Известия вузов. Математика
2024, №5, с. 79–84
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Д.В. Маклаковым

М.М. АЛИМОВ

О ТОЧНЫХ ФОРМУЛАХ ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ ОБЛАСТИ ТЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Аннотация. В плоских задачах течения жидкости со свободными границами нередко возникает необходимость вычисления площади области течения. Даже если решение задачи найдено в точном виде, точно оценить эту площадь удается редко. Однако для некоторых задач точные формулы площади области течения были все-таки получены. Как правило, это удавалось сделать, если точное решение задачи выражалось в терминах рациональных функций. На конкретном примере задачи о капиллярных волнах на поверхности жидкости конечной глубины показано, что точные формулы для площади области течения могут быть получены и в случае, когда точное решение задачи выражается в терминах эллиптических функций.

Ключевые слова: потенциальное течение, комплексная переменная, эллиптическая функция, вычет.

УДК: 517.583: 532.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-79-84

Введение

Важной частью механики сплошных сред и механики жидкости, в частности, являются соотношения материального баланса. Поэтому в плоских задачах течений жидкости со свободными границами может понадобиться оценка площади области течения. Найти ее можно с помощью известных интегральных формул, но, к сожалению, последние редко удается довести то точных выражений. Тем не менее, имеется ряд работ, в которых удалось получить точное решение задачи со свободной границей, а также найти точные формулы площади области течения [1]–[3]. Их анализ позволяет говорить о некой общей методике получения таких формул, которая использует аппарат теории вычетов [4]. Важно отметить, что эта методика эффективна лишь при условии, что точное решение задачи получено в терминах рациональных функций.

Недавно полученное точное решение задачи о капиллярных волнах на поверхности жидкости конечной глубины [5] отличается той характерной особенностью, что площадь области течения непосредственно определяет величину некого параметра, входящего в основное граничное интегро-дифференциальное уравнение задачи. В терминах эллиптических функций

Поступила в редакцию 09.02.2024, после доработки 09.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации по соглашению №075-15-2020-931 в рамках программы развития НЦМУ "Рациональное использование запасов жидких углеводородов планеты".

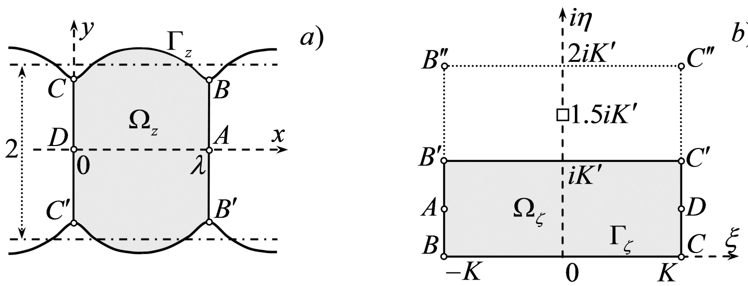

Рис. 1. Вид a) — физической плоскости z и b) — вспомогательной плоскости ζ.

было найдено точное решение граничного уравнения, но наличие интеграла в оценке значения этого параметра вызывает вопрос, в каком смысле решение будет точным? Формально можно оговориться, что решение будет точным в квадратурах. В то же время, если бы эту квадратуру удалось свести к точному выражению, решение можно было бы назвать точным без каких-либо оговорок.

Цель данной работы — на конкретном примере задачи [5] обобщить упомянутую методику получения точных формул площади области течения на случай, когда решение задачи со свободной границей выражается в замкнутом виде в терминах эллиптических функций.

Постановка задачи и ее решение

1. Рассмотрим плоскую задачу о капиллярных волнах на поверхности жидкости конечной глубины (см. рис. 1a)). Глубина бассейна с невозмущенной жидкостью выбрана за характерный размер, т.е. в безразмерном виде будет равна единице. Безразмерная длина волны равна λ. Для нашей цели будет удобнее симметрично продолжить область течения через горизонтальное дно бассейна (ось абсцисс x) и тем самым перейти к задаче о симметричной капиллярной волне в горизонтальном слое жидкости, который в невозмущенном виде имеет толщину два. На аналогию этих двух задач было указано в работе [6].

Точное решение задачи было построено в работе [5], дадим краткую сводку ее результатов. Элемент периодичности жидкого слоя обозначим через область $\Omega_z = ABCDC'B'$ (см. рис. 1a)). В плоскости вспомогательного комплексного переменного ζ ей отвечает область Ω_ζ, имеющая вид прямоугольника размером $2K \times K'$ (см. рис. 1b)). Тогда для функции $z(\zeta)$, реализующей конформное отображение $\Omega_\zeta \to \Omega_z$, имеют место формулы [5]

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{\alpha\beta}\mathrm{dn}^2(\zeta - 0.5iK'|m), \tag{1}$$

$$z(\zeta) = -\frac{1}{\alpha\beta}\left[E(\zeta - 0.5iK'|m) - E(K|m)\right], \tag{2}$$

где α и β — безразмерные действительные параметры задачи, а $E(\omega|m)$ — неполный эллиптический интеграл 2-го рода [7], [8]. Здесь $\mathrm{dn}(\zeta|m)$ — эллиптическая функция Якоби. Дополнительный параметр m этой функции, а также геометрические размеры прямоугольника Ω_ζ определяются величиной параметра Якоби q, $0 < q < 1$ ([7], [8]):

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right]^2, \quad K' = -\frac{K}{\pi}\ln q, \quad m = 16q\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n}\right]^4 \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right]^{-4}.$$

Для длины волны λ и параметра β имеют место точные формулы [5]

$$\lambda = \frac{2}{\alpha\beta}E(m), \quad \beta = \frac{E^2(m)}{K^2(1-m)}, \tag{3}$$

где $E(m)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода [7], [8].

Чтобы полностью решить проблему параметров, надо установить зависимость параметра α от основного вспомогательного параметра q. Для этого можно использовать тот факт, что площадь области течения S_Ω фиксирована (см. рис. 1*a*)) [5]:

$$S_\Omega = 2\lambda. \tag{4}$$

Зададимся вопросом: можно ли, учитывая формулы точного решения (1), (2), получить точную формулу площади области течения S_Ω? Тогда бы и зависимость параметра α от параметра q устанавливалась точным образом.

2. Чтобы ответить на поставленный вопрос, используем интегральную формулу [1]–[3]

$$S_\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{\partial\Omega_z} \overline{z}dz = \mathrm{Im}\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \overline{z(\zeta)}\,\frac{dz}{d\zeta}d\zeta, \tag{5}$$

где черта над объектом обозначает знак комплексного сопряжения.

Далее введем функцию Шварца $r(\zeta)$ функции $z(\zeta)$ ([9], [10]). Если обозначить значком $*$ комплексное сопряжение по параметрам, но не переменной ζ, функции $z(\zeta)$, то ее функцию Шварца $r(\zeta)$ можно определить так [5]:

$$\zeta = \xi: \quad r(\zeta) = z^*(\zeta), \tag{6}$$

чтобы на участке границы $\Gamma_\zeta = BC$ выполнялось равенство

$$\zeta \in \Gamma_\zeta: \quad r(\zeta) = \overline{z(\zeta)}. \tag{7}$$

С учетом формулы (6) из выражения (2) можно найти функцию

$$r(\zeta) = -\frac{1}{\alpha\beta}\left[E(\zeta + 0.5iK'|m) - E(K|m)\right] = z(\zeta)|_{\zeta\to\zeta+iK'}\,. \tag{8}$$

Отметим, что функции $z(\zeta)$ и $r(\zeta)$ однозначно определены во всей плоскости ζ.

Далее перепишем формулу (5) в виде

$$S_\Omega = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2\right), \tag{9}$$

где

$$J_1 = \mathrm{Im}\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} r(\zeta)\frac{dz}{d\zeta}d\zeta, \qquad J_2 = \mathrm{Im}\int\limits_{\partial\Omega_\zeta}\left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right]\frac{dz}{d\zeta}d\zeta. \tag{10}$$

3. Чтобы оценить величины J_1, J_2, проанализируем поведение функций $dz/d\zeta$, $z(\zeta)$ и $r(\zeta)$ в области Ω_ζ. Начнем с функции $dz/d\zeta$, имеющей вид (1). Согласно свойствам функции $\mathrm{dn}(\zeta|m)$ функция $dz/d\zeta$ представляет собой эллиптическую функцию на прямоугольнике периодов $BCC''B''$ размером $2K\times 2K'$. В этом прямоугольнике функция $dz/d\zeta$ имеет один полюс второго порядка в точке $\zeta = 1.5iK'$ (отмечена квадратиком на рис. 1*b*)) [7], [8]:

$$\zeta \sim 1.5iK': \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{\alpha\beta\left(\zeta - 1.5iK'\right)^2} + O(1). \tag{11}$$

Функция $z(\zeta)$ представляет собой эллиптический интеграл 2-го рода (см. формулу (2)) и соответственно является мероморфной функцией [4], [7]. Для наших целей достаточно найти ее полюса в прямоугольнике $BCC''B''$. Согласно оценке (11) функция $z(\zeta)$ имеет там один простой полюс в точке $\zeta = 1.5iK'$:

$$\zeta \sim 1.5iK' : \quad z(\zeta) = -\frac{1}{\alpha\beta\,(\zeta - 1.5iK')} + O\left(\zeta - 1.5iK'\right).$$

Согласно (8) функция $r(\zeta)$ получается из $z(\zeta)$ простым сдвигом всех особенностей последней на величину $(-iK')$. Поэтому в прямоугольнике $BCC''B''$ она имеет один простой полюс в точке $\zeta = 0.5iK'$:

$$\zeta \sim 0.5iK' : \quad r(\zeta) = -\frac{1}{\alpha\beta\,(\zeta - 0.5iK')} + O\left(\zeta - 0.5iK'\right). \tag{12}$$

На границах CC', BB' функция $dz/d\zeta$ удовлетворяет условиям

$$\zeta \in CC' \cup B'B : \quad \mathrm{Im}\,\frac{dz}{d\zeta} = 0, \tag{13}$$

что следует из вида областей Ω_z и Ω_ζ (см. рис. 1). В то же время непосредственно из вида (1) функции $dz/d\zeta$ следует условие более общего вида [7]

$$\xi = \pm K : \quad \mathrm{Im}\,\frac{dz}{d\zeta} = 0.$$

Интегрируя это выражение вдоль каждой из прямых $\xi = \pm K$ и еще раз учитывая вид области Ω_z, найдем граничные условия для функции $z(\zeta)$

$$\xi = -K : \quad \mathrm{Re}\, z(\zeta) = 0; \qquad \xi = K : \quad \mathrm{Re}\, z(\zeta) = \lambda. \tag{14}$$

Отсюда посредством формулы (8) можно найти и граничные условия для функции $r(\zeta)$:

$$\xi = -K : \quad \mathrm{Re}\, r(\zeta) = 0; \qquad \xi = K : \quad \mathrm{Re}\, r(\zeta) = \lambda. \tag{15}$$

Также для оценки величины J_2 необходимо прояснить, как соотносятся между собой функции $\overline{z(\zeta)}$ и $r(\zeta)$ на границе $C'B'$. Свойство зеркальной симметрии границ BC и $C'B'$ относительно оси абсцисс x (см. рис. 1a)) позволяет выписать соотношение

$$\overline{z(\zeta)|_{\zeta\in C'B'}} = z(\zeta)|_{\zeta\in BC} = z(\xi).$$

В то же время из формулы (8) следует

$$r(\zeta)|_{\zeta\in C'B'} = r(\xi + iK') = z(\xi + 2iK') = z(\zeta)|_{\zeta\in B''C''}.$$

В результате, привлекая еще и формулу (2), получим соотношение

$$\left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right]\Big|_{\zeta\in C'B'} = z(\xi) - z(\xi + 2iK') = \frac{1}{\alpha\beta} E(\zeta|m)\Big|_{\zeta=\xi-0.5iK'}^{\zeta=\xi+1.5iK'}. \tag{16}$$

Эллиптический интеграл 2-го рода $E(\zeta|m)$ является квазипериодической функцией, и одним из ее квазипериодов является именно $2iK'$ ([7]):

$$\forall\zeta : \quad E(\zeta + 2iK'|m) - E(\zeta|m) = i\Delta, \qquad \Delta = \frac{2K'E(m) - \pi}{K}. \tag{17}$$

Подставляя первое выражение (17) в (16), получим

$$\left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right]\Big|_{\zeta\in C'B'} = i\frac{\Delta}{\alpha\beta}. \tag{18}$$

4. Сначала оценим вклады всех участков границы $\partial\Omega_\zeta$ в величину J_2 (см. формулу (10)). Для участка границы BC с учетом (7) имеем

$$\int\limits_{BC} \left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right] \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0. \tag{19}$$

Для участков границы CC' и $B'B$ соответственно

$$\operatorname{Im} \int\limits_{CC' \cup B'B} \left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right] \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \int\limits_{CC' \cup B'B} \operatorname{Re}\left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right] \operatorname{Re}\left\{\frac{dz}{d\zeta}\right\} d\eta = 0, \tag{20}$$

где первое равенство следует из (13), а второе — из (14), (15).

Для участка границы $C'B'$ с учетом (18) получим

$$\int\limits_{C'B'} \left[\overline{z(\zeta)} - r(\zeta)\right] \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = i\frac{\Delta}{\alpha\beta} \int\limits_{C'B'} dz = i\frac{\lambda\Delta}{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Используя выражения (19)–(21), найдем оценку величины

$$J_2 = \frac{\lambda\Delta}{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Для оценки величины J_1 заметим, что в первом выражении формулы (10) стоит интеграл по замкнутому контуру $\partial\Omega_\zeta$. Он может быть вычислен точно с помощью теории вычетов [4]:

$$J_1 = \operatorname{Im}\left\{(2\pi i) \operatorname{res}\left[r(\zeta)\frac{dz}{d\zeta}\right]\bigg|_{\zeta=0.5iK'}\right\}. \tag{23}$$

Учитывая (1), (12) для функций $dz/d\zeta$ и $r(\zeta)$, имеем

$$\operatorname{res}\left[r(\zeta)\frac{dz}{d\zeta}\right]\bigg|_{\zeta=0.5iK'} = -\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)\bigg|_{\zeta=0.5iK'} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2} dn^2(0|m) = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}. \tag{24}$$

Подставляя выражение (24) в (23), найдем оценку величины

$$J_1 = \frac{2\pi}{\alpha^2\beta^2}. \tag{25}$$

5. Найденные оценки (22), (25) с учетом (9) позволяют получить точную формулу для площади области течения

$$S_\Omega = \frac{\pi}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\lambda\Delta}{2\alpha\beta}.$$

С целью определения параметра α подставим ее в (4). Получим соотношение

$$\frac{\pi}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\lambda\Delta}{2\alpha\beta} = 2\lambda.$$

Разрешая его относительно α с учетом (3) и (17), найдем точную формулу зависимости параметра α от параметра Якоби q:

$$\alpha = \frac{K^2(1-m)}{4E^2(m)}\left[\frac{\pi}{E(m)} + \frac{2K'E(m) - \pi}{K}\right]. \tag{26}$$

С учетом установленной точной формулы (26) полученное в работе [5] решение задачи может называться точным в полном смысле этого слова. Отметим, что в сравнении с точной формулой (26) численные расчеты, выполненные в [5] на основе интегральной формулы (5) с применением адаптивных квадратурных формул пакета MATLAB, оказались довольно точными: почти во всем интервале рассчетных значений параметра Якоби ошибка в оценке величины α была в двенадцатизначной цифре или еще меньше.

Заключение

Предложена методика получения точных формул для площади области течения в плоских задачах течения жидкости со свободными границами, для которых точное решение найдено в терминах эллиптических функций. Эффективность методики продемонстрирована на конкретном примере задачи о капиллярных волнах на поверхности жидкости конечной глубины. Этот пример характеризуется наличием у области течения зеркальной симметрии, однако методика может быть обобщена и на случай другой симметрии области течения.

Литература

[1] Tanveer S. *The effect of surface tension on the shape of the Hele-Shaw cell bubble*, Fhys. Fluids **29** (11), 3537–3548 (1986).

[2] Tanveer S. *New solutions for steady bubbles in a Hele–Shaw cell*, Fhys. Fluids **30** (3), 651–658 (1987).

[3] Алимов М.М., Скворцов Э.В. *Об оценках расходных характеристик в теории фильтрации и теплопроводности*, ПММ **53** (3), 462–468 (1989).

[4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функции комплексного переменного* (Наука, М., 1987).

[5] Алимов М.М. *Точное решение для капиллярных волн на поверхности жидкости конечной глубины*, Изв. вузов. Матем. (9), 58–75 (2023).

[6] Kinnersley W. *Exact large amplitude capillary waves on sheets of fluid*, J. Fluid Mech. **77** (2), 229–241 (1976).

[7] Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. *Курс современного анализа*, Т. 2 (ГТТ, М.-Л., 1934).

[8] Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (Наука, М., 1979).

[9] Davis P.J. *The Schwarz Function and its Applications* (Amer. Math. Soc., Washington, 1974).

[10] Howison S.D. *Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems*, Europ. J. Appl. Math. **3** (3), 209–224 (1992).

Марс Мясумович Алимов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Mars.Alimov@kpfu.ru

M.M. Alimov

Exact formulas for estimating the area of flow regions in free boundary problems

Abstract. An effective technique is proposed for obtaining exact formulas for estimating the area of flow regions in two-dimensional fluid flow problems with free boundaries, that allow an exact solution in terms of elliptic functions. The effectiveness of the technique is demonstrated using a specific example of the problem of capillary waves on the surface of a liquid of finite depth. This example is characterized by mirror symmetry of the flow region, but the technique can be generalized to the case of other symmetry of the flow region.

Keywords: potential flow, complex variable, elliptic function, residue.

Mars Myasumovich Alimov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Mars.Alimov@kpfu.ru