Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №6, с. 3–14 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С. ДЕМИР

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАЗНОСТЕЙ СРЕДНИХ НА ПРОСТРАНСТВАХ H^1

Аннотация. Пусть (x_n) — последовательность и $\{c_k\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, причем $\|c_k\|_{\ell^\infty} \le 1$. Определим

$$\mathcal{G}(x_n) = \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right|.$$

Пусть (X, β, μ, τ) — эргодическая, сохраняющая меру динамическая система, где (X, β, μ) — пространство со вполне σ-конечной мерой. Предположим, что последовательность (n_k) лакунарна. В статье доказаны следующие результаты:

(i) положим $\phi_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ на $\mathbb{R}$, тогда существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * f)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

для всех $f \in H^1(\mathbb{R})$,

(ii) пусть

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k x)$$

— обычные эргодические средние из эргодической теории, тогда

$$\|\mathcal{G}(A_n f)\|_{L^1(X)} \le C\|f\|_{H^1(X)}$$

для всех $f \in H^1(X)$,

(iii) если $[f(x)\log(x)]^+$ интегрируема, то $\mathcal{G}(A_n f)$ также интегрируема.

Ключевые слова: разностная последовательность, эргодическое пространство Харди, эргодическое среднее, лакунарная последовательность.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-6-3-14

1. Предварительные сведения

Пусть (X, β, μ, τ) — эргодическая, сохраняющая меру динамическая система, где (X, β, μ) — пространство со вполне σ-конечной мерой. Рассмотрим обычные эргодические средние из эргодической теории

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\tau^i x),$$

Поступила в редакцию 11.04.2023, после доработки 11.04.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

определим эргодическую максимальную функцию

$$f^*(x) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(\tau^i x) \right|$$

аналогично максимальной функции Харди–Литтлвуда Mf на вещественной прямой $\mathbb{R}$, заданной формулой

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| \, dt,$$

где I — произвольный интервал в $\mathbb{R}$. Широко известно (см. А.П. Кальдерон [1]), что по принципу переноса f^* имеет сильное L^p-неравенство, если Mf имеет сильное L^p-неравенство при $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть теперь f — интегрируемая функция, определим

$$f^\sharp(x) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(\tau^i x) - T_n f(x) \right|,$$

где

$$T_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(\tau^i x) \right|.$$

Напомним, что пространство H^1 на вещественной прямой $\mathbb{R}$ может быть охарактеризовано как пространство

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \widetilde{H} f \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_{H^1} \sim \|f\|_1 + \|\widetilde{H} f\|_1,$$

где $\widetilde{H} f$ — преобразование Гильберта на $\mathbb{R}$, заданное формулой

$$\widetilde{H} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^\infty \frac{f(t+t) - f(x-t)}{t} \, dt.$$

Аналогично характеристике максимальной функцией определим эргодическое пространство H^1 как пространство

$$H^1(X) = \left\{ f \in L^1(X) : Hf \in L^1(X) \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_{H^1} \sim \|f\|_1 + \|Hf\|_1,$$

где Hf — эргодическое преобразование Гильберта, заданное формулой

$$Hf(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{f(\tau^k x) - f(\tau^{-k} x)}{k}.$$

Аналогично классическому случаю мы также можем задать дуальные пространства к эргодическим пространствам H^1 как пространства функций эргодической ограниченной средней осцилляции (ergodic bounded mean oscillation, EBMO) — таких функций f, для которых $f^\sharp$ является ограниченной по EBMO-норме, заданной равенством

$$\|f\|_{\mathrm{EBMO}} = \left\| f^\sharp \right\|_\infty.$$

Пусть B — банахово пространство, $p<\infty$ и f — B-значная (сильно) измеримая функция, заданная на $\mathbb{R}$. Тогда пространство Бохнера–Лебега $L^p_B=L^p_B(\mathbb{R})$ определяется как

$$L^p_B=\left\{f:\|f\|_{L^p_B}<\infty\right\},$$

где

$$\|f\|_{L^p_B}=\left(\int_{\mathbb{R}}\|f(x)\|^p_B\,dx\right)^{1/p}.$$

Если B — поле скаляров, то будем использовать просто обозначения L^p и $\|\cdot\|_p$. Определим также пространство $WL^p_B=\text{weak}-L^p_B$ как пространство всех B-значных функций f таких, что

$$\|f\|_{WL^p_B}=\sup_{\lambda>0}\lambda\left(m\left\{x\in\mathbb{R}:\|f(x)\|_B\right\}>\lambda\right)^{1/p}<\infty.$$

Если заменить меру Лебега на $w(x)dx$ для некоторого положительного веса w на $\mathbb{R}$, то соответствующие пространства будем обозначать через $L^p_B(w)$ и $WL^p_B(w)$. При $p=\infty$ будем писать

$$L^\infty(B)=\left\{f:\|f\|_{L^\infty(B)}<\infty\right\},$$

где

$$\|f\|_{L^\infty(B)}=\operatorname{ess\,sup}\|f\|_B,$$

а пространство всех элементов из $L^\infty(B)$ с компактным носителем обозначим через $L^\infty_c(B)$.

Для локально интегрируемой B-значной функции f определим максимальные функции

$$M_rf(x)=\sup_{x\in I}\left(\frac{1}{|I|}\int_I\|f(y)\|^r_B\,dy\right)^{1/r},\quad 1\le r\le\infty,$$

и

$$f^\sharp(x)=\sup_{x\in I}\frac{1}{|I|}\int_I\|f(y)-f_I\|_B\,dy,$$

где I — произвольный интервал в $\mathbb{R}$ и

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt$$

— элемент из B.

Заметим, что $f^\sharp$ является шарп-максимальной функцией в классическом смысле, когда $B=\mathbb{R}$ и $\|\cdot\|_B=|\cdot|$, M_1f — максимальная функция Харди–Литтлвуда, $M_\infty f$ — постоянная функция. Аналогично классическому случаю определим пространство B-значных функций ограниченной средней осцилляции (bounded mean oscillation, BMO) как

$$\mathrm{BMO}(B)=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}.B}:\|f\|_{\mathrm{BMO}(B)}=\|f^\sharp\|_{L^\infty(B)}<\infty\right\}.$$

Для B-значной функции f получим неотрицательную функцию $\|f\|_B$, заданную равенством

$$\|f\|_B(x)=\|f(x)\|_B,$$

при этом важно отметить, что

$$\|(\|f\|_B)\|_{\mathrm{BMO}}\le 2\|f\|_{\mathrm{BMO}(B)}.$$

Как обычно, B-атомом называется функция $a\in L^\infty(B)$, носителем которой является интервал I и при этом

$$\|a(x)\|_B\le\frac{1}{|I|},\quad \int_I a(x)\,dx=0,$$

а пространство $H^1_B(\mathbb{R})$ состоит из функций

$$f(x) = \sum_j \lambda_j a_i(x); \quad (\lambda_j) \in l^1,$$

где a_j — B-атомы, причем

$$\|f\|_{H^1_B} = \inf \sum_j |\lambda_j|.$$

Аналогично классическому случаю для $B \in \mathrm{UMD}$ имеем

$$H^1_B(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^1_B(\mathbb{R}) : \widetilde{H} f \in L^1_B(\mathbb{R}) \right\}$$

и

$$\|f\|_{H^1_B} \sim \|f\|_{L^1_B} + \left\|\widetilde{H} f\right\|_{L^1_B}.$$

Здесь мы рассматриваем только ядра $K(x)$, являющиеся сильно измеримыми, заданными на $\mathbb{R}$ и со значениями в пространстве $L(A, B)$ всех ограниченных линейных операторов из A в B по отношению к операторной норме $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L(A,B)}$. Мы будем предполагать, что $\|K(x)\|$ является локально интегрируемой функцией вне начала координат.

Определение 1. Будем говорить, что K удовлетворяет условию Хёрмандера, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_{|x|>2|y|} \|K(x-y) - K(x)\| \, dx \le C < \infty,$$

где C не зависит от $y \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Линейный оператор T, отображающий A-значные функции в B-значные функции, называется сингулярным интегральным оператором типа свертки, если выполняются следующие условия:

(i) T — ограниченный оператор из $L^q_A(\mathbb{R})$ в $L^q_B(\mathbb{R})$ для некоторого q, $1 \le q \le \infty$;

(ii) существует ядро K, удовлетворяющее условию Хёрмандера, такое, что

$$Tf(x) = \int K(x-y) \cdot f(y) \, dy$$

для любой $f \in L^q_A(\mathbb{R})$ с компактным носителем и почти для любого $x \notin \operatorname{supp}(f)$.

Заметим, что последовательность $\{n_k\}$ называется лакунарной, если существует вещественное число $\beta > 1$ такое, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \beta$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

2. Результаты

Сначала сформулируем и докажем несколько лемм, на которых будут основаны доказательства наших результатов.

Определим ядерный оператор $K : \mathbb{R} \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ как

$$K(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{j} c_k (\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)) \right\}_{j \in \mathbb{Z}^+}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\{n_k\}$ *— лакунарная последовательность, тогда существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right| < C$$

для любых $x \in \mathbb{R}$, *где* $\phi_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$, *а* $\hat{\phi}_{n_k}(x)$ *— преобразование Фурье этой функции.*

Доказательство. Поскольку ясно, что

$$\sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right| \le \sup_j \sum_{k=0}^{j} \left| \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right|,$$

для доказательства достаточно оценить

$$I(x) = \sum_{k=0}^{j} \left| \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right|$$

для фиксированного $j \in \mathbb{Z}^+$.

Заметим, что

$$I(x) = \sum_{k=0}^{j} \left| \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right| = \sum_{k=0}^{j} \left| \frac{1 - e^{-ixn_{k+1}}}{xn_{k+1}} - \frac{1 - e^{-ixn_k}}{xn_k} \right|.$$

Пусть

$$I(x) = \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \left| \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right| + \sum_{\{k: |x| n_k < 1\}} \left| \hat{\phi}_{n_{k+1}}(x) - \hat{\phi}_{n_k}(x) \right| = I_1(x) + I_2(x).$$

Зафиксируем теперь $x \in \mathbb{R}$ и пусть k_0 — первое такое число k, что $|x| n_k \ge 1$. Поскольку $\hat{\phi}_n(x)$ является четной функцией, мы можем без потери общности положить $x \ge 0$.

Непосредственно получаем

$$I_1(x) \le \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \frac{4}{|x| n_k}.$$

Так как последовательность $\{n_k\}$ лакунарна, существует константа $\beta > 1$ такая, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \beta$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Заметим также, что в суммировании I_1 член n_{k_0} является наименьшим таким членом, поскольку он является первым членом, удовлетворяющим условию $|x| n_k \ge 1$, и последовательность $\{n_k\}$ возрастает. С другой стороны, получаем

$$\frac{n_{k_0}}{n_k} = \frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}} \cdot \frac{n_{k_0+1}}{n_{k_0+2}} \cdot \frac{n_{k_0+2}}{n_{k_0+3}} \cdots \frac{n_{k-1}}{n_k} \le \frac{1}{\beta^k}.$$

Теперь имеем

$$I_1(x) \le \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \frac{4}{|x| n_k} = \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \frac{4 n_{k_0}}{|x| n_{k_0} n_k} = \frac{4}{|x| n_{k_0}} \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \frac{n_{k_0}}{n_k} \le 4 \sum_{\{k: |x| n_k \ge 1\}} \frac{1}{\beta^k},$$

так как $\frac{1}{|x|n_{k_0}} \le 1$ и $\frac{n_{k_0}}{n_k} = \frac{1}{\beta^k}$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{\beta}},$$

легко увидеть, что

$$I_1(x) \le C_1(\beta)$$

для некоторой константы $C_1(\beta) > 0$.

Отметим, что метод доказательства леммы 1 в статье С. Демира [2] можно использовать для доказательства того, что без потери общности

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \le \beta^2$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^+$. Поэтому, поскольку

$$\frac{n_{k_0}}{n_k} = \frac{n_{k_0}}{n_{k_0-1}} \cdot \frac{n_{k_0-1}}{n_{k_0-2}} \cdot \frac{n_{k_0-2}}{n_{k_0-3}} \cdots \frac{n_{k+1}}{n_k},$$

можно предположить, что

$$\frac{n_{k_0}}{n_k} = (\beta^2)^k$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^+$.

Чтобы оценить суммирование в I_2, определим сначала функцию F как

$$F(r) = \frac{1-e^{-ir}}{r},$$

тогда получаем $\hat{\phi}_n(x) = F(xn)$. Теперь по теореме о среднем значении существует константа $\xi \in (xn_k, xn_{k+1})$ такая, что

$$|F(xn_{k+1}) - F(xn_k)| = |F'(\xi)||xn_{k+1} - xn_k|.$$

Также легко проверить, что

$$|F'(x)| \le \frac{x+2}{x^2}$$

для $x > 0$.

Получаем

$$|F(n_{k+1}\theta) - F(n_k\theta)| = |F'(\xi)||xn_{k+1} - xn_k| \le \frac{\xi+2}{\xi^2}|x|(n_{k+1} - n_k) =$$

$$= \frac{|x|}{\xi}(n_{k+1} - n_k) + \frac{2|x|}{\xi^2}(n_{k+1} - n_k) \le \frac{1}{n_k}(n_{k+1} - n_k) + \frac{2|x|}{|x|^2 n_k^2}(n_{k+1} - n_k) \le$$

$$\le \frac{1}{n_k}(n_{k+1} + n_k) + \frac{2}{|x|n_k^2}(n_{k+1} + n_k).$$

Оценим последние члены по-отдельности:

$$\frac{1}{n_k}(n_{k+1} + n_k) \le \frac{|x|n_{k_0}}{|x|n_k}$$

и

$$\frac{2}{|x|n_k^2}(n_{k+1} + n_k) = \frac{2n_{k+1}}{|x|n_k^2} + \frac{2n_k}{|x|n_k^2} \le \frac{2n_{k_0}}{|x|n_k^2} + \frac{2}{|x|n_k} = \frac{2n_{k_0}n_{k_0}}{|x|n_{k_0}n_k^2} + \frac{2n_{k_0}}{|x|n_{k_0}n_k} \le \frac{2n_{k_0}^2}{n_k^2} + \frac{2n_{k_0}}{n_k}.$$

Имеем

$$I_2(x) = \sum_{\{k:|x|n_k<1\}} |F(xn_{k+1}) - F(xn_k)| \leq \sum_{\{k:|x|n_k<1\}} \left(\frac{2n_{k_0}}{n_k} + \frac{2n_{k_0}^2}{n_k^2} + \frac{2n_{k_0}}{n_k} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{\{k:|x|n_k<1\}} \left(2\beta^{2k} + 2(\beta^{2k})^2 + 2\beta^{2k} \right) \leq 2 \left(\frac{1}{1-\beta^2} + \frac{1}{1-\beta^4} + \frac{1}{1-\beta^2} \right) = C_2(\beta).$$

Таким образом, получаем

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) \leq C_1(\beta) + C_2(\beta) := C(\beta)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, что завершает доказательство. □

Пусть (x_n) — последовательность и элемент $\{c_k\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ такой, что $\|c_k\|_{l^\infty} \leq 1$. Зададим

$$\mathcal{G}(x_n) = \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right|.$$

Тогда для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ имеем

$$\mathcal{G}(\phi_n * f)(x) = \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (\phi_{n_{k+1}} * f(x) - \phi_{n_k} * f(x)) \right|,$$

где $\phi_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$.

Очевидно,

$$\mathcal{G}(\phi_n * f)(x) = \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}) * f(x) \right| = \|K * f(x)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)},$$

где $*$ обозначает свертку, т. е.

$$K * f(x) = \int K(x-y) \cdot f(y)\, dy.$$

Лемма 2. *Пусть (n_k) — лакунарная последовательность, тогда существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Имеем

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \|K * f(x)\|^2_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}) * f(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sup_j |\widehat{K_j * f}(x)|^2\, dx \quad \text{(по теореме Планшереля)} = \int_{\mathbb{R}} \sup_j |\widehat{K}_j(x)|^2 \cdot |\hat{f}(x)|^2\, dx \leq$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\, dx \quad \text{(по лемме 1)} = C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \quad \text{(по теореме Планшереля)} = C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Пусть* $(c_k) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ *и* $\|c_k\|_{\ell^\infty} \leq 1$, *рассмотрим ядерный оператор* $K : \mathbb{R} \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$, *заданный как*

$$K(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{j} c_k(\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)) \right\}_{j \in \mathbb{Z}^+},$$

где $\phi_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$. *Тогда* K *удовлетворяет условию Хёрмандера, когда последовательность* (n_k) *лакунарна.*

Доказательство. Достаточно показать, что для некоторой константы C

$$\int_{|x|>2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)} \, dx = \int_{|x|>2|y|} \sup_j |K(x-y) - K(x)| \, dx \leq C.$$

Пусть

$$K_j(x) = \sum_{k=0}^{j} c_k(\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)).$$

Для того чтобы это доказать, нам нужно оценить $K_j(x-y) - K_j(x)$ при $|x| > 2|y|$. Сначала рассмотрим случай $x > 0$, $y > 0$. Имеем

$$|K_j(x-y) - K_j(x)| \leq \sum_{k=1}^{j} |\Phi_{k+1}(x,y) - \Phi_k(x,y)|,$$

где

$$\Phi_k(x,y) = \frac{1}{n_k}\big[\chi_{[0,n_k]}(x-y) - \chi_{[0,n_k]}(x)\big].$$

Поэтому нам остается только оценить $\Phi_k(x,y)$, чтобы получить условие Хёрмандера. Поскольку $x > 2y$, имеем

$$\Phi_k(x,y) = \frac{1}{n_k}\left[\chi_{[y,y+n_k]}(x-y) - \chi_{[y,n_k]}(x)\right].$$

Если $x \in [y, y+n_k] \cap [y, n_k]$, то, очевидно, получаем $\Phi_k(x,y) = 0$. Но у нас $[y, n_k] \subset [y, y+n_k]$, поэтому можно предположить, что $x \in [y, y+n_k] - [y, n_k]$. Значит, достаточно рассмотреть интервал $[n_k, y+n_k]$. Таким образом, имеем

$$\Phi_k(x,y) = \frac{1}{n_k}\chi_{[n_k, y+n_k]}(x).$$

Предположим теперь, что $x \leq 0$, $y \leq 0$, тогда $y > x$, так как $|x| > 2|y|$. В этом случае имеем $\Phi_k(x,y) = 0$, поскольку $x \notin [y, y+n_k] \cup [y, n_k]$. То же самое верно и для $x \leq 0$, $y \geq 0$, поскольку отсюда следует $x < y$. Если $x \geq 0$, $y \leq 0$, то получаем ту же ситуацию, что и в первом случае. Таким образом, нам остается только оценить

$$\sum_{k=1}^{j} \Phi_k(x,y) = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{n_k}\chi_{[n_k, y+n_k]}(x).$$

С другой стороны, поскольку последовательность (n_k) лакунарна, имеем

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \alpha > 1.$$

Тогда существует константа $C(\alpha)$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{j}{}' \frac{1}{n_k} \leq \frac{C(\alpha)}{y},$$

где штрих в суммировании обозначает пропуск членов, для которых $n_k < y$. Таким образом, имеем

$$\int_{x>2y} \sup_j |K(x-y) - K(x)|\, dx = 2\int_{x>2y} \sup_j \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, y+n_k]}(x)\, dx \leq$$

$$\leq \sup_j \sum_{k=1}^{j}{}' \frac{1}{n_k} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n_k, y+n_k]}(x)\, dx = 2 \sup_j \sum_{k=1}^{j}{}' \frac{1}{n_k} y \leq 2C(\alpha),$$

и доказательство завершено. □

Теорема 1. *Пусть (n_k) — лакунарная последовательность. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * f)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

для всех $f \in H^1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * a)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C$$

для любого атома a с константой C, не зависящей от выбора a. Рассмотрим сначала 1-атом, центрированный в 0, с носителем $\mathrm{support}(a) \subset I_R$, где I_R — интервал длины $2R$, центрированный в 0. Поскольку

$$\|a\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |a(x)|^2\, dx = \int_{I_R} |a(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{|I_R|^2} \int_I dx = \frac{1}{|I_R|},$$

то получаем

$$\|a\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{|I_R|^{1/2}}.$$

По определению атома имеем также

$$\int_{I_R} a(x)\, dx = 0.$$

Отсюда

$$\int_{|x|\geq 4R} |\mathcal{G}(\phi_n * a)(x)|\, dx = \int_{|x|\geq 4R} \|K * a(x)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)}\, dx =$$

$$= \int_{|x|\geq 4R} \left| \int_{I_R} \|\{K(x-y) - K(x)\} \cdot a(y)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)}\, dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{I_R} |a(y)|\, dy \int_{|x|\geq 4|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)}\, dx \leq C(\alpha) \int_{I_R} |a(y)|\, dy \leq C(\alpha).$$

С другой стороны, ввиду неравенства Гёльдера

$$\int_{|x|<4R} |\mathcal{G}(\phi_n * a)(x)|\, dx = \int_{|x|<4R} \|K * a(x)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)}\, dx \leq$$

$$\leq \left(\int \|K * a(x)\|^2_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)} \right)^{1/2} 2|I_R|^{1/2} \leq C_1 \|a\|_{L^2(\mathbb{R})} 2|I_R|^{1/2} \quad \text{(по лемме 2)} \leq C,$$

отсюда получаем

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * a)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C$$

в обеих неравенствах для любого атома a, центрированного в начале координат.

Теперь пусть b — атом, центрированный в точке $c \in \mathbb{R}$. Тогда $a(x) = b(x - c)$ — атом, центрированный в 0. Более того, имеем

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * a)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C_1\|a\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

откуда, как и раньше, получаем

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * a)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * b)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\mathcal{G}(\phi_n * a)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C.$$

□

Пусть (X, β, μ, τ) — эргодическая, сохраняющая меру динамическая система, где (X, β, μ) — пространство со вполне σ-сигма конечной мерой. Рассмотрим обычные эргодические средние из эргодической теории

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\tau^i x).$$

Если рассмотреть характеристику пространства $H^1(\mathbb{R})$ максимальной функцией, то становится понятно, что $\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$ является L^1-нормой оператора типа свертки. Поэтому можно применить принцип переноса С. Демира [3] к теореме 1 и получить следующий результат с той же константой, что и в теореме 1.

Теорема 2. *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|\mathcal{G}(A_n f)\|_{L^1(X)} \le C\|f\|_{H^1(X)}$$

для всех $f \in H^1(X)$.

Нужно заметить, что в теореме 2 $H^1(X)$ обозначает эргодическое пространство Харди. Читателей, не знакомых с этими пространствами, мы отсылаем к работам Р. Койфмана и Г. Вайса [4] или Р. Кабальеро и А. де ла Торре [5].

Используем следующую широко известную теорему Д. Орнстейна [6] для доказательства нашего последнего результата.

Лемма 4. *Эргодическая максимальная функция*

$$f^*(x) = \sup_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left|f(\tau^i x)\right|$$

является интегрируемой тогда и только тогда, когда $[f(x)\log(x)]^+$ интегрируема, где g^+ — положительная часть g.

Наш последний результат дает условие интегрируемости осциляционного оператора $\mathcal{G}(A_n f)$.

Теорема 3. *Если $[f(x)\log(x)]^+$ интегрируема, то $\mathcal{G}(A_n f)$ интегрируема.*

Доказательство. В работе С. Демира [7] доказано, что

$$\|f\|_{H^1(X)} \leq \|f^*\|_{L^1(X)}.$$

Предположим, что $[f(x)\log(x)]^+$ интегрируема, тогда по лемме 4 получаем конечность $\|f^*\|_{L^1(X)}$ и, таким образом, конечность $\|f\|_{H^1(X)}$. Это означает, что $f \in H^1(X)$, и по теореме 2 существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{G}(A_n f)\|_{L^1(X)} \leq C\|f\|_{H^1(X)},$$

отсюда получаем

$$\|\mathcal{G}(A_n f)\|_{L^1(X)} < \infty,$$

что завершает доказательство. □

Литература

[1] Calderón A.P. *Ergodic theory and translation-invariant operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59** (2), 349–353 (1968).

[2] Demir S. *Variational inequalities for the differences of averages over lacunary sequences*, New York J. Math. **28**, 1099–1111 (2022).

[3] Demir S. *A generalizaition of Calderón transfer principle*, J. Comp. Math. Sci. **9** (5), 325–329 (2018).

[4] Coifman R., Weiss G. *Maximal Function and H^p Spaces Defined by Ergodic Transformations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **70** (6), 1761–1763 (1973).

[5] Caballero R., de la Torre A. *An atomic theory of ergodic H^p spaces*, Studia Math. **82** (1), 39–69 (1985).

[6] Ornstein D. *A remark on Birkhoff ergodic theorem*, Illinois J. Math. **15**, 77–79 (1971).

[7] Demir S. *H^p Spaces and Inequalities in Ergodic Theory*, Ph.D Thesis (University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, May 1999).

Сакин Демир

Университет Агры Ибрагима Чечена,
г. Агры, 04100, Турция,

`e-mail:` sakin.demir@gmail.com

S. Demir

Inequalities for the differences of averages on H^1 spaces

Abstract. Let (x_n) be a sequence and $\{c_k\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ such that $\|c_k\|_{\ell^\infty} \leq 1$. Define

$$\mathcal{G}(x_n) = \sup_j \left| \sum_{k=0}^{j} c_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right|.$$

Let now (X, β, μ, τ) be an ergodic, measure preserving dynamical system with (X, β, μ) a totally σ-finite measure space. Suppose that the sequence (n_k) is lacunary. Then we prove the following results:

(i) Define $\phi_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ on $\mathbb{R}$. Then there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|\mathcal{G}(\phi_n * f)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

for all $f \in H^1(\mathbb{R})$,

(ii) Let

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k x)$$

be the usual ergodic averages in ergodic theory. Then

$$\|\mathcal{G}(A_n f)\|_{L^1(X)} \leq C\|f\|_{H^1(X)}$$

for all $f \in H^1(X)$,

(iii) If $[f(x)\log(x)]^+$ is integrable, then $\mathcal{G}(A_n f)$ is integrable.

Keywords: difference sequence, ergodic Hardy space, ergodic Average, lacunary sequence.

Sakin Demir

Agri Ibrahim Cecen University,
Ağrı, 04100 Turkey,

`e-mail:` sakin.demir@gmail.com