

Краткое сообщение, представленное Т.Х. Расуловым

Э.Ф. АХМЕРОВА, М.А. РАХМАТЗОДА, Т.Г. АМАНГИЛЬДИН

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА $2m$ -ГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. В работе получена формула регуляризованного следа дифференциального оператора $2m$ -го порядка с квазидифференциальным возмущением и с периодическими граничными условиями.

Ключевые слова: регуляризованный след, собственное число, возмущенный оператор, резольвента.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-85-90

ВВЕДЕНИЕ

С начала 1950-х гг. на примере простейших дифференциальных операторов, в первую очередь оператора Штурма–Лиувилля, различными авторами были предложены многочисленные идеи, сформировались центральные направления исследования формул регуляризованных следов. Теория регуляризованных следов стала еще более бурно развиваться с появлением работ В.Б. Лидского, В.А. Садовниченко [1] и В.А. Садовниченко, В.В. Дубровского [2]. Наиболее полный обзор работ других авторов по теории регуляризованных следов линейных операторов приводится в [3]. Во всех задачах, какие бы методы не были рассмотрены, исследователи неизбежно сталкивались с оценкой резольвенты невозмущенного оператора, которая присутствует во второй и дальнейших поправках.

В этой работе предлагается новый метод получения формул регуляризованных следов для широкого класса самосопряженных операторов с дискретным спектром, без использования методов контурного интегрирования. В частности, предлагаемый метод был апробирован на примере негладких возмущений одного дифференциально оператора в частных производных на полосе [4]. В настоящей работе получена формула регуляризованного следа дифференциального оператора $2m$ -го порядка, действующего в пространстве $L^2[0, 2\pi]$ с периодическими граничными условиями. В качестве возмущения взят дифференциальный оператор $(2m - 2)$ -го порядка, порожденный квазидифференциальным выражением. Показано, что задача сводится к исследованию части резольвенты дифференциального оператора второго порядка, приводится алгоритм построения резольвенты дифференциального оператора $2m$ -го порядка.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть H^0 — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) и соответствующими собственными проекторами P_k , причем $\inf_{k \geq 1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$, $R^0(\mu)$ — резольвента этого оператора.

Рассмотрим возмущенный оператор $H = H^0 + V$. Если V — симметрический оператор и H^0 ограничен с H^0 гранью, меньшей единицы, то по теореме Като–Реллиха оператор H замкнут в области определения H^0 и имеет дискретный спектр. Пусть $d_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ и существует последовательность ρ_n такая, что

$$0 < \rho_n \leq d_n, \quad \inf_{n \geq 2} \rho_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\mu - \lambda_n| \leq \rho_n} \|R_n^0(\mu)V\| = 0,$$

где $R_n^0(\mu) = R^0(\mu) - P_n/(\lambda_n - \mu)$. Согласно рассуждениям работы [5], спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\mu = \lambda_n + P_n V P_n - P_n V R_n(\mu) V P_n, \quad (1)$$

где

$$R_n(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_n^0(\mu)V]^k R_n^0(\mu).$$

Выражение (1) представляет собой формулу $\det(A_n - \mu) = 0$ для спектра конечномерного оператора A_n в окрестности собственного числа λ_n , $|\mu - \lambda_n| < \rho_n$, при фиксированных n . Действительно, пусть $\varphi_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq \nu_n$, — собственные функции, соответствующие собственному числу λ_n кратности ν_n . Тогда $P_n h = \sum_{k=1}^{\nu_n} (h, \varphi_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)}$, и формула (1) распишется в виде

$$\begin{vmatrix} c_{11}^n + \lambda_n - \mu & c_{12}^n & \dots & c_{1\nu_n}^n \\ c_{21}^n & c_{22}^n + \lambda_n - \mu & \dots & c_{2\nu_n}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\nu_n 1}^n & c_{\nu_n 2}^n & \dots & c_{\nu_n \nu_n}^n + \lambda_n - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

где

$$c_{ij}^n = \left(V \varphi_i^{(n)}, \varphi_j^{(n)} \right) - \left(V R_n(\mu) V \varphi_i^{(n)}, \varphi_j^{(n)} \right).$$

Формулу (2) можем записать как $\det(A_n - \mu) = 0$, где $A_n = C_n + \lambda_n I$, $C_n = \{c_{ij}^n\}$, $1 \leq i, j \leq \nu_n$.

Используя тот факт, что для конечномерных операторов спектральный след равен матричному, из уравнения (2) легко следует представление

$$\nu_n \lambda_n + \text{sp} P_n V P_n - \gamma_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \mu_k^{(n)}, \quad (3)$$

где $\mu_k^{(n)}$ — собственные числа оператора H , $|\lambda_n - \mu_k^{(n)}| < \rho_n$,

$$\text{sp} P_n V P_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V \varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)} \right), \quad \gamma_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V R_n(\mu_k^{(n)}) V \varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)} \right).$$

Если возмущение V таково, что последовательность

$$\sum_{n=1}^N \gamma_n = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V R_n(\mu_k^{(n)}) V \varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (4)$$

то из формулы (3) непосредственно следует справедливость формулы регуляризованного следа оператора H :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \mu_k^{(n)} - \nu_n \lambda_n - \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V \varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)} \right) \right) = 0. \quad (5)$$

2. РЕЗОЛЬВЕНТА НЕВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

В пространстве $L^2[0, 2\pi]$ рассмотрим возмущенный оператор $H = H^0 + V$, порожденный дифференциальным выражением

$$(-1)^m \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}} + Vu = (-1)^m u^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m-1} (p_k u^{(k)})^{(k)} + qu,$$

где $p_k(x)$, $q(x)$ — вещественные функции, $p_k(x) \in W_2^k[0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $m \geq 2$, $q(x) \in L^2[0, 2\pi]$.

Область определения оператора H^0 состоит из функций $u(x) \in W_2^{2m}[0, 2\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi), \quad u''(0) = u''(2\pi), \quad \dots, \quad u^{2m-1}(0) = u^{2m-1}(2\pi). \quad (6)$$

Собственные значения оператора H^0 известны и состоят из чисел $\lambda_n = n^{2m}$, $n \geq 0$. Причем кратность собственных чисел равна двум при $n \geq 1$. Соответствующие ортонормированные собственные функции имеют вид

$$\varphi_1^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad \varphi_2^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}, \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi}.$$

Получим представление резольвенты $R^0(\mu) = (H^0 - \mu)^{-1}$ оператора H^0 . Для этого рассмотрим дифференциальный оператор L , порожденный дифференциальным выражением $lu = -u''$ и условиями $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$. Пусть $G(\lambda)$ — резольвента оператора L , $G(\lambda) = (L - \lambda)^{-1}$. Тогда справедлива

Лемма 1. *Ядро резольвенты $G(\lambda)$ оператора L имеет вид*

$$G(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x+t)}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda}(x-t)}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}\pi,$$

где

$$M(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}t, & t \leq x; \\ \cos \sqrt{\lambda}t \sin \sqrt{\lambda}x, & t > x. \end{cases}$$

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству в работе [6], где рассматриваются условия Дирихле.

Обозначим через $G_n(\lambda)$ приведенную резольвенту:

$$G_n(\lambda) = G(\lambda) - \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda},$$

где P_n — проекторы на соответствующие собственные подпространства. Тогда для ядра $G_n(x, t, \lambda)$ резольвенты $G_n(\lambda)$ имеет место представление

$$G_n(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x+t)}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda}(x-t)}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}\pi - \frac{1}{\pi} \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}(x-t)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Отсюда, переходя к пределу, нетрудно получить, что

$$G_n(x, t, \lambda_n) = M(x, t, \lambda_n) - \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(x+t)}{2\sqrt{\lambda_n}} + \frac{(x-t)}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}(x-t) + \frac{1}{4\pi\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}(x-t).$$

Оператор H^0 можем представить в виде $H^0 = L^m$, $m \geq 2$. Отсюда резольвента оператора H^0 имеет вид

$$R^0(\mu) = \mu^{\frac{1-m}{m}} \sum_{k=0}^{m-1} b_k G\left(\mu^{\frac{1}{m}} \varepsilon_k\right), \quad b_k = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_n)}, \quad (7)$$

где ε_k принимает все значения корня m -й степени из единицы,

$$\varepsilon_k = e^{2\pi ki/m}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Из соотношения (7) легко вычисляется ядро оператора $R_n^0(n^{2m})$:

$$R_n^0(x, t, n^{2m}) = \frac{1}{n^{2m-2}} \left[b_0 G(x, t, n^2) + \sum_{k=1}^{m-1} b_k G(x, t, n^{2m} \varepsilon_k) \right].$$

Лемма 2. При $|\mu - n^{2m}| \leq \frac{n^{2m-1}}{2}$ ядро оператора $R_n^0(\mu)$ ограничено:

$$|R_n^0(x, t, \mu)| \leq \frac{C}{n^{2m-1}}.$$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме из [6].

3. УСЛОВИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

Из леммы 2 непосредственным вычислением можно удостовериться, что справедлива

Теорема 1. Пусть V — дифференциальный оператор $(2m-2)$ -го порядка:

$$Vu = \sum_{k=1}^{m-1} (p_k u^{(k)})^{(k)} + qu,$$

$p_k(x)$, $q(x)$ — вещественные функции, $p_k(x) \in W_2^k[0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $q(x) \in L^2[0, 2\pi]$. Тогда при $|\mu - n^{2m}| \leq \rho_n = n^{2m-1}/2$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\mu - n^{2m}| \leq \rho_n} \|R_n^0(\mu)V\| = 0.$$

Замечание 1. Таким образом, из теоремы 1 следует, что оператор H замкнут в области определения оператора H^0 , т.е. области определения этих операторов совпадают и имеет место формула (1) для спектра возмущенного оператора.

Осталось выяснить условие на возмущение V , при котором имеет место формула (4), откуда непосредственно получим формулу регуляризованного следа вида (5). В качестве возмущения возьмем дифференциальный оператор $(m-1)$ -го порядка, т.е. рассмотрим дифференциальный оператор $H = H^0 + V$, порожденный дифференциальным выражением

$$(-1)^m u^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m-1} (p_k u)^{(k)} + qu, \quad (8)$$

где $p_k(x), q(x)$ — вещественные функции, $p_k(x) \in W_2^k[0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $m \geq 2$, $q(x) \in L^2[0, 2\pi]$.

Теорема 2. Пусть дифференциальный оператор порожден дифференциальным выражением (8) и периодическими граничными условиями (6). Тогда справедлива формула регуляризованного следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu_n^+ + \mu_n^- - 2n^{2m} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^r n^{2r} C_k^{2r} \int_0^{2\pi} p_k^{(k-2r)}(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dx \right] = 0.$$

Замечание 2. Здесь $\mu_n^{\pm}$ — собственные значения оператора H слева и справа от n^{2m} соответственно, $|\mu_n^{\pm} - n^{2m}| \leq n^{2m-1}/2$, $[x]$ — целая часть числа x , C_k^i — число сочетаний из k по i .

Замечание 3. В случае дифференциального оператора второго порядка, т. е. при $m = 1$, теорема 2 приобретает простой вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu_n^+ + \mu_n^- - 2n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dx \right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лидский В.Б., Садовничий В.А. *Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций*, Функци. анализ и его прилож. **1** (2), 52–59 (1967).
- [2] Садовничий В.А., Дубровский В.В. *Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о ζ -функции операторов*, Дифференц. уравнения **13** (7), 1264–1271 (1977).
- [3] Садовничий В.А., Подольский В.Е. *Следы операторов*, УМН **61** (5), 89–156 (2006).
- [4] Akhmerova E.F. *Regularized Trace Formula for One Partial Differential Operator*, Azerb. J. Math. **11** (1), 45–66 (2021).
- [5] Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов*, Докл. АН **388** (6), 731–733 (2003).
- [6] Ахмерова Э.Ф. *Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов 2m-го порядка*, Матем. заметки **90** (6), 833–844 (2011).

Эльвира Фангизовна Ахмерова

Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: eakhmerova@yandex.ru

Мехваршохи Анвар Рахматзода

Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: mehvarshoh9900@gmail.com

Тагир Газизович Амангильдин

Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: amangildintg@mail.ru

E.F. Akhmerova, M.A. Rahmatzoda, and T.G. Amangildin

Formula for regularized trace of $2m$ -order differential operator with periodic boundary conditions

Abstract. We obtain a regularized trace formula for $2m$ -order differential operator perturbed by a quasi-differential perturbation and with periodic boundary conditions.

Keywords: regularized trace, eigenvalue, perturbed operator, resolvent.

El'vira Fangizovna Akhmerova

*Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi str., Ufa, 450076 Russia,*

e-mail: eakhmerova@yandex.ru

Mehvarshohi Anvar Rahmatzoda

*Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi str., Ufa, 450076 Russia,*

e-mail: mehvarshoh9900@gmail.com

Tagir Gazizovich Amangildin

*Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi str., Ufa, 450076 Russia,*

e-mail: amangildintg@mail.ru