Известия вузов. Математика
2024, № 5, с. 63–78
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

У.А. ХОИТМЕТОВ, Т.Г. ХАСАНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩИХСЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Метод обратной задачи рассеяния применяется для интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с коэффициентами, зависящими от времени. Выводится эволюция данных рассеяния оператора Штурма–Лиувилля, коэффициент которого является решением уравнения Кортевега-де Фриза с зависящими от времени коэффициентами. Также предлагается алгоритм построения точных решений уравнения Кортевега-де Фриза с зависящими от времени коэффициентами сведением его к обратной задаче теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля. Приведены примеры, иллюстрирующие изложенный алгоритм.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Штурма–Лиувилля.

УДК: 517.957

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-63-78

Введение

Нелинейные эволюционные уравнения широко используются для демонстрации характеристик и структуры нелинейных волновых явлений, возникающих в физических науках. Исследователей всегда интересовало построение новых аналитических решений, важных для изучения нелинейных моделей, возникающих в различных областях науки и техники. Изучение солитонов и их физической природы представляет интерес для исследователей различных областей науки таких, как волоконная оптика, электрохимия, материаловедение, электромагнитная теория, океанотехника, гидродинамика, акустика, астрофизика, физика плазмы и др. [1]–[9].

Мы будем искать аналитические решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) с коэффициентами, зависящими от времени, с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Обратные спектральные задачи берут свое начало в работе [10]. Авторам удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения КдФ сведением ее к обратной задаче рассеяния для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля. Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Л.Д. Фаддеева [11], затем в работах В.А. Марченко [12], Б.М. Левитана [13] и др. В статье [14] П. Лакс показал универсальность МОЗР и обобщил уравнение КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ. Более подробно эта теория изложена в монографиях [12], [13], [15]–[21].

Поступила в редакцию 12.12.2022, после доработки 30.09.2023. Принята к публикации 20.03.2024.

В современной научной литературе большое внимание привлекают интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с источниками. Они имеют важные приложения [22]–[29] в физике плазмы, гидродинамике, физике твердого тела и т.д. Например, уравнение КдФ, которое содержит источник, рассматривалось в работе [23]. Такими уравнениями можно описать взаимодействие длинных и коротких капиллярно-гравитационных волн [24]. Кроме того, задача Коши в классе периодических функций для нелинейных уравнений с источниками, а также с дополнительными членами в различных постановках, изучались в работах [30], [31].

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или правой части какие-либо функционалы от решения, в частности, значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует отметить работы [32], [33].

Уравнения КдФ с коэффициентами, зависящими от времени, встречаются также в прикладной механике. Например, в работах [34], [35] система уравнений, описывающая распространение одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде, сводится к одному уравнению вида

$$u_\tau + \alpha(\tau) u u_\tau + \beta(\tau) u_{\tau\tau\tau} - \mu(\tau) u_{\tau\tau} + \left[\frac{k}{2\tau} + \delta(\tau)\right] u = 0.$$

В частности, при $\mu = 0, k = 1, \delta = 0$ показано, что при определенных условиях цилиндрические волны могут существовать в виде солитонов.

В [36] исследуется (1+1)-мерное геофизическое уравнение КдФ

$$u_t - \omega_0 u_x + \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{6} u_{xxx} = 0,$$

где ω_0 — параметр, $u = u(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$.

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения КдФ с коэффициентами, зависящими от времени, и источником вида

$$\begin{gathered} u_t + p(t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + q(t) u_x = 2\sum_{m=1}^{N} \xi_m(t) \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right), \\ -\varphi_m'' + u(x,t)\varphi_m = \lambda_m(t)\varphi_m, \quad m = \overline{1,N}, \\ -\psi_m'' + u(x,t)\psi_m = \lambda_m(t)\psi_m, \quad m = \overline{1,N}, \end{gathered} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

Здесь $p(t)$, $q(t)$, $\xi_m(t)$, $m = \overline{1,N}$, — заданные непрерывно дифференцируемые функции. Кроме того, начальная функция $u_0(x)$ обладают следующими свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty; \tag{3}$$

2) оператор $L(0) := -\dfrac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in R$, имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче $\varphi_m(x,t)$ является собственной функцией уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом $u(x,t)$, а $\psi_m(x,t)$ — линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, причем

$$W\left\{\varphi_m(x,t),\psi_m(x,t)\right\} = \varphi_m\frac{\partial\psi_m}{\partial x} - \psi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} = \omega_m(t) \neq 0, \quad m=\overline{1,N}, \tag{4}$$

где $\omega_m(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию

$$\int_0^t \omega_m(\tau)d\tau < -\lambda_m(0), \quad m=\overline{1,N},$$

при всех неотрицательных значениях t.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\left(|u(x,t)|+\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx<\infty, \quad j=1,2,3,\dots . \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t)$, $\psi_m(x,t)$, $x\in R$, $t>0$, $m=\overline{1,N}$, задачи (1)–(5), сведением ее к обратной задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля: $L(t) := -\dfrac{d^2}{dx^2}+u(x,t),\ x\in R,\ t>0.$

1. Необходимые сведения

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля

$$L(0)y := -y''+u_0(x)y = k^2y, \quad x\in R, \tag{6}$$

где потенциал $u_0(x)$ удовлетворяет условию (3). В этом разделе будут приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения, касающиеся прямой и обратной задач рассеяния для уравнения (6). Обозначим через $f(x,k)$, $g(x,k)$ решения Йоста уравнения (6) с асимптотиками

$$\begin{aligned} f(x,k) &= e^{ikx}+o(1), \quad x\to\infty\ (\operatorname{Im}k=0),\\ g(x,k) &= e^{-ikx}+o(1), \quad x\to-\infty\ (\operatorname{Im}k=0). \end{aligned} \tag{7}$$

При выполнении условия (3) такие решения существуют, определяются асимптотиками (7) однозначно. Кроме того, для решений $f(x,k)$, $g(x,k)$ справедливы представления ([13], с. 121)

$$\begin{aligned} f(x,k) &= e^{ikx}+\int_x^{\infty}K^+(x,z)e^{ikz}dz,\\ g(x,k) &= e^{-ikx}+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,z)e^{-ikz}dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь ядра $K^+(x,z)$, $K^-(x,z)$ являются вещественными функциями, связанными с потенциалом $u_0(x)$ соотношениями

$$u_0(x) = \mp 2\frac{d}{dx}K^{\pm}(x,x).$$

При вещественных k пары функций $\{f(x,k),\ f(x,-k)\}$ и $\{g(x,k),\ g(x,-k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (6), поэтому

$$f(x,k) = b(k)g(x,k)+a(k)g(x,-k),$$

$$g(x,k) = -b(-k)f(x,k)+a(k)f(x,-k).$$

Функции $r^+(k) = -\dfrac{b(-k)}{a(k)}$ и $r^-(k) = \dfrac{b(k)}{a(k)}$ называются коэффициентами отражения (правым и левым соответственно). Коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ и $r^+(k)$ обладают следующими свойствами ([13] с. 121).

1) При вещественных $k \neq 0$

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)}, \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} a(k) = \frac{1}{2ik} W\left\{g(x,k),\, f(x,k)\right\}, \ \ b(k) = \frac{1}{2ik} W\left\{f(x,k),\, g(x,-k)\right\}, \\ a(k) = 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k}\right), \quad b(k) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \pm\infty, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$W\left\{f(x,k),\, g(x,k)\right\} \equiv f(x,k)g'(x,k) - f'(x,k)g(x,k).$$

2) Функция $a(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$ и там имеет конечное число нулей $k_n = i\chi_n$ $(\chi_n > 0)$, $n = \overline{1,N}$, эти нули являются простыми, причем $\lambda_n = -\chi_n^2$ — собственное значение оператора $L(0)$. Кроме того, имеет место соотношение

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j = \overline{1,N}. \tag{11}$$

3) При вещественных $k \neq 0$ функция $r^+(k)$ непрерывна,

$$\overline{r^+(k)} = r^+(-k), \quad |r^+(k)| < 1, \quad r^+(k) = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \to \infty,$$

$$k^2\left[1 - |r^+(k)|^2\right]^{-1} = O(1), \quad |k| \to 0.$$

4) Функция $k(a(k) - 1)$, где

$$a(k) = \prod_{j=1}^{N} \frac{k - i\chi_j}{k + i\chi_j} \exp\left\{-\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(1 - |r^+(\xi)|^2\right)}{\xi - k} d\xi\right\}, \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

непрерывна и ограничена в $\operatorname{Im} k \geq 0$ и

$$(a(k))^{-1} = O(1), \quad |k| \to 0, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \quad \lim_{k \to 0} k a(k)\left(r^+(k) + 1\right) = 0, \quad \operatorname{Im} k = 0.$$

5) Функции

$$R^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{\pm}(k) e^{\pm ikx} dk$$

при каждом $a > -\infty$ удовлетворяют условию

$$(1 + |x|)\left|R^{\pm}(\pm x)\right| \in L^1(a, \infty).$$

Набор $\{r^+(k),\, \chi_1,\, \chi_2,\, \ldots, \chi_N,\, B_1,\, B_2,\, \ldots, B_N\}$ называется данными рассеяния для оператора $L(0)$. Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u_0(x)$, а обратная — в восстановлении по данным рассеяния потенциала $u_0(x)$ уравнения (6).

Ядро $K^+(x,y)$ в представлении (8) является решением интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко ([13], с. 130–132)

$$K^+(x,y) + F^+(x+y) + \int_x^{\infty} K^+(x,z)F^+(z+y)dz = 0 \ \ (y > x),$$

где

$$F^{+}(x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{+}e^{-\chi_j x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r^{+}(k)e^{ikx}dk, \tag{12}$$

$$\alpha_j^{+}=\frac{B_j}{i\dfrac{da(z)}{dz}\Big|_{z=i\chi_j}},$$

а $a(z)$ — аналитическое продолжение функции $a(k)$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}k>0$.

Лемма 1. *Пусть функции $y(x,\lambda)$ и $z(x,\mu)$ соответственно являются решениями*

$$Ly(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda),\quad Lz(x,\mu)=\mu z(x,\lambda).$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{dx}W\left\{y(x,\lambda),z(x,\mu)\right\}=(\lambda-\mu)\,y(x,\lambda)z(x,\mu).$$

Доказательство данной леммы исходит из простых расчетов.

Теорема 1 ([13], с. 231)**.** *Задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал $u_0(x)$.*

Теорема 2. *Для того чтобы набор величин $\left\{r^{+}(k),\,\chi_j,\,B_j,\,j=\overline{1,N}\right\}$ являлся данными рассеяния некоторого уравнения* (6) *с вещественным потенциалом $u_0(x)$, удовлетворяющим неравенству* (3)*, необходимо и достаточно выполнение условий* 1)–5)*.*

2. Эволюция данных рассеяния

Рассмотрим уравнение

$$u_t+p(t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)=G(x,t), \tag{13}$$

где

$$G(x,t)=-q(t)u_x+2\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right). \tag{14}$$

Для уравнения (13) будем искать пару Лакса [14] в виде

$$-\phi_{xx}+\left(u(x,t)-k^2\right)\phi=0, \tag{15}$$

$$\phi_t=p(t)\left(-u_x+4ik^3\right)\phi+p(t)\left(2u+4k^2\right)\phi_x+F(x,t). \tag{16}$$

Используя тождество $\phi_{xxt}=\phi_{txx}$ и учитывая равенства (13)–(16), получим

$$-F_{xx}+\left(u(x,t)-k^2\right)F=-G(x,t)\phi. \tag{17}$$

Положив $\phi(x,t)=g(x,k,t)$, ищем решение уравнения (17) в виде

$$F(x,t)=B(x)g(x,k,t)+C(x)g(x,-k,t).$$

Тогда для определения $B(x)$ и $C(x)$ получим систему уравнений

$$B'(x)g(x,k,t)+C'(x)g(x,-k,t)=0,$$

$$B'(x)g'(x,k,t)+C'(x)g'(x,-k,t)=G(x,t)g(x,k,t),$$

решение которой имеет вид

$$B(x) = -\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g(s,k,t)g(s,-k,t)G(s,t)ds,$$

$$C(x) = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g^2(s,k,t)G(s,t)ds.$$

Следовательно, используя выражение (14), уравнение (16) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial t} = p(t)\left(-u_x + 4ik^3\right)g(x,k,t) + p(t)\left(2u + k^2\right)\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial x} +$$
$$+\frac{q(t)g(x,k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds - \frac{q(t)\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds -$$
$$-\frac{2g(x,k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds +$$
$$+\frac{2\overline{g(x,k,t)}}{2ik}\int_{-\infty}^{x} g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds. \tag{18}$$

Переходя в равенстве (18) к пределу при $x \to \infty$, в силу (9), (10) и асимптотики решения Йоста выводим

$$\frac{da(k,t)}{dt} = \frac{q(t)a(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds + \frac{q(t)b(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds -$$
$$-\frac{2a(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds -$$
$$-\frac{2b(k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds, \tag{19}$$

$$\frac{db(-k,t)}{dt} = 8ik^3p(t)b(-k,t) + \frac{q(t)b(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}u_s(s,t)ds +$$
$$+\frac{q(t)a(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds -$$
$$-\frac{2b(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,k,t)\overline{g(s,k,t)}\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds -$$
$$-\frac{2a(-k,t)}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)\sum_{m=1}^{N}\xi_m(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_m(s,t)\psi_m(s,t)\right)ds. \tag{20}$$

Умножая (20) на $a(k,t)$ и вычитая из него равенство (19), умноженное на $b(-k,t)$, согласно (9) получим

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = 8ik^3p(t)r^+(k,t) - \frac{q(t)}{2ika^2(k,t)}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds -$$
$$-\frac{1}{2ika^2(k,t)}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)\sum_{n=1}^{N}\xi_n(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_n\psi_n\right)ds. \tag{21}$$

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds = 4k^2 a(k,t)b(-k,t), \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)\sum_{n=1}^{N}\xi_n(t)\frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_n\psi_n\right)ds = -ik^2 a(k,t)b(-k,t)\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n\xi_n}{k_n\left(k^2-k_n^2\right)}.$$

Доказательство. Сначала докажем (22). Используя формулу (9), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds = g^2(s,k,t)u(s,t)\Big|_{s=-\infty}^{s=+\infty} -$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty}\left(g''(s,k,t)+k^2 g(s,k,t)\right)g'(s,k,t)ds = 4k^2 a(k,t)b(-k,t).$$

Аналогично, используя равенство

$$2(k^2-k_n^2)\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x,k,t)\xi_n\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_n\psi_n\right)dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\xi_n(t)\Big\{\left[W\left\{g(x,k,t),\varphi_n(x)\right\}W\left\{g(x,k,t),\psi_n(x)\right\}\right]_{-R}^{R} +$$

$$+ (k^2-k_n^2)g^2(x,k,t)\varphi_n(x)\psi_n(x)\Big|_{-R}^{R}\Big\},$$

доказывается вторая часть леммы. □

Перейдем к нахождению эволюций собственных значений. Для этого рассмотрим кососимметрический оператор A наряду с оператором L:

$$A = p(t)\left(4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)\right).$$

Легко заметить, что

$$[L,A] \equiv LA - AL = -p(t)(u_{xxx}-6uu_x). \tag{23}$$

Оператор L зависит от времени t как параметр, поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{24}$$

Сравнивая формулы (23), (24) с (1), убедимся, что первое из уравнений (1) тождественно операторному соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L,A] + G. \tag{25}$$

Пусть $g_n(x,t) = g(x, i\chi_n(t), t)$ — нормированная собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению $\lambda_n(t) = \left(i\chi_n(t)\right)^2$, $n = \overline{1,N}$, т. е.

$$Lg_n = \lambda_n g_n.$$

Продифференцируем это равенство по t, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t}g_n + L\frac{\partial g_n}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}g_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n.$$

Отсюда и из (25) получим

$$[L,A]\,g_n + L\frac{\partial g_n}{\partial t} + Gg_n = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}g_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n$$

или

$$LAg_n - \lambda_n Ag_n + L\frac{\partial g_n}{\partial t} - \frac{\partial g_n}{\partial t}\lambda_n + Gg_n = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}g_n.$$

Таким образом,

$$(L-\lambda_n)\left(Ag_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}\right) + Gg_n = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}g_n.$$

Умножая это равенство на g_n и интегрируя по x на всей оси, учитывая нормированность g_n, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n\left(L-\lambda_n\right)\left(Ag_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2dx = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}.$$

Так как L — самосопряженный оператор, то первый интеграл равен нулю, поэтому

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2dx, \ \ n=\overline{1,N}.$$

Учитывая равенства $\lambda_n(t) = -\chi_n^2(t)$, последнее тождество можно переписать в виде

$$\frac{d\chi_n}{dt} = -\frac{1}{2\chi_n}\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2dx, \ \ n=\overline{1,N}.$$

Лемма 3. *Если G определяется равенством* (14), *то справедливы следующие тождества*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2dx = \xi_n\omega_n, \ \ n=\overline{1,N}. \tag{26}$$

Доказательство. Запишем тождество (26) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2dx = -\int_{-\infty}^{\infty} q(t)u_xg_n^2dx + 2\sum_{m=1}^{N}\xi_m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m\psi_m\right)g_n^2dx. \tag{27}$$

Сначала вычислим первый интеграл в правой части этого равенства:

$$-q(t)\int_{-\infty}^{\infty} u_xg_n^2dx = -q(t)ug_n^2\big|_{-\infty}^{\infty} + q(t)\int_{-\infty}^{\infty} 2ug_ng_n'dx = 2q(t)\int_{-\infty}^{\infty} ug_ng_n'dx.$$

Отсюда и используя тождество $L_n(t)g_n \equiv -g_n'' + ug_n = k_n^2g_n$, имеем

$$2q(t)\int_{-\infty}^{\infty}(k_n^2g_n + g_n'')g_n'dx = 2q(t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(k_n^2g_ng_g' + g_n''g_n'\right)dx = q(t)k_n^2g_n^2\big|_{-\infty}^{\infty} - q(t){g_n'}^2\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Теперь изучим второй интеграл правой части (27) в следующих случаях:

1) если $m \neq n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m\psi_m\right)g_n^2dx = 0;$$

2) если $m = n$, то

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_n\psi_n)g_n^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_ng_nW\left\{g_n,\psi_n\right\} + \psi_ng_nW\left\{g_n,\varphi_n\right\}\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_n^2W\left\{\varphi_n,\psi_n\right\}dx = \omega_n(t).$$

Отсюда и из (27) получим (26). □

Далее используя лемму 3, имеем

$$\frac{d\chi_n}{dt} = -\frac{\xi_n \omega_n}{2\chi_n}, \quad n = \overline{1, N}. \tag{28}$$

Отсюда получим

$$\chi_n^2(t) = \chi_n^2(0) - \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau,$$

т. е.

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(0) + \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau. \tag{29}$$

Поэтому собственные значения $\lambda_n(t)$ оператора $L(t)$ являются непрерывной функцией от параметра t.

Используя леммы 2, 3, из равенства (21) вытекает

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = \left(8ik^3 p(t) - 2ikq(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{ik\xi_n \omega_n}{\chi_n \left(k^2 + \chi_n^2\right)} \right) r^+(k,t). \tag{30}$$

Теперь перейдем к нахождению эволюции нормированных чисел B_n, $n = \overline{1, N}$, соответствующих собственным значениям λ_n, $n = \overline{1, N}$. Для этого перепишем равенство (18) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial t} = p(t) \left(-u_x + 4ik^3\right) g + p(t) \left(2u(x,t) + 4k^2\right) \frac{\partial g(x,k,t)}{\partial x} + \\
+ \frac{q(t) g(x,k,t)}{2ik} \Bigg[g(x,k,t) \overline{g(x,k,t)} u(x,t) - \\
- \int_{-\infty}^{x} u(s,t) \left(g'(s,k,t) \overline{g(s,k,t)} + g(s,k,t) \overline{g}'(x,k,t) \right) ds \Bigg] - \\
- \frac{q(t) \overline{g(x,k,t)}}{2ik} \left[g^2(x,k,t) u(x,t) - \int_{-\infty}^{x} 2g'(s,k,t) g(s,k,t) u(s,t) ds \right] - \\
- \frac{4g(x,k,t)}{2ik} \int_{-\infty}^{x} g(s,k,t) \overline{g(s,k,t)} \sum_{m=1}^{N} \xi_m(t) \frac{\partial}{\partial s} \left(\varphi_m(s,t) \psi_m(s,t)\right) ds + \\
+ \frac{4\overline{g(x,k,t)}}{2ik} \int_{-\infty}^{x} g^2(s,k,t) \sum_{m=1}^{N} \xi_m(t) \frac{\partial}{\partial s} \left(\varphi_m(s,t) \psi_m(s,t)\right) ds.
\end{gathered}$$

Используя равенство (11), полагая $k = k_n$ и учитывая асимптотику решения Йоста при $x \to +\infty$, а также приравнивая коэффициенты $e^{-\chi_n x}$, находим аналог уравнений Гарднера–Грина–Крускала–Миуры

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = \left(8\chi_n^3 p(t) + 2\chi_n q(t) + \frac{i\eta_n \xi_n \omega_n}{2\chi_n} \right) B_n(t), \quad n = \overline{1, N}. \tag{31}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если функции $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t), \psi_m(x,t)$, $m = \overline{1, N}$, $x \in R$, $t > 0$, являются решениями задачи* (1)–(5)*, то данные рассеяния $\left\{r^+(k,t),\, \lambda_n(t),\, B_n(t),\ n = \overline{1, N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (28), (30) *и* (31).

Замечание 1. Рассмотрим ядро интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

$$F^{+}(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{+}(t)e^{-\chi_j x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r^{+}(k,t)e^{ikx}dk$$

с данными рассеяниями из теоремы 2. Тогда данные

$$\left\{r^{+}(k,t),\chi_1(t),\ldots,\chi_N(t),B_1(t),\ldots,B_n(t)\right\}$$

удовлетворяют условиям 1)–5). Следовательно, согласно теореме 1 потенциал $u(x,t)$ в операторе $L(t)$ определяется однозначно.

Замечание 2. Полученные соотношения (28)–(31) полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$, и, тем самым, дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(5).

Пусть задана функция $u_0(x)\,(1+|x|)\in L^1(R)$. Тогда решения задачи (1)–(5) находятся с помощью следующего алгоритма.

1) Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$, получаем данные рассеяния $\left\{r^{+}(k),\,\chi_n,\,B_n,\,n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.
2) Используя теорему 2, находим данные рассеяния для оператора $L(t)$, $t>0$,
$$\left\{r^{+}(k,t),\,\chi_n(t),\,B_n(t),\,n=\overline{1,N}\right\}.$$
3) Нетрудно проверить, что набор $\left\{r^{+}(k,t),\,\chi_n(t),\,B_n(t),\,n=\overline{1,N}\right\}$, $t>0$, удовлетворяет условиям 1)–5). Поэтому в силу теоремы 2 существует потенциал $u=u(x,t), x\in R,\ t>0$, оператора $L(t)$, удовлетворяющий условию (5).
4) Используя метод, опирающийся на интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т. е. находим $u(x,t),\ x\in R,\ t>0$, из данных рассеяния, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi_m(x,t),\ x\in R,\ t>0$, уравнения
$$L(t)\varphi_m(x,t):=-\varphi_m''(x,t)+u(x,t)\varphi_m(x,t)=\lambda_m\varphi_m(x,t),\quad m=\overline{1,N},$$
а также $\psi_m(x,t),\ x\in R,\ t>0,$ — линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, удовлетворяющее (4).

Приведем пример, иллюстрирующий изложенный алгоритм.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered}u_t+p(t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)+q(t)u_x=2\xi_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1\psi_1\right),\\ -\varphi_1''(x,t)+u(x,t)\varphi_1(x,t)=\lambda(t)\varphi_1(x,t),\\ -\psi_1''(x,t)+u(x,t)\psi_1(x,t)=\lambda(t)\psi_1(x,t)\end{gathered}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=-\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x},\quad x\in R,$$

а также

$$W\left\{\varphi_m(x,t),\psi_m(x,t)\right\}=\omega_1(t)=\frac{\cos t}{2},$$
$$\xi_1(t)=1,$$

где

$$p(t)=-\frac{t}{16},\quad q(t)=\frac{t}{2}-\frac{i\eta_1\cos t}{4\sqrt{4-2\sin t}}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda_1(0) = -1, \quad r^+(k,0) = 0, \quad B_1(0) = 1.$$

В силу теоремы 2 имеем

$$\lambda_1(t) = -1 + \frac{1}{2}\sin t, \quad r^+(k,t) = 0, \quad B_1(t) = e^{2\mu(t)},$$

где

$$\mu(t) = 8\int_0^t p(\tau)d\tau + 2\int_0^t q(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{i\eta_1\omega_1}{2\chi_1}d\tau.$$

Подставляя эти данные в формулу (12) найдем ядро

$$F_+(x,t) = 2e^{-x+2\mu(t)}$$

интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y,t) + 2e^{\mu(t)}e^{-(x+y)} + 2e^{\mu(t)}e^{-y}\int_x^\infty K_+(x,s,t)e^{-s}ds = 0,$$

получим

$$K_+(x,y,t) = -\frac{2e^{2\mu(t)}e^{-(x+y)}}{1 + e^{2\mu(t)}e^{-2x}},$$

откуда и находим решение задачи Коши

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x,t) = -\frac{2\chi_1^2(t)}{\mathrm{ch}^2\left(\chi_1(t)x - t^2\right)} = -2\frac{1 - \frac{1}{2}\sin t}{\mathrm{ch}^2\left(x\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin t} - t^2\right)},$$

$$\varphi_1(x,t) = \frac{n(t)}{\mathrm{ch}\left(\chi_1(t)x - t^2\right)},$$

$$\psi_1(x,t) = \frac{\cos t}{4\chi_1(t)n(t)}\left\{\frac{\chi_1(t)x - z(t)}{\mathrm{ch}\left(\chi_1(t)x - t^2\right)} + \mathrm{sh}\left(\chi_1(t)x - t^2\right)\right\};$$

здесь

$$z(t) = \frac{i}{2}\eta(t)\cos t.$$

3. Нагруженное уравнение КдФ с источником в случае движущихся собственных значений оператора Штурма–Лиувилля

Перейдем теперь к рассмотрению нагруженного уравнения КдФ с источником в случае движущихся собственных значений оператора Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered} u_t + P(u(x_0,t))\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + Q(u(x_1,t))u_x = 2\sum_{m=1}^N \xi_m(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right), \\ -\varphi_m'' + u(x,t)\varphi_m = \lambda_m(t)\varphi_m, \quad m = \overline{1,N}, \\ -\psi_m'' + u(x,t)\psi_m = \lambda_m(t)\psi_m, \quad m = \overline{1,N}, \end{gathered} \tag{32}$$

где $P(y)$, $Q(z)$ — многочлены от y и z соответственно, а x_0, $x_1 \in R$, $\xi_m(t)$, $m = \overline{1,N}$, — заданные непрерывные функции. Уравнение (32) не является частным случаем уравнения (1), так как в (32) коэффициенты зависят от значения решения на многообразии меньшей размерности. Если в задаче (1)–(5) вместо уравнения (1) рассмотреть (32), то будет справедлива

Теорема 4. *Если функции* $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t)$, $\psi_m(x,t)$, $m=\overline{1,N}$, $x\in R$, $t>0$, *являются решениями задач* (32), (2)–(5), *то данные рассеяния* $\left\{r^+(k,t),\ \lambda_n(t),\ B_n(t),\ n=\overline{1,N}\right\}$ *оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:*

$$\frac{d\chi_n}{dt}=-\frac{\omega_n\xi_n(t)}{2\chi_n},\quad n=1,2,\ldots,N,$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3P\left(u(x_0,t)\right)-2ikQ\left(u(x_1,t)\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{ik\xi_n\omega_n}{\chi_n\left(k^2+\chi_n^2\right)}\right)r^+(k,t),$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3P\left(u(x_0,t)\right)+2\chi_nQ\left(u(x_1,t)\right)+\frac{i\xi_n\eta_n\omega_n}{2\chi_n}\right)B_n(t),\quad n=\overline{1,N}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения КдФ с нагруженными членами вида

$$\begin{gathered}u_t+\beta(t)u(0,t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)+\gamma(t)u(1,t)u_x=2\xi_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1\psi_1\right),\\ -\varphi_1''(x,t)+u(x,t)\varphi_1(x,t)=\lambda(t)\varphi_1(x,t),\\ -\psi_1''(x,t)+u(x,t)\psi_1(x,t)=\lambda(t)\psi_1(x,t)\end{gathered}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=-\frac{2}{\operatorname{ch}^2x},\quad x\in R,$$

а также

$$W\left\{\varphi_1(x,t),\psi_1(x,t)\right\}=\omega_1(t)=\frac{\cos t}{2},$$

$$\xi_1(t)=4\sin t,$$

где

$$\beta(t)=-\frac{\operatorname{ch}^2 2t}{16\chi_1^2(t)},\quad \gamma(t)=-\frac{\left(\chi_1-i\eta_1\sin 2t\right)\operatorname{ch}^2\left(\chi_1(t)-2t\right)}{4\chi_1^3(t)}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda_1(0)=-1,\quad r^+(k,0)=0,\quad B_1(0)=1.$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\lambda_1(t)=-1+\cos t,\quad r^+(k,t)=0,\quad B_1(t)=e^{2\mu(t)},$$

где

$$\mu(t)=8\int_0^t\beta(\tau)u(0,\tau)d\tau+2\int_0^t\gamma(\tau)u(1,\tau)d\tau+\int_0^t\frac{i\eta_1\omega_1\xi_1}{2\chi_1}d\tau.$$

Подставляя эти данные в формулу (12) найдем ядро

$$F_+(x,t)=2e^{-x+2\mu(t)}$$

интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y,t)+2e^{\mu(t)}e^{-(x+y)}+2e^{\mu(t)}e^{-y}\int_x^\infty K_+(x,s,t)e^{-s}ds=0,$$

получим

$$K_+(x,y,t)=-\frac{2e^{2\mu(t)}e^{-(x+y)}}{1+e^{2\mu(t)}e^{-2x}}.$$

Отсюда и находим решение задачи Коши

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x,t) = -\frac{2\chi_1^2(t)}{ch^2\left(\chi_1(t)x-2t\right)} = -\frac{2-\sin t}{\mathrm{ch}^2\left(x\sqrt{1-\dfrac{\sin t}{2}}-2t\right)},$$

$$\varphi_1(x,t) = \frac{p(t)}{\mathrm{ch}\left(\chi_1(t)x-2t\right)},$$

$$\psi_1(x,t) = \frac{\cos t}{4\chi_1(t)p(t)}\left\{\frac{\chi_1(t)x-z(t)}{\mathrm{ch}\left(\chi_1(t)x-2t\right)} + \mathrm{sh}\left(\chi_1(t)x-2t\right)\right\};$$

здесь

$$z(t) = \frac{i}{2}\eta(t)\cos t.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу вида

$$u_t + \alpha(t)u(0,t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right) + \beta(t)u(1,t)u_x = 2\gamma(t)u(2,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1\psi_1\right),$$
$$-\varphi_1''(x,t) + u(x,t)\varphi_1(x,t) = \lambda(t)\varphi_1(x,t),$$
$$-\psi_1''(x,t) + u(x,t)\psi_1(x,t) = \lambda(t)\psi_1(x,t)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = -\frac{2}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in R,$$

а также

$$W\left\{\varphi_1(x,t), \psi_1(x,t)\right\} = \omega_1(t) = \frac{\cos t}{2},$$

где

$$\alpha(t) = -\frac{t\,\mathrm{ch}^2\left(2t^2\right)}{16\chi_1^2(t)}, \quad \beta(t) = -\frac{t\,\mathrm{ch}^2\left(\chi_1(t)-2t^2\right)}{2\chi_1^2(t)}, \quad \gamma(t) = -\frac{2\chi_1\,\mathrm{ch}^2\left(2\chi_1(t)-2t^2\right)}{i\chi_1\eta_1\cos t}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda_1(0) = -1, \quad r^+(k,0) = 0, \quad B_1(0) = 1.$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\lambda_1(t) = -1 + \frac{1}{2}\sin t, \quad r^+(k,t) = 0, \quad B_1(t) = e^{2\mu(t)},$$

где

$$\mu(t) = 8\int_0^t \alpha(\tau)u(0,\tau)d\tau + 2\int_0^t \beta(\tau)u(1,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\gamma(\tau)i\eta_1\omega_1}{2\chi_1}u(2,\tau)d\tau.$$

Подставляя эти данные в формулу (12) найдем ядро

$$F_+(x,t) = 2e^{-x+2\mu(t)}$$

интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y,t) + 2e^{\mu(t)}e^{-(x+y)} + 2e^{\mu(t)}e^{-y}\int_x^\infty K_+(x,s,t)e^{-s}ds = 0,$$

получим

$$K_+(x,y,t) = -\frac{2e^{2\mu(t)}e^{-(x+y)}}{1+e^{2\mu(t)}e^{-2x}}.$$

Отсюда и находим решение задачи Коши

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x,t) = -\frac{2\chi_1^2(t)}{\operatorname{ch}^2\left(\chi_1(t)x - 2t^2\right)} = -2\frac{1-\dfrac{1}{2}\sin t}{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin t} - 2t^2\right)};$$

$$\varphi_1(x,t) = \frac{p(t)}{\operatorname{ch}\left(\chi_1(t)x - 2t^2\right)},$$

$$\psi_1(x,t) = \frac{\cos t}{4\chi_1(t)p(t)}\left\{\frac{\chi_1(t)x - z(t)}{\operatorname{ch}\left(\chi_1(t)x - 2t^2\right)} + \operatorname{sh}\left(\chi_1(t)x - 2t^2\right)\right\};$$

здесь

$$z(t) = \frac{i}{2}\eta(t)\cos t.$$

Таким образом, для уравнений КдФ с коэффициентами, зависящими от времени, а также нагруженными членами и источником вида (1) соответственно в случае движущихся собственных значений, амплитуда и скорость распространения солитона, в зависимости от коэффициентов, увеличится или уменьшится, чем классический солитон.

Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту за ряд полезных замечаний.

Литература

[1] Tariq K.U., Younis M., Rezazadeh H., Rizvi S.T.R., Osman M.S. *Optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity and fractional temporal evolution*, Mod. Phys. Lett. B **32** (26), 1850317 (2018), URL : https://doi.org/10.1142/S0217984918503177.

[2] Osman M.S. *One-soliton shaping and inelastic collision between double solitons in the fifth-order variable-coefficient Sawada–Kotera equation*, Nonlinear Dynam. **96**(12), 1491–1496(2019), URL : https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-019-04866-1.

[3] Osman M.S., Tariq K.U., Bekir A., Elmoasry A., Elazab N.S., Younis M., Abdel-Aty M. *Investigtion of soliton solutions with different wave structures to the* (2+1)*-dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation*, Commun. Theory. Phys. **72** (3), 1–7 (2020), URL : https://doi.org/10.1088/1572-9494/ab6181.

[4] Lu D., Tariq K.U., Osman M.S., Baleanu D., Younis M., Khater M.M.A. *New analytical wave structures for the* (3+1)*-dimensional Kadomtsev–Petviashvili and the generalized Boussinesq models and their applications*, Results Phys. **14**, 1–7 (2019), URL : https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102491.

[5] Seadawy A.R. *Nonlinear wave solutions of the three-dimensional Zakharov–Kuznetsov–Burgers equation in dusty plasma*, Phys. A: Stat. Mech. Appl. **439**, 124–131 (2015), URL : https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.10.045.

[6] Wazwaz A.M. *Multiple complex soliton solutions for integrable negative-order KdV and integrable negative-order modified KdV equations*, Appl. Math. Lett. **88**, 1–7 (2019), URL : https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.004.

[7] Al-Ghafri K.S., Rezazadeh H. *Solitons and other solutions of* (3+1)*-dimensional space-time fractional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation*, App. Math. Nonlinear Sci. **4** (2), 289–304 (2019), URL : http://dx.doi.org/10.2478/AMNS.2019.2.00026.

[8] Wazwaz A.M. *A* (2 + 1)*-dimensional time-dipendent Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation: Painlevé integrability and multiple soliton solutions*, Comput. Math. Appl. **79** (4), 1145–1149 (2020), URL : https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.08.025.

[9] Brzezinski D.W. *Review of numerical methods for NumILPT with computational accuracy assessment for fractional calculus*, Appl. Math. Nonlinear Sci. **3** (2), 487–502 (2018), URL : http://dx.doi.org/10.2478/AMNS.2018.2.00038.

[10] Gardner C., Greene I., Kruskal M., Miura R. *Method for solving the Korteweg–de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (19), 1095–1097 (1967), URL : https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095.

[11] Фаддеев Л.Д. *Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера*, Тр. МИАН СССР **73**, 314–336 (1964).

[12] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения* (Наук. думка, Киев, 1977).

[13] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля* (Наука, М., 1984).

[14] Lax P.D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21**, 467–490 (1968).

[15] Бхатнагар П. *Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах* (Мир, М., 1983).

[16] Лэм Дж. Л. *Введение в теорию солитонов* (Мир, М., 1983).

[17] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи* (Наука, М., 1980).

[18] Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (Мир, М., 1987).

[19] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов* (Наука, М., 1986).

[20] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (Мир, М., 1988).

[21] Новокшенов В.Ю. *Введение в теорию солитонов:* учеб. пособие (Ин-т компьют. исследов., М., 2002).

[22] Mel'nikov V.K. *Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source.*, Phys. Lett. A. **133** (9), 493–496 (1988), URL: https://doi.org/10.1016/0375-9601(88)90522-1.

[23] Mel'nikov V.K. *Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source*, Inverse Problems **6** (2), 233–246 (1990), URL: https://doi.org/10.1088/0266-5611/6/2/007.

[24] Leon J., Latifi A. *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves*, J. Phys. A.: Math. Gen. **23** (8), 1385–1403 (1990), URL: https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/8/013.

[25] Claude C., Latifi A., Leon J. *Nonlinear resonant scattering and plasma instability: an integrable model*, J. Math. Phys. **32** (12), 3321–3330 (1991), URL: https://doi.org/10.1063/1.529443.

[26] Zeng Y., Ma W.-X., Lin R. *Integration of the solution hierarchy with self-consistent source*, J. Math. Phys. **41** (8), 5453–5489 (2000), URL: https://doi.org/10.1063/1.533420.

[27] Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. *On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions*, Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb. **47** (2), 250–261 (2021), URL: http://doi.org/10.30546/2409-4994.47.2.250.

[28] Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. *Integration of the loaded Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics **42** (4), 1–15 (2022), URL: http://trans.imm.az/inpress/4204-02.pdf.

[29] Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. *On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions*, Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Матем. **38**, 19–35 (2021), URL: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.38.19.

[30] Хасанов А.Б., Матякубов М.М. *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членом*, ТМФ **203** (2), 192–204 (2020), URL: https://doi.org/10.4213/tmf9693.

[31] Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. *Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций*, Зап. научн. сем. ПОМИ **506**, 258–278 (2021), URL: http://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/znsl/v506/p258.pdf.

[32] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии* (Высш. шк., М., 1995).

[33] Кожанов А.И. *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **44** (4), 694–716 (2004).

[34] Lugovtsov A.A. *Propagation of nonlinear waves in a uhomogenous gas-liquid medium. Derivation of the wave equations close to Korteweg-de Vries approximation*, Appl. Mech. Tech. Phys. **50** (2), 327–335 (2009), URL: https://doi.org/10.1007/s10808-009-0044-8.

[35] Lugovtsov A.A. *Propagation of nonlinear waves in a gas-liquid medium. Exact and approximate analytical solutions of wave equations*, Appl. Mech. Tech. Phys. **51** (1), 44–50 (2010), URL: https://doi.org/10.1007/s10808-010-0007-0.

[36] Rizvi S.T.R., Seadawy A.R., Ashraf F., Younis M., Iqbal H., Baleanu D. *Lump and interaction solutions of a geophysical Korteweg-de Vries equation*, Results in Phys. **19**, 1–8 (2020), URL: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103661.

Умид Азадович Хоитметов

Ургенчский государственный университет,

ул. Х. Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,

e-mail: x_umid@mail.ru

Темур Гафуржонович Хасанов

Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,

e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru

U.A. Hoitmetov and T.G. Khasanov

Integration of the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients in the case of moving eigenvalues of the Sturm–Liouville operator

Abstract. The inverse scattering method is used to integrate the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients. We derive the evolution of the scattering data of the Sturm–Liouville operator whose coefficient is a solution of the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients. An algorithm for constructing exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients is also proposed; we reduce it to the inverse problem of scattering theory for the Sturm–Liouville operator. Examples illustrating the stated algorithm are given.

Keywords: inverse scattering method, Korteweg-de Vries equations, Sturm–Liouville operator.

Umid Azadovich Hoitmetov

Urgench State University,
14 H. Alimdjan str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: x_umid@mail.ru

Temur Gafurjonovich Khasanov

Urgench State University,
14 H. Alimdjan str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru