х., Морозов А.С., Ходжамуратова И.А. *О $T_1$-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр*, Алгебра и логика **60** (4), 400–424 (2021).
[25] Andrews U., Sorbi A. *Joins and meets in the structure of ceers*, Computability **8** (3–4), 193–241 (2019).
[26] Andrews U., Belin D., San Mauro L. *On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers*, J. Symb. Logic **88** (3), 1038–1063 (2023).
[27] Дадажанов Р.Н. *Вычислимость и универсальная определимость негативно представимых моделей*, Изв. вузов. Матем. (10), 22–32 (2022).

*Надимулла Хабибуллаевич Касымов*

*Национальный университет Узбекистана,*
*Университетская ул., д. 4, Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,*

e-mail: nadim59@mail.ru

*N.Kh. Kasymov*

**Logical specifications of effectively separable data models**

*Abstract.* It is established that any effectively separable many-sorted universal algebra has an enrichment that is the only (up to isomorphism) model constructed from constants for a suitable computably enumerable set of sentences.

*Keywords*: effectively separable many-sorted algebra, data model, specification.

*Nadimulla Khabibullaevich Kasymov*

*National University of Uzbekistan,*
*4 University str., Tashkent, 100174, Republic of Uzbekistan,*

e-mail: nadim59@mail.ru