

Краткое сообщение, представленное В.Г. Звягиным

Е.И. КОСТЕНКО

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ

Аннотация. Для начально-краевой задачи динамики термовязкоупругой среды типа Олдройта в плоском случае установлена нелокальная теорема существования слабого решения.

Ключевые слова: слабая разрешимость, нелинейно-запаздывающая жидкость, теорема существования.

УДК: 517.9

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-91-96

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$, $T > 0$, рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [\nu(\theta) \mathcal{E}(v)] - \operatorname{Div} [\kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds] + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0 \text{ в } Q_T, \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega, \quad v(t, x)|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + [\kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds] : \mathcal{E}(v) + g; \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$, $\theta(t, x)$ и $p(t, x)$ — вектор-функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, f — плотность внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\kappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\nu > 0$ — вязкость жидкости. Далее символ $A : B = a_{ij}b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Знак Div обозначает дивергенцию тензора

Поступила в редакцию 12.03.2024, после доработки 12.03.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Результаты получены в рамках выполнения госзадания Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZGU-2023-0007).

$C = (c_{ij}(t, x))$, т. е. вектор $\text{Div } C = \left(\frac{\partial c_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial c_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right)$. Функция I_2 определяется равенством $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$.

При $\theta = 0$ задача (1)–(4) является моделью Олдройта вязкоупругой среды [1], [2]. Добавление в модели Олдройта температуры θ в коэффициент вязкости приводит к появлению уравнения (3) баланса энергии ([3], с. 12). В случае $\theta = 0$, $\nu = \text{const}$ и $\varkappa = \text{const}$ нелокальная сильная разрешимость ($v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$) для модели Олдройта (1)–(4) установлена в [4]. В данной модели коэффициент запаздывания среды рассматривается нелинейным. Исследование моделей с нелинейным запаздыванием позволяет существенно расширить класс изучаемых сред, однако существенно осложняет математические исследования таких начально-краевых задач. В работе [5] приведены естественные ограничения на функцию $\varkappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : \varkappa(s)$ — определенная при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (\varkappa_1) \quad 0 < C_1 \leq \varkappa(s) \leq C_2 < \infty; \quad (\varkappa_2) \quad -s\varkappa'(s) \leq \varkappa(s) \text{ при } \varkappa'(s) \leq 0, \\ (\varkappa_3) \quad |s\varkappa'(s)| \leq C_3 < \infty. \end{aligned}$$

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

Заметим, для задачи (1)–(4) наличие переменной вязкости из-за недостаточной гладкости θ не позволяет установить ее сильную разрешимость. Нашей целью является доказательство слабой разрешимости задачи (1)–(4). Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (1)–(4) в правой части (3) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности (см., например, [6] и имеющуюся там библиографию). Исследованию других моделей термовязкоупругих сред посвящена обширная литература (см., например, [7]–[10] и имеющуюся там библиографию).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v : v \in C_0^\infty(\Omega), \text{div } v = 0\}$ соленоидальных вектор-функций. Пусть H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Слабое решение будет находиться в следующих функциональных пространствах:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{v : v \in L_2(0, T; V), \quad v' \in L_2(0, T; V^*)\}, \\ W_2 &= \left\{ \theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \quad v' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)), \quad 1 < p < \frac{4}{3} \right\} \end{aligned}$$

с нормами соответственно

$$\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T; V)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^*)}, \quad \|\theta\|_{W_2} = \|\theta\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))}.$$

Определение. Слабым решением задачи (1)–(4) называется пара (v, θ) , где $v \in W_1$, $\theta \in W_2$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V$ и $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и почти всех $t \in [0, T]$ соотношениям

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \int_{\Omega} \varkappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta', \phi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \chi \int_{\Omega} \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx = \int_{\Omega} (\nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)) : \phi dx + \\ + \int_{\Omega} \left(\kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds : \mathcal{E}(v), \phi \right) dx + \langle g, \phi \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \nu(\theta) < C_5$, κ удовлетворяет условиям $(\kappa_1) - (\kappa_3)$, $f \in L_2(0, T; V^*)$, $g \in L_1\left(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega)\right)$, $v_0 \in H$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ существует хотя бы одно слабое решение (1)–(4).

Доказательство данной теоремы проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (1)–(2) с фиксированной $\theta \in W_2$. На втором этапе доказывается разрешимость задачи (3)–(4) с заданной $v \in W_1$. Далее описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и на конечном этапе доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (1)–(4).

2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ФИКСИРОВАННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(2) при фиксированном $\theta \in W_2$. Слабое решение задачи (1)–(2) определим как функцию $v \in W_1$, удовлетворяющую (5) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 2. Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \nu(\theta) < C_5$, κ удовлетворяет условиям $(\kappa_1) - (\kappa_3)$, $f \in L_2(0, T; V^*)$, $v_0 \in H$, $\theta \in W_2$. Тогда задача (1)–(2) имеет, по крайней мере, одно слабое решение $v \in W_1$, для которого справедлива оценка

$$\|v\|_{W_1} \leq R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0, T; V^*)}, \|v_0\|_H). \quad (7)$$

Для доказательства данной теоремы перейдем к операторной трактовке рассматриваемой задачи. Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned} J : V \rightarrow V^*, \quad \langle Jv, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v \varphi dx; \\ D_1 : V \rightarrow V^*, \quad \langle D_1(v), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \int_0^t \kappa(I_2(v)) \mathcal{E}(v)(s, x) ds \mathcal{E}(\varphi) dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in V; \\ D_2 : V \rightarrow V^*, \quad \langle D_2 v, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in V; \\ K : L_4(\Omega) \rightarrow V^*, \quad \langle K(v), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\ L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, \quad L(v) &= (Jv' + D_1(v) + D_2 v, v|_{t=0}); \\ C : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V, \quad C(v) &= (K(v), 0). \end{aligned}$$

Тогда рассматриваемая задача (1)–(2) эквивалентна операторному уравнению

$$L(v) = C(v) + (f, v_0). \quad (8)$$

Для введенных выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 1.

1) Оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^*) \times V \rightarrow W_1$ непрерывен.

2) Оператор $C : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^*) \times V$ вполне непрерывен.

Теорема 3. Если $v \in W_1$ — решение операторного уравнения (8), то для него имеет место априорная оценка

$$\|v\|_{W_1} \leq C_6, \quad C_6 = C_6(T, \|f\|_{L_2(0, T; V^*)}, \|v_0\|_H).$$

Согласно лемме 1, теореме 3 и теории топологической степени Лере–Шаудера получаем справедливость теоремы 2.

3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ФИКСИРОВАННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу при фиксированных $\hat{\theta} \in W_2$ и $v \in W_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = \left[\nu(\hat{\theta}) \mathcal{E}(v) + \kappa(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds \right] : \mathcal{E}(v) + g; \quad (9)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (10)$$

Слабое решение задачи (9)–(10) определим как функцию $\theta \in W_2$, удовлетворяющую (6) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Теорема 4. Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \nu(\theta) < C_5$, κ удовлетворяет условиям $(\kappa_1) - (\kappa_3)$, $g \in L_1\left(0, T; H_p^{-2(1-\frac{1}{p})}(\Omega)\right)$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in W_2$, $v \in W_1$. Тогда при $1 < p < 4/3$ существует слабое решение задачи (9)–(10), для которого справедлива оценка

$$\|\theta\|_{W_2} \leq R_2, \quad R_2 = R_2\left(\|g\|_{L_1\left(0, T; H_p^{-2(1-\frac{1}{p})}(\Omega)\right)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_2(0, T; H)}^2\right).$$

Доказательство данной теоремы следует из результатов, приведенных в работе [5].

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Рассмотрим последовательность (v^n, θ^n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, определенную следующим образом. Пусть v^0, θ^0 означают начальные значения v_0, θ_0 для v и θ из (2) и (4). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда сначала находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - \text{Div}[\nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^{n+1})] - \text{Div}\left[\kappa(I_2(v^{n+1})) \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s, x) ds\right] + \nabla p = f; \quad (11)$$

$$\text{div } v^{n+1}(t, x) = 0 \text{ в } Q_T, \quad v^{n+1}(t, x)|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega, \quad v^{n+1}(t, x)|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0; \quad (12)$$

затем при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta^{n+1} = \\ & = \left[\nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^{n+1}) + \kappa(I_2(v^{n+1})) \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s, x) ds \right] : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta^{n+1}|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (14)$$

Отметим, что слабым решением задачи (11)–(12) называется функция $v^{n+1} \in W_1$, удовлетворяющая соотношению (5) и начальному условию $v^{n+1}(t, x)|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (13)–(14) — функция $\theta^{n+1} \in W_2$, удовлетворяющая соотношению (9) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n) , $n = 1, 2, \dots$, где v^n — решение задачи (11)–(12), а θ^n — решение задачи (13)–(14). Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n) . Для последовательности θ^n справедлива

Лемма 2. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$ при $1 < p < 4/3$.*

Рассмотрим теперь v^n . В силу оценки (7) получаем, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T, V)$, а $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ слабо сходится в $L_2(0, T, V^*)$. Покажем сначала, что v^n сходится к v , где v — решение задачи (12)–(13), при $\theta = \lim \theta^n$. Из сходимостей выше получаем, что v является решением (12)–(13). Для того, чтобы обосновать предельный переход в уравнении (14), нам понадобится более сильный результат о сходимости v^n .

Теорема 5. *Подпоследовательность v^n сильно сходится к v в $L_2(0, T, V)$.*

Покажем теперь, что полученное $\theta \in W_2$ является слабым решением (1)–(4). Из сильной сходимости $v^n \rightarrow v$ в $L_2(0, T, V)$ и θ^n в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, слабой сходимости θ^n к θ в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых (6). Следовательно, получили, что искомые v и θ являются решением задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eirich F.R. *Rheology: Theory and Applications* (Acad. Press, New York, 1955).
- [2] Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта*, Тр. МИАН СССР **179**, 126–164 (1988).
- [3] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей* (Наука, Новосибирск, 1983).
- [4] Агранович Ю.Я., Соболевский П.Е. *Исследование математических моделей вязкоупругих жидкостей*, ДАН УССР. Сер. А (10), 3–7 (1989).
- [5] Литвинов В.Г. *Движение нелинейно-вязкой жидкости* (Наука, М., 1982).
- [6] Blanchard D., Bruyere N., Guibe O. *Existence and uniqueness of the solution of a Boussinesq system with nonlinear dissipation*, Commun. Pure Appl. Anal. **12** (5), 2213–2227 (2013).
- [7] Consiglieri L. *Weak solution for a class of non-Newtonian fluids with energy transfe*, J. Math. Fluid. Mech. **2**, 267–293 (2000).
- [8] Звягин А.В., Орлов В.П. *Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова*, Изв. вузов. Матем. (9), 69–74 (2014).
- [9] Звягин А.В., Орлов В.П. *Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта*, Матем. заметки **97** (5), 681–698 (2015).
- [10] Звягин А.В. *Альфа-модель Навье–Стокса с вязкостью, зависящей от температуры*, Докл. РАН. Матем. Информ. Проц. управления **491**, 53–56 (2020).

Екатерина Игоревна Костенко

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: ekaterinarshina@mail.ru

*E.I. Kostenko***Weak solvability of one model of a nonlinearly retarded fluid in a thermal field**

Abstract. For the initial-boundary value problem of the dynamics of a thermoviscoelastic medium of Oldroyd type in the planar case, a nonlocal theorem regarding the existence of a weak solution is established.

Keywords: weak solvability, nonlinearly retarded fluid, existence theorem.

Ekaterina Igorevna Kostenko

Voronezh State University,

1 University Squ., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: ekaterinalarshina@mail.ru