Известия вузов. Математика
2024, № 5, с. 37–46

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

О.Л. КУРНЯВКО, И.В. ШИРОКОВ

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В работе рассмотрена задача построения систем векторных полей инвариантных относительно действия локальной группы Ли преобразований. Показано, что существует специальный класс групп Ли, для которых эта задача решается элементарно.

Ключевые слова: алгебра Ли, группа Ли, инвариантный дифференциальный оператор, левоинвариантное векторное поле, правоинвариантное векторное поле, оператор инвариантного дифференцирования.

УДК: 512.81

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-37-46

Введение

Во многих задачах математической физики и геометрии возникает необходимость построения векторных полей, инвариантных относительно действия локальной группы Ли преобразований, т. е. коммутирующих с ее генераторами. В общем случае, такая задача приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, что может быть связано с существенными техническими трудностями.

Если нам известны структурные константы алгебры Ли, то построение левоинвариантных и коммутирующих с ними правоинвариантных векторных полей в канонических координатах второго рода в общем случае решается методами линейной алгебры и не составляет каких-либо вычислительных трудностей [1] (см. также [2]). Однако существует значительное количество практических задач, в которых изначально задана алгебра Ли векторных полей в произвольной (неканонической) системе координат. Такая ситуация возникает, например, при вычислении генераторов группы точечных симметрий некого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Другим примером подобной ситуации является вычисление алгебры векторов Киллинга для заданного риманова пространства. В этом случае нахождение векторных полей, коммутирующих с ними, составляет вычислительно сложную задачу интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных.

В работе [3] было показано, что векторные поля, коммутирующие с генераторами просто транзитивно действующей группы симметрии, позволяют построить оператор инвариантного дифференцирования [4]–[6], порождающий базис дифференциальных инвариантов соответствующего уравнения.

Поступила в редакцию 13.03.2023, после доработки 17.08.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН № 1.5.1, проект № 0314-2019-0020 и Российского научного фонда, грант № 22-21-00035.

В настоящей работе будет предложен метод построения на группах Ли инвариантных систем векторных полей. Показано, что для широкого класса алгебр Ли, которые в настоящей работе называются интегрируемыми, рассматриваемая задача решается элементарно.

1. Постановка задачи

Пусть имеется n-мерная группа Ли G и пусть в открытой окрестности $U_e \subset G$ ее единицы заданы некоторые произвольные локальные координаты $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in V \subset \mathbb{R}^n$, отождествляемые с соответствующим элементом группы $g(x) \in U_e$, где $g(x)$ — это элемент группы Ли G с координатами x. Групповое произведение $g(z) = g(x)\, g(y) \in U_e$ элементов $g(x), g(y) \in U_e$ в координатах запишется в виде $z^i = (x \circ y)^i = \varphi^i(x, y)$, где φ — функция композиции данной группы. Будем считать, что единичному элементу соответствуют нулевые значения координат, тогда $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = x$. Далее везде будем считать, что все рассматриваемые элементы группы G принадлежат окрестности U_e.

Касательное пространство T_eG к единице данной группы Ли G отождествляется с ее алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, базис которой $\{e_i\}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям вида

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k\, e_k,$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а индексы i, j, k пробегают значения $1, \ldots, n$. Группа Ли G действует сама на себе левыми и правыми сдвигами $L_a\, g = a\, g$, $R_a\, g = g\, a$, где $a, g \in G$. Их дифференциалы порождают соответственно лево- и правоинвариантные векторные поля, которые определяются как $\xi_i(x) = dL_x\, e_i$, $\eta_i(x) = -dR_x\, e_i$:

$$\xi_i = \xi_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \xi_i^j(x) = \frac{\partial\, \varphi^j(x, y)}{\partial\, y^i}\bigg|_{y=0}, \quad \eta_i = \eta_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \eta_i^j(x) = -\frac{\partial\, \varphi^j(y, x)}{\partial\, y^i}\bigg|_{y=0}, \tag{1}$$

$$[\xi_i(x), \xi_j(x)] = C_{ij}^k\, \xi_k(x), \quad [\eta_i(x), \eta_j(x)] = C_{ij}^k\, \eta_k(x), \quad [\xi_i(x), \eta_j(x)] = 0.$$

Пусть на группе Ли G задана система гладких векторных полей $X_i(x) = X_i^j(x)\partial_{x^i}$, где $\partial_{x^i} = \partial/\partial x^i$, реализующих алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и удовлетворяющих базисным коммутационным соотношениям

$$[X_i(x), X_j(x)] = C_{ij}^k\, X_k(x).$$

Также предположим, что данная система векторных полей порождает просто транзитивное действие группы G, что равносильно условию

$$\operatorname{rank} X_i^j = \dim U_e = \dim G = n.$$

Отметим, что условие просто транзитивности означает, что поля $X_i(x)$ для определенности можно считать левоинвариантными векторными полями. Тогда коммутирующие с ними векторные поля $\widetilde{X}_j(x)$ будут являться правоинвариантными векторными полями на данной группе Ли и могут быть найдены из условия $[\widetilde{X}_i(x), X_j(x)] = 0$. Последние в заданных координатах имеют вид

$$X_i^k(x)\, \frac{\partial\, \widetilde{X}_j^m(x)}{\partial\, x^k} - \widetilde{X}_i^k(x)\, \frac{\partial\, X_j^m(x)}{\partial\, x^k} = 0. \tag{2}$$

Система (2) является системой дифференциальных уравнений в частных производных на неизвестные коэффициенты полей $\widetilde{X}_i^j(x)$. В общем случае алгоритма решения данной задачи не существует.

Ниже будет показано, что существует специальный класс алгебр Ли, для которых указанная задача решается элементарно и будет предложен метод построения алгебры Ли $\mathfrak{g}$

полей $\widetilde{X}_i(x)$, которые коммутируют с произвольными полями $X_i(x)$, т. е. будут являться решением системы (2).

Важно отметить, что нахождение инвариантных векторных полей, как следствие, приводит к решению следующих задач:

1) построение матрицы присоединенного представления в произвольной системе координат:
$$\big(Ad_{g(x)}\big)^i_j = \big(\widetilde{X}^{-1}(x)\big)^i_k \,(X(x))^k_j;$$
2) построение функций композиции $x_1 \circ x_2 = \varphi(x_1, x_2)$ в произвольной системе координат [2]:
$$||Ad_{g(x_1 \circ x_2)}|| = ||Ad_{g(x_1)}|| \cdot ||Ad_{g(x_2)}||;$$
3) построение операторов инвариантного дифференцирования: $\delta_i = \widetilde{X}^k_i(x)\, D_k$, где D_k — оператор полной производной по переменной x^k ([3]).

2. Инвариантные дифференциальные операторы

1. Рассмотрим n-мерную группу Ли G. Пусть на ее открытой области U_e заданы две координатные карты: $x = \big(x^1, \ldots, x^n\big) \in V \subset \mathbb{R}^n$ и $y = \big(y^1, \ldots, y^n\big) \in \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть также заданы две системы гладких векторных полей: $X_i(x) = X^j_i(x)\partial_{x^i}$ и $Y_i(y) = Y^j_i(y)\partial_{y^i}$, реализующих алгебру Ли $\mathfrak{g}$, т. е. удовлетворяющих коммутационным соотношениям вида
$$[X_i(x), X_j(x)] = C^k_{ij}\, X_k(x), \quad [Y_i(y), Y_j(y)] = C^k_{ij}\, Y_k(y).$$
Предположим, что каждая из систем векторных полей X и Y порождает просто транзитивное действие группы G, что равносильно условию
$$\operatorname{rank} X^i_i = \operatorname{rank} Y^j_i = \dim V = \dim \widetilde{V} = \dim G = n.$$
Это позволяет считать $X_i(x)$ и $Y_i(y)$ левоинвариантными полями, записанным в различных координатах.

В силу того, что V и $\widetilde{V}$ — это координатные карты одной и той же области U_e, существует локальный диффеоморфизм $y = y(x)$, при котором каждое базисное векторное поле $X_i(x)$ переходит в соответствующее базисное векторное поле $Y_i(y)$. Последнее эквивалентно системе равенств
$$Y^\alpha_i(y) = X^k_i(x)\, \frac{\partial\, y^\alpha}{\partial\, x^k}, \quad i, \alpha = 1, \ldots, n. \tag{3}$$
Система (3) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с независимыми переменными $x^1, \ldots, x^n$ и неизвестными функциями $y^\alpha = y^\alpha\big(x^1, \ldots, x^n\big)$, где $\alpha = 1, \ldots, n$. Эта система совместна, так как системы векторных полей $X_i(x)$ и $Y_i(y)$ образуют одну и ту же алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Однако в общем случае ее непосредственное интегрирование является весьма сложной математической задачей.

2. Выберем на данной группе Ли G канонические координаты $\big(y^1, \ldots, y^n\big)$ второго рода. Это значит, что всякий элемент $g \in G$ представляется в виде произведения однопараметрических подгрупп:
$$g\big(y^1, y^2, \ldots, y^n\big) = g_n\big(y^n\big)\, g_{n-1}\big(y^{n-1}\big) \ldots g_1\big(y^1\big), \quad g_i\big(y^i\big) = \exp\big(y^i\, e_i\big). \tag{4}$$
В приведенной формуле по повторяющимся индексам суммирование отсутствует. По структурным константам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ построим в данных координатах левоинвариантные векторные поля $\xi_i(y) = \xi^\alpha_i(y)\partial_{y^\alpha}$ и соответствующие им правоинвариантные векторные поля

$\eta_i(y) = \eta_i^\alpha(y)\partial_{y^\alpha}$, реализующие алгебру Ли $\mathfrak{g}$. В работе [1] показано, что в канонических координатах второго рода эта задача решается методами линейной алгебры.

Рассмотрим специальный случай, когда в качестве полей $Y_i(y)$ выбраны левоинвариантные поля $\xi_i(y)$ в канонических координатах второго рода (4):

$$\xi_i^\alpha(y) = X_i^k(x)\,\frac{\partial\, y^\alpha}{\partial\, x^k}, \quad i,k,\alpha = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

3. Система (5), как и исходная система (2), являются системами нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых, вообще говоря, может приводить к существенным техническим трудностям. Однако можно выделить специальный класс алгебр Ли, для которых система (5) распадается на подсистемы уравнений, содержащих последовательно увеличивающиеся наборы неизвестных функций $\bigl(y^1\bigr)$, $\bigl(y^1,y^2\bigr)$, $\bigl(y^1,y^2,y^3\bigr)$ и т. д. В этом случае данная система может быть легко проинтегрирована.

Достаточным для этого условием является свойство интегрируемости алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение. Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ данной группы Ли G, для которой существует флаг подалгебр, т. е. цепочка подалгебр $\mathfrak{g}_k$ таких, что

$$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots \mathfrak{g}_k \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}, \quad \dim \mathfrak{g}_k = k, \quad k = 1,\ldots,n,$$

будем называть интегрируемой алгеброй Ли.

Также можно дать рекурсивное определение данного понятия: *каждая одномерная алгебра является интегрируемой по определению и каждая интегрируемая алгебра имеет интегрируемую подалгебру коразмерности один.*

В частности, всякая разрешимая алгебра является интегрируемой. Обратное неверно. Легко также доказать, что прямая и полупрямая сумма интегрируемых алгебр Ли, является интегрируемой алгеброй. Таким образом, вопрос о критериях, позволяющих отнести данную алгебру к классу интегрируемых, сводится к исследованию простых алгебр, которые в общем случае не являются интегрируемыми. Примером простой интегрируемой алгебры Ли является алгебра $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$.

Среди всех возможных базисов интегрируемых алгебр выделим базис $\{e_{i_1}, e_{i_2},\ldots,e_{i_n}\}$, который будем называть *подходящим*, если он удовлетворяет условию

$$\{e_{i_1}\} \subset \{e_{i_1},e_{i_2}\} \subset \{e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3}\} \subset \ldots \subset \{e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}},e_{i_n}\},$$

где $\{e_{i_1}, e_{i_2},\ldots,e_{i_k}\}$ — базис подалгебры $\mathfrak{g}_k$, $k=1,\ldots,n$. В частности, для алгебры $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ с базисными коммутационными соотношениями $[e_1,e_2]=e_2,\ [e_3,e_1]=e_3,\ [e_2,e_3]=2\,e_1$ подходящий базис имеет вид $\{e_1,e_2,e_3\}$, который в данном случае является базисом Картана–Вейля.

Утверждение. *Пусть* $\{e_n, e_{n-1},\ldots,e_1\}$ *— подходящий базис интегрируемой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группы Ли* G*. Тогда в канонических координатах второго рода*

$$g = g_n\bigl(z^n\bigr)\,g_{n-1}\bigl(z^{n-1}\bigr)\,\ldots\,g_1\bigl(z^1\bigr), \quad g_i(t) = \exp\,(t\,e_i),$$

левоинвариантные поля на группе G *имеют вид*

$$\xi_i = \xi_i^1\bigl(z^1\bigr)\,\frac{\partial}{\partial\, z^1} + \xi_i^2\bigl(z^1,z^2\bigr)\,\frac{\partial}{\partial\, z^2} + \xi_i^3\bigl(z^1,z^2,z^3\bigr)\,\frac{\partial}{\partial\, z^3} + \ldots + \xi_i^n\bigl(z^1,\ldots z^n\bigr)\,\frac{\partial}{\partial\, z^n}. \tag{6}$$

Доказательство. 1) Пусть G — группа Ли, а H — некоторая ее подгруппа. Действие H на G определяет структуру главного расслоения $G\,(M \approx G/H, H, \pi)$, где M — база данного расслоения, H — слой, а отображение $\pi\colon G \to M$ — естественная проекция.

Рассмотрим локальное сечение расслоения $s\colon M \to G$, т.е. $\pi \circ s = id$. Произвольный элемент группы G может быть представлен в виде

$$g = hs(x), \quad h \in H, \quad x \in M. \tag{7}$$

Пусть u^α — локальные координаты элемента h в группе H, тогда в силу (7) для элемента $g(z)$ существуют координаты вида $z^i = (x^a, u^\alpha)$, называемые координатами прямого произведения.

Выполним левый сдвиг элемента g (7) группы G на элемент $\widetilde{h}$ подгруппы H:

$$L_{\widetilde{h}} g = \widetilde{h} h\, s(x) = \big(\widetilde{h}\, h\big)\, s(x) = \overline{h}\, s(x), \quad \overline{h} = \widetilde{h}\, h \in H.$$

Такой левый сдвиг не меняет координаты x элемента g. Это означает, что $\eta_\alpha = \eta_\alpha^\beta(u)\partial/\partial u^\beta$, здесь $\alpha = \dim M + 1, \dots, \dim H$, а η_α — генераторы левых сдвигов на группе H.

Заметим, что левые и правые сдвиги коммутируют, что приводит, в частности, к равенству

$$[\eta_\alpha, \xi_i] = \left[\eta_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \xi_i^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right] = \left(\eta_\alpha^\beta \frac{\partial \xi_i^a}{\partial u^\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(\eta_\alpha^\beta \frac{\partial \xi_i^\gamma}{\partial u^\beta} - \xi_i^\beta \frac{\partial \eta_\alpha^\gamma}{\partial u^\beta}\right) \frac{\partial}{\partial u^\gamma} = 0.$$

Отсюда с учетом $\det \eta_\alpha^\beta \neq 0$ следует $\partial \xi_i^a / \partial u^\beta = 0$. Тогда в координатах $z = (x, u)$ левоинвариантные поля (1) имеют структуру

$$\xi_i = \xi_i^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} + \xi_i^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

2) Практическим способом построения координат прямого произведения являются канонические координаты второго рода. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{H}$ — алгебра Ли подгруппы H. Выберем в $\mathfrak{g}$ базис вида $\{e_a, e_\alpha\}$, где $a = 1, \dots, m$, $\alpha = m+1, \dots, n$ и $m = \dim M$, $n = \dim G$, который получается дополнением базиса $\mathfrak{H} = \{e_\alpha\}$. Тогда канонические координаты второго рода запишутся в виде

$$g\big(z^1, z^2, \dots, z^n\big) = \exp\big(z^n\, e_n\big)\, \exp\big(z^{n-1}\, e_{n-1}\big)\, \dots \exp\big(z^2\, e_2\big)\, \exp\big(z^1\, e_1\big).$$

В этом случае $z^\alpha = u^\alpha$, а $z^a = x^a$, где $a = 1, \dots, m$, $\alpha = m+1, \dots, n$, $m = \dim M$, $n = \dim G$, следовательно,

$$\xi_i = \sum_{a=1}^{m} \xi_i^a\big(z^1, \dots, z^m\big) \frac{\partial}{\partial z^a} + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \xi_i^\alpha\big(z^1, \dots, z^n\big) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{8}$$

3) Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется флаг подалгебр. Рассмотрим подгруппы H_{n-m} группы Ли G размерности $n-m$, где $m = 1, \dots, n-1$, каждой из которых соответствует подалгебра Ли $\mathfrak{g}_{n-m}$. Используя (8), выпишем левоинвариантные поля в случае $m = 1$ и $m = 2$:

$$\xi_i = \xi_i^1\big(z^1\big) \frac{\partial}{\partial z^1} + \sum_{\alpha=2}^{n} \xi_i^\alpha\big(z^1, \dots, z^n\big) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \tag{9}$$

$$\xi_i = \xi_i^1\big(z^1, z^2\big) \frac{\partial}{\partial z^1} + \xi_i^2\big(z^1, z^2\big) \frac{\partial}{\partial z^2} + \sum_{\alpha=3}^{n} \xi_i^\alpha\big(z^1, \dots, z^n\big) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) относятся к одному и тому же векторному полю, следовательно, формула (10) запишется в виде

$$\xi_i = \xi_i^1\big(z^1\big) \frac{\partial}{\partial z^1} + \xi_i^2\big(z^1, z^2\big) \frac{\partial}{\partial z^2} + \sum_{\alpha=3}^{n} \xi_i^\alpha\big(z^1, \dots, z^n\big) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

Далее по индукции приходим к формуле (6).

□

Таким образом, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является интегрируемой, то в силу (6) система (5) запишется в “треугольном” виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y^1}{\partial x^k} = \left(X^{-1}(x)\right)^i_k\, \xi^1_i\left(y^1\right),\\
&\frac{\partial y^2}{\partial x^k} = \left(X^{-1}(x)\right)^i_k\, \xi^2_i\left(y^1, y^2\right),\\
&\frac{\partial y^3}{\partial x^k} = \left(X^{-1}(x)\right)^i_k\, \xi^3_i\left(y^1, y^2, y^3\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial y^n}{\partial x^k} = \left(X^{-1}(x)\right)^i_k\, \xi^n_i\left(y^1, \dots y^n\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

В отличие от исходной системы (5) система уравнений (11) легко может быть проинтегрирована. Действительно, первое из ее уравнений содержит единственную неизвестную функцию $y^1(x)$, которая может быть легко найдена. Подставляя полученное решение во второе уравнение данной системы, мы получим уравнение, содержащее единственную неизвестную функцию $y^2(x)$, которая также может быть легко найдена. Поступая далее таким же образом, найдем все неизвестные функции, которые задают преобразование $y^\alpha = y^\alpha(x)$, обеспечивающее выполнение равенства

$$\xi_i(y)\big|_{y=y(x)} = X_i(x).$$

Отметим, что в общем случае интегрирование системы (5) дает общее решение, содержащее n произвольных постоянных. Однако для наших целей можно использовать любой набор частных решений, удовлетворяющих условию $\det \partial y^\alpha/\partial x^i \neq 0$.

4. В силу коммутативности лево- и правоинвариантных векторных полей имеет место равенство

$$\left[\xi_i(y), \eta_j(y)\right]\big|_{y=y(x)} = 0,$$

а следовательно,

$$\Big[\xi_i(y)\big|_{y=y(x)}, \eta_j(y)\big|_{y=y(x)}\Big] = \Big[X_i(x), \eta_j(y)\big|_{y=y(x)}\Big] = 0.$$

Таким образом, искомое поле $\widetilde{X}_i(x)$, коммутирующее с исходным полем $X_i(x)$, определяется выражением

$$\widetilde{X}_i(x) = \eta_i(y)\big|_{y=y(x)},$$

которое в координатах примет вид

$$\widetilde{X}_i(x) = \eta^a_i\left(y(x)\right)\,\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}\right]^k_a \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{12}$$

Формула (12) — это ключевой результат настоящей работы, который является основой для многих важных приложений указанных ранее. Отметим, что найденные операторы $\widetilde{X}_i(x)$ являются генераторами группы симметрий системы уравнений (3).

3. Пример инвариантных дифференциальных операторов на пятимерной группе Ли

1. Как обсуждалось выше, свойство интегрируемости алгебр является более общим свойством, чем разрешимость. Поэтому в качестве примера имеет смысл рассмотреть алгебру, которая является неразрешимой. Выбирать простые алгебры малых размерностей также нецелесообразно, так как их свойства хорошо изучены.

Заметим, что все трехмерные алгебры Ли либо разрешимы либо просты, а четырехмерные либо разрешимы, либо представляют собой прямую сумму трехмерной простой алгебры и одномерного центра. Поэтому имеет смысл рассмотреть пятимерную неразрешимую алгебру Ли.

2. Рассмотрим пятимерную неразрешимую алгебру Ли $\mathfrak{g}^5$, которая представляет собой полупрямую сумму $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и коммутативного идеала с базисными элементами $\{e_4, e_5\}$. Данная алгебра имеет коммутационные соотношения вида

$$\begin{gathered}[e_1, e_2] = 2e_1, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = 2e_3, \\ [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = -e_5, \quad [e_3, e_5] = e_4.\end{gathered} \tag{13}$$

Интерес к данной алгебре обусловлен тем фактом, что соответствующая группа Ли является единственной группой движений на четырехмерном римановом пространстве нештеккелева типа. Это, в свою очередь, дает единственный пример четырехмерного пространства, в котором уравнение Клейна–Гордона интегрируемо, но не допускает разделение переменных [7].

Пусть в локальной окрестности U_e группы Ли G_5 заданы координаты $(x^1, \dots, x^5) \in V \subset \mathbb{R}^5$, в которых имеется система базисных векторных полей $X_i = X_i^j(x)\,\partial_{x^j}$:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_{x^1}, \quad X_2 = 2x^1\partial_{x^1} + \partial_{x^2}, \quad X_3 = -(x^1)^2\partial_{x^1} - x^1\partial_{x^2} + e^{2x^2}\partial_{x^3}, \\ X_4 = -(e^{x^2}x^1x^3 + e^{3x^2})\partial_{x^1} + (e^{-x^2}x^1(x^3)^2 + e^{x^2}x^3)\partial_{x^2} + \\ + (e^{-x^2}x^1(x^3)^3 + e^{x^2}(x^3)^2)\partial_{x^3} + (e^{-x^2}x^1x^3 + e^{x^2})\partial_{x^4} + e^{-x^2}x^1\partial_{x^5}, \\ X_5 = -e^{x^2}x^3\partial_{x^1} + e^{-x^2}(x^3)^2\partial_{x^2} + e^{-x^2}(x^3)^3\partial_{x^3} + e^{-x^2}x^3\partial_{x^4} + e^{-x^2}\partial_{x^5},\end{gathered}$$

образующих алгебру Ли $\mathfrak{g}^5$. Найдем систему инвариантных векторных полей $\widetilde{X}_i(x)$, т. е. полей, коммутирующих с векторными полями $X_i(x)$.

Отметим, что приведенная система векторных полей $X_i(x)$ имеет довольно громоздкий вид. По-видимому, подходящими заменами координат и выбором базиса ее можно было бы привести к более компактному виду, но это тоже является достаточно сложной задачей. Ниже мы покажем, что задача построения инвариантных операторов $\widetilde{X}_i(x)$ легко решается в исходных координатах.

Алгебра Ли (13) является в нашем определении интегрируемой, так как допускает флаг подалгебр вида

$$\{e_5\} \subset \{e_5, e_4\} \subset \{e_5, e_4, e_3\} \subset \{e_5, e_4, e_3, e_2\} \subset \{e_5, e_4, e_3, e_2, e_1\}.$$

Таким образом, для решения данной задачи необходимо построить на данной группе Ли канонические координаты второго рода $\bigl(y^1, \dots, y^5\bigr) \in V \subset \mathbb{R}^5$ следующего вида: $g\bigl(y^1, \dots, y^5\bigr) = g_5\, g_4\, g_3\, g_2\, g_1$, где $g_k = \exp\bigl(y^k\, e_k\bigr)$, $k = 1, \dots, 5$. Здесь, как было указано выше, суммирование по повторяющимся индексам не предполагается.

Построим в данных координатах систему лево- и правоинвариантных векторных полей, образующую алгебру Ли с коммутационными соотношениями (13). Следуя методу, предложенному работе [1], эта задача всегда может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений и в данном случае дает систему левоинвариантных векторных полей

$$\xi_1 = \partial_{y^1}, \quad \xi_2 = 2y^1\partial_{y^1} + \partial_{y^2}, \quad \xi_3 = -(y^1)^2\partial_{y^1} - y^1\partial_{y^2} + e^{2y^2}\partial_{y^3},$$
$$\xi_4 = e^{y^2}\partial_{y^4} + e^{-y^2}y^1y^3\partial_{y^4} + e^{-y^2}y^1\partial_{y^5}, \quad \xi_5 = e^{-y^2}\partial_{y^5} + e^{-y^2}y^3\partial_{y^4}$$

и соответствующую им систему правоинвариантных векторных полей

$$\eta_1 = -e^{2y^2}\partial_{y^1} + y^3\partial_{y^2} + (y^3)^2\partial_{y^3} - y^4\partial_{y^5}, \quad \eta_2 = -\partial_{y^2} - 2y^3\partial_{y^3} - y^4p_{y^4} + y^5\partial_{y^5},$$
$$\eta_3 = -\partial_{y^3} - y^5\partial_{y^4}, \quad \eta_4 = -\partial_{y^4}, \quad \eta_5 = -\partial_{y^5}.$$

В выбранных канонических координатах система (5) распадается на подсистемы уравнений, содержащих последовательно увеличивающиеся наборы неизвестных функций $\big(y^1\big)$, $\big(y^1, y^2\big)$, $\big(y^1, y^2, y^3\big)$ и т. д. Выпишем систему уравнений для $y^1(x)$:

$$\frac{\partial\, y^1}{\partial\, x^1} = 1, \quad \frac{\partial\, y^1}{\partial\, x^2} = 2y^1 - 2x^1, \quad \frac{\partial\, y^1}{\partial\, x^3} = 2e^{-2x^2}x^1y^1 - e^{-2x^2}\big(y^1\big)^2 - e^{-2x^2}\big(x^1\big)^2,$$
$$\frac{\partial\, y^1}{\partial\, x^4} = e^{-2x^2}\big(x^3\big)^2(y^1)^2 + 2e^{-2x^2}\left(-x^1\big(x^3\big)^2 - e^{2x^2}x^3\right)y^1 + e^{-2x^2}\left(\big(x^1\big)^2\big(x^3\big)^2 + 2e^{2x^2}x^1x^3 + e^{4x^2}\right),$$
$$\frac{\partial\, y^1}{\partial\, x^5} = 0.$$

Данная система содержит единственную неизвестную функцию $y^1(x)$ и может быть легко проинтегрирована. Соответствующее частное решение имеет вид

$$y^1(x) = x^1 + \frac{e^{2x^2}x^4}{x^3x^4 + 1}.$$

Далее выпишем систему уравнений для $y^2(x)$:

$$\frac{\partial\, y^2}{\partial\, x^1} = 0, \quad \frac{\partial\, y^2}{\partial\, x^2} = 1, \quad \frac{\partial\, y^2}{\partial\, x^3} = e^{-2x^2}x^1 - e^{-2x^2}y^1,$$
$$\frac{\partial\, y^2}{\partial\, x^4} = e^{-2x^2}\big(x^3\big)^2y^1 + e^{-2x^2}\left(-x^1\big(x^3\big)^2 - e^{2x^2}x^3\right), \quad \frac{\partial\, y^2}{\partial\, x^5} = 0.$$

Данная система содержит найденную ранее функцию $y^1(x)$ и неизвестную функцию $y^2(x)$ и, следовательно, также может быть легко проинтегрирована.

Рассуждая аналогично для остальных неизвестных функций, получим искомое преобразование $y^\alpha = y^\alpha(x)$, связывающее поля $\xi_i(y)$ и $X_i(x)$:

$$y^1 = x^1 + \frac{e^{2x^2}x^4}{x^3x^4 + 1}, \quad y^2 = x^2 - \log\big(x^3x^4 + 1\big), \quad y^3 = \frac{\big(x^4 + 1\big)\,x^3 + 1}{x^3x^4 + 1},$$
$$y^4 = \frac{\big(x^4\big)^2}{2} + x^4 + x^5 + 1, \quad y^5 = \frac{\big(x^4\big)^2}{2} + x^5 + 1.$$

Тогда, используя (12), получим искомые векторные поля $\widetilde{X}_i$, коммутирующие с векторными полями X_i:

$$\widetilde{X}_1 = -e^{2x^2}\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2} + \big(x^3\big)^2\partial_{x^3} - x^4\partial_{x^5},$$

$$\widetilde{X}_2 = 3e^{2x^2}x^4\partial_{x^1} - \left(3x^3x^4+1\right)\partial_{x^2} - x^3\left(3x^3x^4+2\right)\partial_{x^3} - x^4\partial_{x^4} + \left(\frac{3\left(x^4\right)^2}{2} + x^5\right)\partial_{x^5},$$

$$\widetilde{X}_3 = \frac{1}{2}e^{2x^2}\left(3\left(x^4\right)^2 + 2x^5\right)\partial_{x^1} - \left(\frac{3}{2}x^3\left(x^4\right)^2 + x^4 + x^3x^5\right)\partial_{x^2} -$$
$$-\left(\frac{1}{2}\left(3\left(x^4\right)^2+2x^5\right)\left(x^3\right)^2 + 2x^4x^3 + 1\right)\partial_{x^3} - \left(\frac{\left(x^4\right)^2}{2} + x^5\right)\partial_{x^4} + \left(\frac{\left(x^4\right)^3}{2} + x^5x^4\right)\partial_{x^5},$$

$$\widetilde{X}_4 = e^{2x^2}\partial_{x^1} - x^3\partial_{x^2} - \left(x^3\right)^2\partial_{x^3} - \partial_{x^4} + x^4\partial_{x^5},$$
$$\widetilde{X}_5 = -\partial_{x^5}.$$

Заключение

Полученный результат может быть полезен при решении классической задачи о переходе от одних координат к другим. А именно, пусть заданы две произвольные системы координат $y = \left(y^1,\dots,y^n\right)$, $z = \left(z^1,\dots,z^n\right)$ и соответствующие генераторы действия группы Ли G самой на себе в этих координатах:

$$X_i = X_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} \in T_{g(x)}G, \qquad Z_i = Z_i^j(z)\frac{\partial}{\partial z^j} \in T_{g(z)}G,$$

тогда полученные в данной статье результаты позволяют для интегрируемых алгебр без труда получить переход $z = z(x)$. Действительно, выберем подходящий базис в алгебре Ли группы Ли G и канонические координаты второго рода, соответствующие этому базису. Левоинвариантные поля $\xi(y)$ в этих координатах имеют вид (6), тогда, как было показано выше, можем легко построить биективные преобразования $x = \Psi(y)$, $y = \Phi(z)$, композиция которых дает искомое преобразование: $x = \Psi\left(\Phi(z)\right)$.

Следующим этапом исследований в этом направлении является решение задачи о связи координат на однородных пространствах различных размерностей, что, в свою очередь, позволит выполнять размерную редукцию широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в общем случае не обладающих какой-либо группой симметрий.

Литература

[1] Широков И.В. *Построение алгебр Ли дифференциальных операторов первого порядка*, Изв. вузов. Физика (6), 25–32 (1997).

[2] Magazev A.A., Mikheyev V.V., Shirokov I.V. *Computation of composition functions and invariant vector fields in terms of structure constants of associated lie algebras*, SIGMA **11** (2015).

[3] Широков И.В. *Дифференциальные инварианты группы преобразований однородного пространства*, Сиб. матем. журн. **48** (6), 1405–1421 (2007).

[4] Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике* (Наука, М., 1983).

[5] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Под ред. А.Б. Шабата (Мир, М., 1989).

[6] Chupakhin A.P. *Differential invariants*: *theorem of commutativity*, Proc. of “Group analysis of nonlinear wave problems” (Moscow, 2022). Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **9** (1), 25–33 (2004).

[7] Шаповалов А.В., Широков И.В. *Некоммутативное интегрирование уравнений Клейна–Гордона и Дирака в римановых пространствах с группой движений*, Изв. вузов. Физика **34** (5), 43–46 (1991).

Олег Леонидович Курнявко

Омский институт водного транспорта –
филиал Сибирского государственного университета водного транспорта,
ул. Ивана Алексеева, д. 4, г. Омск, 644043, Россия,

e-mail: kurnyavko@mail.ru

Игорь Викторович Широков

Омский государственный технический университет,
пр. Мира, д. 11, г. Омск, 644050, Россия,

e-mail: iv_shirokov@mail.ru

O.L. Kurnyavko and I.V. Shirokov

Construction of first-order invariant differential operators

Abstract. The paper considers the problem of constructing systems of vector fields that are invariant under the action of the local Lie group of transformations. It is shown that there exists a special class of Lie groups for which this problem can be solved elementarily.

Keywords: Lie algebra, Lie group, invariant differential operator, left-invariant vector field, right-invariant vector field, invariant differentiation operator.

Oleg Leonidovich Kurnyavko

Omsk Institute of Water Transport –
branch of the Siberian State University of Water Transport,
4 Ivana Alekseeva str., Omsk, 644043 Russia,

e-mail: kurnyavko@mail.ru

Igor Victorovich Shirokov

Omsk State Technical University,
11 Mira Ave., Omsk, 644050 Russia,

e-mail: iv_shirokov@mail.ru