

И.В. САПРОНОВ

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

Аннотация. Изучается интегральное уравнение Вольтерра I рода с интегральным оператором порядка n , особенностью и достаточно гладким ядром в некотором банаховом пространстве с весом. Оно сводится к интегро-дифференциальному уравнению, в левой части которого стоят два слагаемых. Первому из них соответствует уравнение, для которого строится в явном виде многопараметрическое семейство решений. Для второго слагаемого получаем уравнение с оператором, норма которого в некотором банаховом пространстве сколь угодно мала вблизи нуля. Такое расщепление интегрального оператора позволяет в виде сходящихся рядов строить частное и общее решения интегро-дифференциального уравнения в соответствующем банаховом пространстве. Таким образом, при определенных ограничениях на операторный пучок, соответствующий данному интегральному оператору, ведется построение многопараметрического семейства решений для исходного интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор, операторный пучок, спектр.

УДК: 517.922

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-47-62

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на немалое число публикаций, посвященных изучению указанных уравнений, данная тематика остается актуальной и представляет известный интерес. Существенное развитие эта теория получила в серии работ [1]–[3], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и II рода, скалярные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида. В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в бесконечномерных банаховых пространствах [4]–[11].

Целью данной работы является исследование интегрального уравнения Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в некотором банаховом пространстве с весом. Интегральный оператор соответствующего интегрального уравнения имеет порядок, равный n .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $B([0, \delta], E)$ ограниченных на $[0, \delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{B([0, \delta], E)} = \sup_{0 \leq x \leq \delta} \|\psi(x)\|_E.$$

Следуя Н.А. Магницкому [3], рассмотрим семейство банаховых пространств $M_{q, \nu}^{k, \alpha}$, $q \geq 1$, $\nu < 0$,

$$M_{q, \nu}^{k, \alpha} = \left\{ \varphi(x) : \varphi^{(i)}(x) = x^{\alpha - qi} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \omega_i(x), \omega_i \in B([0, \delta], E), \|\varphi\|_{M_{q, \nu}^{k, \alpha}} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\psi_i\|_{B([0, \delta], E)} \right\}.$$

Назовем порядком интегрального оператора целое неотрицательное число n такое, что ядро $K(x, t)$ является $n+1$ раз непрерывно дифференцируемым по совокупности переменных в окрестности точки $(0, 0)$, причем в самой точке все частные производные ядра до порядка $n-1$ включительно обращаются в нуль, а некоторая частная производная порядка n отлична от нуля (это определение дано Н.А. Магницким в его работе [3]).

Рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad (1)$$

с интегральным оператором n -го порядка. Ядро $K(x, t)$ является заданной функцией со значениями в $L(E)$, $\varphi(x) = \vartheta^{(n)}(x)$ ($\vartheta(x) \in M_{q, \nu}^{n, -q}$) является искомой функцией со значениями в E .

Пусть существуют пределы

$$C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x, x)}{x^{nq}}, \quad C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)K'_t(x, x)}{x^{(n-1)q}}, \quad C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x, x)}{x^{(n-2)q}}, \dots, \\ C_n = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)^n K_{t^n}^{(n)}(x, x)}{x^0},$$

причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} .

Это означает, что при достаточно малом x

$$\left\| \frac{K(x, x)}{x^{nq}} - C_0 \right\|_{L(E)} < \bar{\varepsilon}, \quad \left\| \frac{(-1)K'_t(x, x)}{x^{(n-1)q}} - C_1 \right\|_{L(E)} < \bar{\varepsilon}, \quad \dots, \quad \left\| (-1)^n K_{t^n}^{(n)}(x, x) - C_n \right\|_{L(E)} < \bar{\varepsilon}.$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Лемма 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) = \vartheta^{(n)}(x)$, где $\vartheta(x) \in M_{q, \nu}^{n, -q}$, тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение

$$A_{\eta_n} \vartheta + D_{\eta_n} \vartheta = f(x) \quad (2)$$

имеет решение $\vartheta(x) \in M_{q, \nu}^{n, -q}$, где

$$A_{\eta_n} \vartheta = \sum_{p=0}^{n-1} C_p x^{(n-p)q} \vartheta^{(n-p-1)}(x) + C_n \int_0^x \vartheta(t) dt + \eta_n(x, \vartheta(x)), \quad (3)$$

$$D_{\eta_n} \vartheta = \sum_{p=0}^{n-1} [(-1)^p K_{t^p}(x, x) - C_p x^{(n-p)q}] \vartheta^{(n-p-1)}(x) + \int_0^x [(-1)^n K_{t^n}(x, t) - C_n] \vartheta(t) dt - \eta_n(x, \vartheta(x)),$$

$\eta_n(x, \vartheta)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже.

Доказательство леммы 1 проводится интегрированием по частям $\int_0^x K(x, t) \vartheta^{(n)}(x) dx$, используя свойства пространства $M_{q, \nu}^{n, -q}$.

Перейдем к нахождению $\eta_n(x, \vartheta(x))$. Введем оператор

$$\Pi(\vartheta)(x) = (x^q \vartheta(x))', \quad \Pi_{M_{q, \nu}^{n, -q} \rightarrow M_{q, \nu}^{n-1, -q}}, \quad \Pi^n(\vartheta) = \Pi(\Pi^{n-1}(\vartheta)).$$

Методом математической индукции несложно получить формулу

$$(x^q \vartheta(x))^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta)(x) \right]^{(m-k-1)} + \frac{1}{x^{(m-1)q}} \Pi^m(\vartheta)(x),$$

тогда

$$\vartheta^m(x) = \sum_{k=1}^m C_m^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(m-k)} + \frac{1}{x^q} \sum_{k=1}^{m-1} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta)(x) \right]^{(m-k-1)} + \frac{1}{x^{mq} \Pi^m(\vartheta)(x)}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в выражение (3), получаем

$$\begin{aligned} A_{\eta_n}(\vartheta) &= \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^{(n-p-1)q}} \Pi^{n-p-1}(\vartheta)(x) + C_{n-1} [x^q \vartheta(x)] + C_n \int_0^x \vartheta(x) dx + \\ &+ \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \sum_{k=1}^{n-p-1} C_{n-p-1}^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} + \\ &+ \sum_{p=0}^{n-3} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \sum_{k=1}^{n-p-2} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} + \eta_n(x, \vartheta(x)). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \eta_n(x, \vartheta(x)) &= - \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \sum_{k=1}^{n-p-1} C_{n-p-1}^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} - \\ &- \sum_{p=0}^{n-3} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \sum_{k=1}^{n-p-2} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$A_{\eta_n}(\vartheta) = \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^{(n-p-1)q}} \Pi^{n-p-1}(\vartheta)(x) + C_{n-1} [x^q \vartheta(x)] + C_n \int_0^x \vartheta(x) dx.$$

Рассмотрим уравнение

$$A_{\eta_n}(\vartheta) = 0. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть операторный пучок

$$B_\nu = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1-p} (-1)^p \nu^p - C_n \frac{1}{\nu}$$

имеет характеристическое число $\nu < 0$, которому соответствует собственный вектор e_0 и цепочка присоединенных векторов $e_1, e_2, \dots, e_l$, тогда для уравнения (5) существует $l + 1$ решений вида

$$\vartheta_m(x) = \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_m + \bar{e}_{m-1} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} + \dots + \bar{e}_0 \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^m \right], \quad m = 0, 1, \dots, l. \quad (6)$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $m < n - 1$.

Подставим (6) в уравнение (5) и используя формулы

$$\Pi^p(\vartheta)(x) = (-1)^p \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{d=0}^p C_p^d \nu^{p-d} \left[\sum_{k=0}^m \bar{e}_{m-k} \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^k \right]^{(d)}$$

при $p \leq m$,

$$\Pi^{m+z}(\vartheta)(x) = (-1)^{m+z} \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{d=0}^m C_{m+z}^d \nu^{m+z-d} \left[\sum_{k=0}^m \bar{e}_{m-k} \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^k \right]^{(d)}$$

при $m + z = m + 1, \dots, m + z = n - 1$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^m C_{n-1-p} (-1)^p e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{d=0}^p C_p^d \nu^{p-d} \left[\sum_{k=d}^m \bar{e}_{m-k} k(k-1) \times \dots \times (k-d+1) \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{k-d} \right] + \\ & + \sum_{p=m+1}^{n-1} C_{n-1-p} (-1)^p e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{d=0}^m C_p^d \nu^{p-d} \left[\sum_{k=d}^m \bar{e}_{m-k} k(k-1) \times \dots \times (k-d+1) \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{k-d} \right] + \\ & + C_{n-1} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[\sum_{k=0}^m \bar{e}_{m-k} \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^k \right] - \\ & - C_n \left[\sum_{d=0}^m \bar{e}_{m-d} \sum_{k=0}^d (-1)^k e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \frac{d!}{(d-k)!} \left(\frac{1}{\nu} \right)^{k+1} \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{d-k} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнявая коэффициенты в (7) при $e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^k$, $k = m, m-1, \dots, 0$, имеем

$$B_\nu \bar{e}_0 = 0 \quad \text{при } k = m;$$

$$B_\nu \bar{e}_1 + m B'_\nu \bar{e}_0 = 0 \quad \text{при } k = m-1;$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_\nu^{(z)}}{z!} m(m-1) \times \dots \times (m-z+1) \bar{e}_0 + \frac{B_\nu^{(z-1)}}{(z-1)!} (m-1)(m-2) \times \dots \times (m-z+1) \bar{e}_1 + \\ & + \frac{B_\nu^{(z-2)}}{(z-2)!} (m-2)(m-3) \times \dots \times (m-z+1) \bar{e}_2 + \dots + B'_\nu (m-z+1) \bar{e}_{z-1} + B_\nu \bar{e}_z = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

при $k = m - z$ ($z = 2, 3, \dots, m - 1$);

$$\frac{B_\nu^{(m)}}{m!} m \times \dots \times 1 \bar{e}_0 + \frac{B_\nu^{(m-1)}}{(m-1)!} (m-1)(m-2) \times \dots \times 1 \bar{e}_1 + \dots + B'_\nu \bar{e}_{m-1} + B_\nu \bar{e}_m = 0 \quad \text{при } k = 0.$$

Решая последовательно систему уравнений (8), получаем $\bar{e}_k = \frac{m!}{(m-k)!} e_k$. $\square$

Замечание 1. Пусть операторный пучок

$$B_\nu = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1-p} (-1)^p \nu^p - C_n \frac{1}{\nu}$$

имеет характеристическое число $\nu + i\mu$ ($\nu < 0$), которому соответствует собственный вектор $e_0 = e_1^0 + ie_2^0$ и цепочка присоединенных векторов $e_k = e_1^k + ie_2^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$). Тогда для уравнения (5) существует $2(q+1)$ решений вида

$$\begin{aligned} \vartheta_m^1(x) &= \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{k=0}^m \left[\cos \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_1^k - \sin \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_2^k \right] \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{m-k}, \\ \vartheta_m^2(x) &= \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{k=0}^m \left[\cos \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_2^k + \sin \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_1^k \right] \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{m-k}, \quad m = 0, \dots, q. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\bar{e}_1^k + i\bar{e}_2^k = \frac{m!}{(m-k)!} (e_1^k + ie_2^k)$, поэтому $\bar{e}_1^k = \frac{m!}{(m-k)!} e_1^k$, $\bar{e}_2^k = \frac{m!}{(m-k)!} e_2^k$, $m = 0, \dots, q$.

Замечание 2. Пусть для операторного пучка B_ν действительные части характеристических чисел $\nu_j + i\mu_j$ отрицательны ($\nu_i < 0$, $j = 1, 2, \dots, m$). Каждому характеристическому числу $\nu_j + i\mu_j$ соответствует собственный вектор $e_1^{0,j} + ie_2^{0,j}$ и цепочки присоединенных векторов $e_1^{k,j} + ie_2^{k,j}$ ($k = 1, 2, \dots, q_j$). Тогда для уравнения (5) существует k линейно независимых решений вида (9), принадлежащих пространству $M_{q,\nu}^{n,-q}$, где $\nu^* \leq \nu < 0$, $\nu^* = \max_{1 \leq j \leq m} \{\nu_j\}$,

$$k = 2 \sum_{j=1}^m (q_j + 1).$$

Замечание 3. Пусть операторный пучок B_ν имеет m отрицательных характеристических чисел $\nu_i < 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $\nu_1^* = \max_{1 \leq i \leq m} \nu_i$, и p комплексных характеристических чисел $\nu_{m+k} + i\mu_{m+k}$ ($k = 1, \dots, p$), $\nu_{m+k} < 0$, $\nu_2^* = \max_{1 \leq k \leq p} \{\nu_{m+k}\}$. Каждому характеристическому числу ν_i соответствует собственный вектор e_0^i и цепочки присоединенных векторов $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{q_i}^i$. Каждому характеристическому числу $\nu_{m+k} + i\mu_{m+k}$ соответствует собственный вектор $e_1^{0,m+k} + ie_2^{0,m+k}$ и цепочки присоединенных векторов $e_1^{z,m+k} + ie_2^{z,m+k}$ ($z = 1, 2, \dots, \bar{q}_k$). Тогда для уравнения (5) строится многопараметрическое семейство решений вида (6) или (9), принадлежащих пространству $M_{q,\nu}^{n,-q}$, где $\nu^* \leq \nu < 0$, $\nu^* = \max\{\nu_1^*, \nu_2^*\}$,

и общее решение уравнения будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(x) = & \sum_{i=1}^m \sum_{d=0}^{q_i} C_{i,d} \frac{1}{x^q} e^{\nu_i \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_d^i + \bar{e}_{d-1}^i \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} + \dots + \bar{e}_0^i \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^d \right] + \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{d=0}^{\bar{q}_i} C_{i,d}^1 \frac{1}{x^q} e^{\nu_{m+i} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{k=0}^d \left[\cos \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_1^{k,m+i} - \sin \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_2^{k,m+i} \right] \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{d-k} + \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{d=0}^{\bar{q}_i} C_{i,d}^2 \frac{1}{x^q} e^{\nu_{m+i} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \sum_{k=0}^d \left[\cos \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_2^{k,m+i} + \sin \left(\mu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right) \bar{e}_1^{k,m+i} \right] \left(\int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \right)^{d-k}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Операторы A_{η_n} и D_{η_n} действуют из $M_{q,\nu}^{n,-q}$ в $M_{q,\nu}^{1,0}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|D_{\eta_n}\|_{M_{q,\nu}^{n,-q} \rightarrow M_{q,\nu}^{1,0}} < \varepsilon$ при $0 \leq x \leq \delta$.

Доказательство. Если $\vartheta(x) \in M_{q,\nu}^{n,-q}$, то

$$\begin{aligned} \vartheta^{(n-k-1)}(x) & \in M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}, \\ x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x) & \in M_{q,\nu}^{k+1,0} \in M_{q,\nu}^{1,0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \int_0^x \vartheta(t) dt & \in M_{q,\nu}^{n+1,0} \in M_{q,\nu}^{1,0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x))^{(m)} = \frac{1}{x^{mq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \omega_m(x), \quad m = 0, 1, \dots, k+1, \quad (10)$$

$$(\vartheta^{(n-k-1)}(x))^m = \frac{1}{x^{q(n-k)+mq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_m(x), \quad m = 0, 1, \dots, k+1.$$

Докажем неравенство

$$\|x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq d_1(n, q) \|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}}.$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{mq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \omega_m(x) & = (x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x))^m = \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{(n-k)q})^{(i)} (\vartheta^{(n-k-1)}(x))^{(m-i)} = \\ & = \sum_{i=0}^m C_m^i [(n-k)q((n-k)q-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)q-i+1)] x^{(n-k)q-i} \frac{1}{x^{q(n-k)+(m-i)q}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_{m-i}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Положим в (11) $m = 0$, тогда $e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \omega_0(x) = e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_0(x)$.

Следовательно, $\|\omega_0(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} = \|\bar{\omega}_0(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} \leq \|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}}.$

Если $m = 1$, то

$$\frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \omega_1(x) = \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_1(x) + (n-k)q x^{q-1} \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_0(x).$$

Отсюда

$$\omega_1(x) = \bar{\omega}_1(x) + (n-k)qx^{q-1}\bar{\omega}_0(x),$$

$$\|\omega_1(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} \leq \|\bar{\omega}_1(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} + nq\delta^{q-1}\|\bar{\omega}_0(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} \leq (1+nq\delta^{q-1})\|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x^{(n-k)q}\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} &= \max \left\{ \|\omega_0(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}}, \|\omega_1(x)\|_{B_{([0,\delta],E)}} \right\} \leq \\ &\leq (1+nq\delta^{q-1})\|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}} = d_1(n,q)\|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}}. \end{aligned}$$

Теперь используя свойства пространства $M_{q,\nu}^{n,\alpha}$ и равенство

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[(-1)^k K_{t^k}(x, x) x^{(k-n)q} - C_k \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} \left\| [(-1)^k K_{t^k}(x, x) x^{(k-n)q} - C_k] x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x) \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} &\leq \bar{\varepsilon} \|x^{(n-k)q} \vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \\ &\leq \bar{\varepsilon} d_1(n, q) \|\vartheta^{(n-k-1)}(x)\|_{M_{q,\nu}^{k+1,-q(n-k)}} \leq \bar{\varepsilon}_1 \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon} d_1(n, q). \end{aligned}$$

При $k = n$ получим

$$\left\| \int_0^x [K_{t^n}(x, t) - C_n] \vartheta(t) dt \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \bar{\varepsilon} \left\| \int_0^x \vartheta(t) dt \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \bar{\varepsilon} d_2(\nu) \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{0,-q}} \leq \bar{\varepsilon}_2 \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon} d_2(\nu).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{p=0}^{n-1} [(-1)^p K_{t^p}(x, x) - C_p x^{(n-p)q}] \vartheta^{(n-p-1)}(x) + \int_0^x [(-1)^n K_{t^n}(x, t) - C_n] \vartheta(t) dt \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{p=0}^{n-1} [(-1)^p K_{t^p}(x, x) - C_p x^{(n-p)q}] \vartheta^{(n-p-1)}(x) \right\|_{M_{q,\nu}^{1,\nu}} + \left\| \int_0^x [(-1)^n K_{t^n}(x, t) - C_n] \vartheta(t) dt \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \\ &\leq (n\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2) \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \end{aligned}$$

при достаточно малом $\delta > 0$ ($0 \leq x \leq \delta$).

Оценим норму

$$C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)}$$

в пространстве $M_{q,\nu}^{1,0}$, $p = 0, 1, \dots, n-2$; $k = 1, 2, \dots, n-p-2$.

Пусть

$$\Pi(\vartheta) = [x^q \vartheta]', \quad \Pi^k(\vartheta) = \Pi(\Pi^{k-1}(\vartheta)), \quad \vartheta(x) \in M_{q,\nu}^{n,-q}, \quad x^q \vartheta(x) \in M_{q,\nu}^{n,0},$$

$$(x^q \vartheta(x))' \in M_{q,\nu}^{n-1,-q}, \quad \Pi^k(\vartheta) \in M_{q,\nu}^{n-k,-q}, \quad \left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \in M_{q,\nu}^{n-k,-qk-1},$$

$$\left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \in M_{q,\nu}^{p+2,-q(n-p-2)-1}, \quad x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \in M_{q,\nu}^{1,0}.$$

Оценим норму $\Pi(\vartheta)$ в пространстве $M_{q,\nu}^{n-1,-q}$. Заметим, что

$$(x^q \vartheta(x))^{(i)} = \frac{1}{x^{qi}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} z_i(x), \quad \vartheta^{(i)}(x) = \frac{1}{x^{q+iq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{z}_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{iq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} z_i(x) &= (x^q \vartheta(x))^{(i)} = C_i^0 x^q \frac{1}{x^{q+iq}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{z}_i(x) + \\ &+ \sum_{m=1}^i C_i^m q(q-1) \times \dots \times (q-(m-1)) x^{q-m} \frac{1}{x^{q+(i-m)q}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{z}_{i-m}(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_i(x) &= \bar{z}_i(x) + \sum_{m=1}^i q(q-1) \times \dots \times (q-(m-1)) x^{m(q-1)} \bar{z}_{i-m}(x), \\ \|z_i(x)\|_E &\leq \|\bar{z}_i(x)\|_E + \sum_{m=1}^i \|C_i^m q(q-1) \times \dots \times (q-(m-1)) x^{m(q-1)} \bar{z}_{i-m}(x)\|_E \leq \\ &\leq \|\bar{z}_i(x)\|_E + d(q, n) \sum_{m=1}^i \|\bar{z}_{i-m}(x)\|_E \leq d_2(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}, \\ \|x^q \vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,0}} &= \max_{0 \leq i \leq n} \|z_i(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq d_2(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Pi(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-1,-q}} = \|(x^q \vartheta(x))'\|_{M_{q,\nu}^{n-1,-q}} \leq \|x^q \vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,0}} \leq d_2(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует

$$\|\Pi^k(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-k,-q}} = \|(x^q \Pi^{k-1}(\vartheta))'\|_{M_{q,\nu}^{n-k,-q}} \leq \|x^q \Pi^{k-1}(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-k+1,0}} \leq d_2(q, n) \|\Pi^{k-1}(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-k+1,-q}},$$

поэтому

$$\|\Pi^k(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-k,-q}} \leq d_2^k(q, n) \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} = d_3(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}.$$

Проводя вычисления, аналогичные при выводе формулы (12), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right\|_{M_{q,\nu}^{p+2,-q(n-p-2)-1}} &\leq \left\| \left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right\|_{M_{q,\nu}^{n-k,-kq-1}} \leq \\ &\leq d_4(q, n) \|\Pi^k(\vartheta)\|_{M_{q,\nu}^{n-k,-q}} \leq d_5(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,n}^{n,-q}}. \end{aligned}$$

Оценим норму $x^{(n-p)q-q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)}$ в пространстве $M_{q,\nu}^{1,0}$:

$$x^{(n-p)q-q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} = e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} u_0 = x^{q(n-p)-q} \frac{1}{x^{q(n-p-2)+1}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{u}_0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x^{q-1} \bar{u}_0(x), \\ \|u_0(x)\|_E &= \|x^{q-1} \bar{u}_0(x)\|_E \leq \delta^{q-1} \|\bar{u}_0(x)\|_E \leq \delta^{q-1} \|\bar{u}_0(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq \\ &\leq \delta^{q-1} \left\| \left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^{(k)}(\vartheta) \right\|_{M_{q,\nu}^{p+2,-q(n-p-2)-1}} \leq \delta^{q-1} d_5(q, n) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,n}^{n,-q}} \leq \bar{\varepsilon}_1 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,n}^{n,-q}}. \end{aligned}$$

Значит, $\|u_0(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{\varepsilon}_1 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,n}^{n,-q}}$ при достаточно малом δ ,

$$\begin{aligned} & \left(x^{(n-p)q-q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \right)' = \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} u_1(x) = \\ & = [(n-p)q-q] x^{(n-p)q-q-1} \frac{1}{x^{q(n-p-2)+1}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar{u}_0(x) + x^{(n-p)q-q} \frac{1}{x^{q(n-p-2)+q+1}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar{u}_1(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u_1(x) = [(n-p)q-q] x^{2(q-1)} \bar{u}_0(x) + x^{q-1} \bar{u}_1(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} \|u_1(x)\|_E &= \|[(n-p)q-q] x^{2(q-1)} \bar{u}_0(x) + x^{q-1} \bar{u}_1(x)\|_E \leq \|[(n-p)q-q] x^{2(q-1)} \bar{u}_0(x)\|_E + \\ &+ \|x^{q-1} \bar{u}_1(x)\|_E \leq C_1(n, q) \delta^{2(q-1)} \|\bar{u}_0(x)\|_E + \delta^{q-1} \|\bar{u}_1(x)\|_E \leq \\ &\leq (C_1(n, q) \delta^{2(q-1)} + \delta^{q-1}) \left\| \left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right\|_{M_{q,\nu}^{p+2,-q(n-p-2)-1}} \leq \\ &\leq (C_1(n, q) \delta^{2(q-1)} + \delta^{q-1}) d_5(q, n) \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \leq \bar{\varepsilon}_2 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \end{aligned}$$

при достаточно малом δ .

Отсюда следует

$$\|u_1\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{\varepsilon}_2 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}.$$

Следовательно,

$$\left\| x^{(n-p)q-q} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = \max \left\{ \|u_0\|_{B([0,\delta],E)}, \|u_1\|_{B([0,\delta],E)} \right\} \leq \varepsilon_1 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}},$$

где $\varepsilon_1 = \max\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$.

Значит,

$$\left\| \sum_{p=0}^{n-3} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \sum_{k=1}^{n-p-2} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}$$

при достаточно малом δ ($0 \leq x \leq \delta$).

Оценим в пространстве $M_{q,\nu}^{1,0}$

$$\sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \sum_{k=1}^{n-p-1} C_{n-p-1}^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)}.$$

Если $\vartheta(x) \in M_{q,n}^{n,-q}$, то

$$x^q \vartheta(x) \in M_{q,\nu}^{n,0}, \quad (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \in M_{q,\nu}^{p+1+k,-q(n-p-1-k)},$$

$$x^{(n-p)q} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \in M_{q,\nu}^{p+1+k,q(k+1)},$$

$$\left(\frac{1}{x^q} \right)^k x^{(n-p)q} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \in M_{q,\nu}^{p+1+k,k(q-1)} \in M_{q,\nu}^{1,0};$$

$$\|(x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)}\|_{M_{q,\nu}^{p+k+1,-q(n-p-1-k)}} \leq \|x^q \vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,0}} \leq C_2(n, q) \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| x^{(n-p)q} \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = \\ & = \left\| (-1)^k q(q+1) \times \dots \times (q+(k-1)) x^{q(n-p-1)-k} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \\ & \leq C_3(n, q) \left\| x^{q(n-p-1)-k} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}. \end{aligned}$$

Так как

$$x^{q(n-p-1)-k} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \in M_{q,\nu}^{1,0}, \quad (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \in M_{q,\nu}^{p+1+k, -q(n-p-1-k)},$$

то

$$\frac{1}{x^{qi}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} w_i(x) = \sum_{m=0}^i C_i^m \left(x^{q(n-p-1)-k} \right)^{(m)} \left((x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right)^{(i-m)}, \quad i = 0, 1.$$

Пусть $i = 0$, тогда

$$e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} w_0(x) = x^{q(n-p-1)-k} \frac{1}{x^{q(n-p-1-k)}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{w}_0(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & w_0(x) = x^{k(q-1)} \bar{w}_0(x), \quad \|w_0\|_{B([0,\delta],E)} \leq \delta^{k(q-1)} \|\bar{w}_0\|_{B([0,\delta],E)} \leq \\ & \leq \delta^{k(q-1)} \|x^q \vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{-q(n-p-k-1)}} \leq \delta^{k(q-1)} C_2(n, q) \|\vartheta\|_{q,\nu}^{n,-q} \leq \varepsilon_2 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}, \quad \varepsilon_2 = \delta^{k(q-1)} C_2(n, q) \end{aligned}$$

при достаточно малом δ .

Если $i = 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} w_1(x) = [q(n-p-1)-k] x^{q(n-p-1)-k-1} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} + x^{q(n-p-1)-k} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-k)} = \\ & = [q(n-p-1)-k] x^{q(n-p-1)-k-1} \frac{1}{x^{q(n-p-k-1)}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{w}_0(x) + x^{q(n-p-1)-k} \frac{1}{x^{q(n-p-k)}} e^{\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{w}_1(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_1(x) = [q(n-p-1)-k] x^{(k+1)(q-1)} \bar{w}_0(x) + x^{k(q-1)} \bar{w}_1(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} & \|w_1\|_{B([0,\delta],E)} \leq C_4(n, q) \delta^{(k+1)(q-1)} \|\bar{w}_0\|_{B([0,\delta],E)} + \delta^{k(q-1)} \|\bar{w}_1\|_{B([0,\delta],E)} \leq \\ & \leq (C_4(n, q) \delta^{(k+1)(q-1)} + \delta^{k(q-1)}) \left\| (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{p+k+1, -q(n-p-k-1)}} \leq \\ & \leq (C_4(n, q) \delta^{(k+1)(q-1)} + \delta^{k(q-1)}) C_2(n, q) \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \leq \varepsilon_3 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \end{aligned}$$

при достаточно малом $\delta > 0$, $\varepsilon_3 = (C_4(n, q) \delta^{(k+1)(q-1)} + \delta^{k(q-1)}) C_2(n, q)$;

$$\left\| x^{q(n-p-1)-k} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = \max \left\{ \|w_0\|_{B([0,\delta],E)}, \|w_1\|_{B([0,\delta],E)} \right\} \leq \varepsilon_4 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}},$$

где $\varepsilon_4 = \max\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Отсюда вытекает

$$\left\| x^{(n-p)q} \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq C_3(n, q) \varepsilon_4 \|\vartheta(x)\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \sum_{k=1}^{n-p-1} C_{n-p-1}^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\
\|D_{\eta_n} \vartheta\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} & \leq \left\| \sum_{p=0}^{n-1} [(-1)^p K_{t^p}(x, x) - C_p x^{(n-p)q}] \vartheta^{(n-p-1)}(x) + \int_0^x [(-1)^n K_{t^n}(x, t) - C_n] \vartheta(t) dt \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + \\
& + \left\| \sum_{p=0}^{n-2} C_p x^{(n-p)q} \sum_{k=1}^{n-p-1} C_{n-p-1}^k \left(\frac{1}{x^q} \right)^{(k)} (x^q \vartheta(x))^{(n-p-1-k)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + \\
& + \left\| \sum_{p=0}^{n-3} C_p x^{(n-p)q} \frac{1}{x^q} \sum_{k=1}^{n-p-2} \left[\left(\frac{1}{x^{kq}} \right)' x^q \Pi^k(\vartheta) \right]^{(n-p-k-2)} \right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

при достаточно малом δ ($0 \leq x \leq \delta$). $\square$

Пусть I — тождественный оператор в E , O — нулевой оператор в E .

Лемма 4. При любой $f(x) \in M_{q,\nu}^{1,0}$ уравнение $A\vartheta = f$ имеет частное решение $\vartheta \in M_{q,\nu}^{n,-q}$, удовлетворяющее условию

$$\|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} \leq C \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}.$$

Доказательство. Сведем уравнение $A\vartheta = f$ к системе уравнений, для этого введем новые функции $\int_0^x \vartheta(t) dt = z_1(x)$, $x^q \vartheta(x) = z_2(x)$, $x^q \Pi(\vartheta)(x) = z_3(x), \dots$, $x^q \Pi^{n-2}(\vartheta)(x) = z_n(x)$, тогда получим систему уравнений

$$x^q z' + Bz = \bar{f}(x), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
z = z(x) &= \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}, \\
B_{E^n \rightarrow E^n} &= \begin{pmatrix} O & -I & O & \dots & O \\ O & O & -I & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & -I \\ C_0^{-1}C_n & C_0^{-1}C_{n-1} & C_0^{-1}C_{n-2} & \dots & C_0^{-1}C_1 \end{pmatrix}, \\
\bar{f}(x) &= \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dots \\ O \\ C_0^{-1}f(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

через E^n обозначено пространство $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_n$.

Разрешающий оператор уравнения

$$x^q \vartheta' + B\vartheta = 0$$

имеет вид $U(x, s) = e^{\left\{ \int_x^s \frac{dt}{t^q} B \right\}}$. Если спектр оператора B лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq \nu^* < 0$, то справедлива оценка $\|U(x, s)\| \leq N e^{-\gamma \int_x^s \frac{dt}{t^q}}$, $0 \leq x \leq s \leq \delta$, $\nu^* < -\gamma < 0$, $N > 0$, N не зависит от x, s (см. [12]).

Пусть действительные части всех характеристических чисел операторного пучка

$$B_\nu = C_0(-1)^{n-1}\nu^{n-1} + C_1(-1)^{n-2}\nu^{n-2} + \dots + C_{n-1} - \frac{1}{\nu}C_n$$

отрицательны, а спектр оператора B состоит из этих чисел, поэтому для разрешающего оператора $U(x, s)$ справедлива соответствующая оценка.

Норму в пространстве E^n введем следующим образом:

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\|_{E^n} = \|u_1\|_E + \|u_2\|_E + \dots + \|u_n\|_E.$$

Рассмотрим решение уравнения (13) вида

$$z(x) = \int_\delta^x U(x, s) \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q} = \int_\delta^x e^{\int_x^s \frac{dt}{t^q} B} \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q}. \quad (14)$$

Пусть $\vartheta^{(i)}(x) = \frac{1}{x^{q+qi}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \omega_i(x)$, $\vartheta(x) \in M_{q,\nu}^{n,-q}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $f^{(i)}(x) = \frac{1}{x^{qi}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_i(x)$, $f(x) \in M_{q,\nu}^{1,0}$, $i = 0, 1$,

$$\bar{f}^{(i)}(x) = \frac{1}{x^{qi}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dots \\ O \\ C_0^{-1} \bar{\omega}_i(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^{qi}} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_i(x), \quad \bar{\omega}_i(x) = \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dots \\ O \\ C_0^{-1} \bar{\omega}_i(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть $-\gamma < \nu < 0$, тогда

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} z(x) \right\|_{B([0,\delta], E^n)} &= \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \int_0^x \vartheta(t) dt, \omega_0(x), e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \Pi(\vartheta)(x), \dots, e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \Pi^{n-2}(\vartheta)(x) \right\|_{B([0,\delta], E^n)} = \\ &= \left\| \int_\delta^x e^{\int_x^s \frac{dt}{t^q} B} e^{-\nu \int_x^s \frac{dt}{t^q}} e^{\nu \int_s^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar{\omega}_0 \frac{ds}{s^q} \right\|_{B([0,\delta], E^n)} \leq \sup_{0 \leq x \leq \delta} \left| \int_x^\delta N e^{-\gamma \int_x^s \frac{dt}{t^q}} e^{-\nu \int_x^s \frac{dt}{t^q}} \frac{ds}{s^q} \right| \|\bar{\omega}_0\|_{B([0,\delta], E^n)} \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq \delta} \left| \int_x^\delta N e^{(-\gamma-\nu) \int_x^s \frac{dt}{t^q}} \frac{ds}{s^q} \right| \|C_0^{-1}\| \|\bar{\omega}_0\|_{B([0,\delta], E)} \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq \delta} \left| \left(-N \frac{1}{\gamma + \nu} e^{(-\gamma-\nu) \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \right) \right|_{|x|} \|C_0^{-1}\| \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \frac{N}{\gamma + \nu} \|C_0^{-1}\| \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \\ \bar{C}_0 &= \frac{N}{\gamma + \nu} \|C_0^{-1}\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\omega_0\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} z(x) \right\|_{B([0,\delta],E^n)} \leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \\ \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi(\vartheta)(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} z(x) \right\|_{B([0,\delta],E^n)} \leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|qx^{q-1}\omega_0(x) + \omega_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \\ \|\omega_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + q\bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = (\bar{C}_0 + q\bar{C}_0) \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} = \bar{C}_1 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \bar{C}_1 = \bar{C}_0 + q\bar{C}_0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|\omega_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_1 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \quad (0 \leq x \leq \delta)$$

при достаточно малом δ .

Предположим, что получены неравенства

$$\|\omega_{k-1}(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_{k-1} \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}},$$

тогда оценим $\|\omega_k(x)\|_{B([0,\delta],E)}$.

Методом математической индукции можно получить следующую формулу:

$$\Pi^k(\vartheta)(x) = C_0^k(q)x^{kq-k}\vartheta(x) + C_1^k(q)x^{kq-(k-1)}\vartheta'(x) + C_2^k(q)x^{kq-(k-2)}\vartheta''(x) + C_k^k(q)x^{kq}\vartheta^{(k)}(x),$$

где $C_p^k(p=0, \dots, k)$ определяются как

$$\begin{aligned} C_0^{z+1}(q) &= C_0^z(q) + C_0^z(q)(zq - z), \\ C_1^{z+1}(q) &= C_1^z(q) + C_0^z(q) + C_1^z(q)(zq - (z-1)), \\ &\dots\dots\dots \\ C_p^{z+1}(q) &= C_p^z(q) + C_{p-1}^z(q) + C_p^z(q)(zq - (z-p)), \\ C_{z+1}^{z+1}(q) &= C_z^z(q) = 1, \\ C_0^1(q) &= q, C_1^1(q) = 1, \quad z = 1, \dots, k-1, \quad p = 0, \dots, z+1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi^k(\vartheta)(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \left\| e^{-\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} z(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \\ \left\| C_0^k(q)x^{(k+1)q-k-q}\omega_0(x) + C_1^k(q)x^{(k+1)q-(k-1)-2q}\omega_1(x) + C_2^k(q)x^{(k+1)q-(k-2)-3q}\omega_2(x) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + C_{k-1}^k(q)x^{(k+1)q-1-kq}\omega_{k-1}(x) + \omega_k(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \|\omega_k\|_{B([0,\delta],E)} &\leq C_0^k(q)\delta^{k(q-1)}\|\omega_0\|_{B([0,\delta],E)} + C_1^k(q)\delta^{(k-1)(q-1)}\|\omega_1\|_{B([0,\delta],E)} + \\ &\quad + C_2^k(q)\delta^{(k-1)(q-1)}\|\omega_2\|_{B([0,\delta],E)} + \dots + C_{k-1}^k(q)\delta^{q-1}\|\omega_{k-1}\|_{B([0,\delta],E)} + \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \\ &\leq C_0^k(q)\bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + C_1^k(q)\bar{C}_1 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + \dots + C_{k-1}^k(q)\bar{C}_{k-1} \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + \bar{C}_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \bar{C}_k \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \end{aligned}$$

при достаточно малом δ ($0 \leq x \leq \delta$), $\bar{C}_k = C_0^k(q)\bar{C}_0 + C_1^k(q)\bar{C}_1 + \dots + C_{k-1}^k(q)\bar{C}_{k-1} + \bar{C}_0$.

Следовательно,

$$\|\omega_k\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_k \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Дифференцируя (14), получаем

$$\begin{pmatrix} \vartheta(x) \\ \Pi(\vartheta(x)) \\ \Pi^2(\vartheta(x)) \\ \vdots \\ \Pi^{n-1}(\vartheta(x)) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^q} \bar{f}(x) - \int_{\delta}^x \frac{1}{x^q} e^{\left\{ \int_x^s \frac{dt}{t^q} \right\}^B} B \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q}; \quad (15)$$

тогда

$$\begin{pmatrix} e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} x^q \vartheta(x) \\ e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi(\vartheta(x)) \\ \vdots \\ e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi^{n-1}(\vartheta(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dots \\ O \\ C_0^{-1} \bar{\omega}_0(x) \end{pmatrix} - \int_{\delta}^x e^{\left\{ \int_x^s \frac{dt}{t^q} \right\}^B} B e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi^{n-1}(\vartheta)(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \left\| e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} z'(x) \right\|_{B([0,\delta],E^n)} \leq \bar{C}_0 \|B\| \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} + \\ &+ \|C_0^{-1} \bar{\omega}_0(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leq C_1 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}. \end{aligned}$$

Проведя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем

$$\|\omega_{n-1}\|_{B([0,\delta],E)} \leq \bar{C}_{n-1} \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}.$$

Умножая равенство (15) на x^q и дифференцируя, имеем

$$\begin{pmatrix} \Pi(\vartheta(x)) \\ \Pi^2(\vartheta(x)) \\ \vdots \\ \Pi^n(\vartheta(x)) \end{pmatrix} = \bar{f}'(x) - B \frac{1}{x^q} \bar{f}(x) + \int_{\delta}^x e^{\left\{ \int_x^s \frac{dt}{t^q} \right\}^B} \frac{1}{x^q} B^2 \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} x^q \Pi^n(\vartheta)(x) \right\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \left\| x^q e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{f}'(x) \right\|_{B([0,\delta],E^n)} + \left\| B e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{f}(x) \right\|_{B([0,\delta],E^n)} + \\ &+ \left\| \int_{\delta}^x e^{\left\{ \int_x^s \frac{dt}{t^q} \right\}^B} B^2 e^{-\nu \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \bar{f}(s) \frac{ds}{s^q} \right\|_{B([0,\delta],E^n)} \leq \|C_0^{-1} \bar{\omega}_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} + \|B\| \|C_0^{-1} \bar{\omega}_0(x)\|_{B([0,\delta],E)} + \\ &+ \bar{C}_0 \|B^2\| \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq \|C_0^{-1}\| \|\bar{\omega}_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} + \|B\| \|C_0^{-1}\| \|\bar{\omega}_0(x)\|_{B([0,\delta],E)} + \\ &+ \bar{C}_0 \|B^2\| \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leq C_2 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|\omega_n\|_{B([0,\delta],E)} &\leq \bar{C}_n \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \\ \|\vartheta\|_{M_{q,\nu}^{n,-q}} &= \max_{0 \leq i \leq n} \|\omega_i\|_{B([0,\delta],E)} \leq C \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}, \end{aligned}$$

где $C = \max_{0 \leq i \leq n} \bar{C}_i$. □

Теорема. Пусть порядок интегрального оператора $K\varphi = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$ равен n , $K(x,t)$

удовлетворяет дополнительному условию

$$C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x,x)}{x^{nq}}, \quad C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^{(n-1)q}}, \dots, \quad C_n = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)^n K_{t^n}^{(n)}(x,x)}{x^0},$$

причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} , операторный пучок

$$B_\nu = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1-p}(-1)^p \nu^p - C_n \frac{1}{\nu}$$

удовлетворяет замечанию 3, $f(x)$ принадлежит пространству $M_{q,\nu}^{1,0}$. Тогда при ν , удовлетворяющем условию $\nu^* \leq \nu < 0$, существует такое число $\delta > 0$, что при $0 \leq x \leq \delta$ уравнение (1) имеет k -параметрическое семейство решений

$$\left(k = \sum_{i=1}^m (q_i + 1) + \sum_{k=1}^p 2(\bar{q}_k + 1) \right), \quad \varphi(x) = [\bar{\vartheta}(x) + \vartheta_0(x)]^{(n)}, \quad \varphi(x) \in M_{q,\nu}^{0,-(n+1)q},$$

где $\bar{\vartheta}(x)$ — частное решение уравнения (2), $\vartheta_0(x)$ — общее решение уравнения $A_{\eta_n}\vartheta + D_{\eta_n}\vartheta = 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы в [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Магницкий Н.А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода, Докл. АН СССР **235** (4), 772–774 (1977).
- [2] Магницкий Н.А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра, Докл. АН СССР **240** (2), 268–271 (1978).
- [3] Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III родов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **19** (4), 970–988 (1979).
- [4] Крейн С.Г., Сапронов И.В. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью, Докл. РАН **355** (4), 450–452 (1997).
- [5] Крейн С.Г., Сапронов И.В. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями, УМН **50** ((4) 340), 140 (1995).
- [6] Krein S.G. Singular integral Volterra equations. Abstracts of Internat. Congress of Math., 125 (Zurich, 1994).
- [7] Сапронов И.В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве, Изв. вузов. Матем. (6), 48–58 (2004).
- [8] Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве, Изв. вузов. Матем. (2), 81–83 (2005).
- [9] Сапронов И.В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве, Изв. вузов. Матем. (11), 45–55 (2007).
- [10] Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве, Изв. вузов. Матем. (1), 59–71 (2011).
- [11] Сапронов И.В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода, Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем. (1), 87–96 (2022).
- [12] Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения (Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 1972).

Иван Васильевич Сапронов

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова,
ул. Тимирязева, д. 8, г. Воронеж, 394613, Россия,

e-mail: vglta311@mail.ru

*I. V. Saprnov***A multiparametric family of solutions to the Volterra linear integral equation of the first kind**

Abstract. We study the Volterra integral equation of the first kind with an integral operator of order n , a singularity and a sufficiently smooth kernel in a certain Banach space with weight. It reduces to an integro-differential equation with two terms on the left-hand side. The first term corresponds to an equation for which an explicitly multiparameter family of solutions is constructed. For the second term, we obtain an equation with an operator whose norm in an arbitrary Banach space is arbitrarily small near zero. Such splitting of the integral operator allows one to construct a particular and general solutions to the integro-differential equation in the corresponding Banach space in the form of convergent series. Thus, under certain restrictions on the operator pencil corresponding to a given integral operator, a multi-parameter family of solutions is being constructed for the original integral equation.

Keywords: integral equation, operator, operator pencil, spectrum.

Ivan Vasilevich Saprnov

*Voronezh State Forestry University of G.F. Morozov,
8 Timiryazeva str., Voronezh, 394613 Russia,*

e-mail: vglta311@mail.ru