

С. ДЕМИР

ОТОБРАЖЕНИЕ $H_w^1(\mathbb{R})$ В $L_w^1(\mathbb{R})$ ВАРИАЦИОННЫМ ОПЕРАТОРОМ РАЗНОСТЕЙ СРЕДНИХ ПО ЛАКУНАРНЫМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ

Аннотация. Пусть f — локально интегрируемая функция, заданная на $\mathbb{R}$, а (n_k) — лакунарная последовательность. Зададим

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x-t) dt,$$

и пусть

$$\mathcal{V}_\rho f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k} f(x) - A_{n_{k-1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho}.$$

Предположим, что $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, и $\rho \geq 2$. Тогда существует положительная константа C такая, что

$$\|\mathcal{V}_\rho f\|_{L_w^1} \leq C \|f\|_{H_w^1}$$

для всех $f \in H_w^1(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: вариационный оператор, взвешенное пространство Харди, A_p -вес.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-30-36

ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что возрастающая последовательность (n_k) вещественных чисел называется лакунарной, если существует константа $\beta > 1$ такая, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \beta$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть f — локально интегрируемая функция, заданная на $\mathbb{R}$. Пусть (n_k) — лакунарная последовательность, определим оператор A_n равенством

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x-t) dt.$$

Очевидно, что

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} * f(x),$$

где $*$ обозначает свертку, заданную формулой

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dy.$$

Пусть (n_k) — лакунарная последовательность, рассмотрим вариационный оператор

$$\mathcal{V}_\rho f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k} f(x) - A_{n_{k-1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho}$$

при $2 \leq \rho < \infty$.

Автором в его диссертации было доказано [1] существование положительной константы C такой, что

$$\|\mathcal{V}_\rho f\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H^1}$$

для всех $f \in H^1(\mathbb{R})$.

С того времени открытым вопросом оставалось наличие такого неравенства на взвешенном пространстве Харди $H_w^1(\mathbb{R})$. Целью настоящего исследования является ответ на этот вопрос, и мы отвечаем положительно.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть w — весовая функция на $\mathbb{R}$, напомним, что взвешенное пространство $L^p(\mathbb{R})$ задается формулой

$$L_w^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) dx < \infty \right\},$$

и норма на нем определяется равенством

$$\|f\|_{L_w^p}^p \equiv \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) dx.$$

Как и в классическом случае, взвешенные пространства Харди $H_w^p(\mathbb{R})$, $p > 0$, могут быть охарактеризованы средними значениями максимальной функции. Пусть ϕ — функция из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ быстро убывающих гладких функций, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1.$$

Зададим

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi(x/t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

и максимальную функцию f^* равенством

$$f^*(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)|.$$

Тогда пространство Харди $H_w^p(\mathbb{R})$ состоит из таких обобщенных функций умеренного роста $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, для которых $f^* \in L_w^p(\mathbb{R})$, причем норма задается равенством

$$\|f\|_{H_w^p} = \|f^*\|_{L_w^p}.$$

Как и в классическом случае, эти пространства могут быть также охарактеризованы в терминах атомов следующим образом.

Определение. Пусть на вещественной прямой $\mathbb{R}$ заданы числа $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, такие, что $w \in A_q$ с критическим индексом q_w . Пусть $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда для числа $s \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего неравенству $s \geq [n(q_w/p - 1)]$, вещественнозначная функция a называется (p, q, s) -атомом по отношению к w (или $w - (p, q, s)$ -атомом), если

- (i) $a \in L_w^q$ и имеет носителем интервал I ,
- (ii) $\|a\|_{L_w^q} \leq w(I)^{1/q-1/p}$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}} a(x) x^\alpha dx = 0$ для любого мультииндекса α , если $|\alpha| \leq s$.

Вещественнозначный атом, определенный выше, называется (p, q, s) -атомом, центрированным в x_0 , по отношению к w (или $(w - (p, q, s))$ -атомом, центрированным в x_0), где x_0 — центр интервала I .

Теорема 1. Пусть a — любой $(w - (p, q, s))$ -атом, носителем которого является интервал I . Тогда имеем

$$\int_I |a(x)|^p w(x) dx \leq 1.$$

Доказательство. Пусть a — любой $(w - (p, q, s))$ -атом. Очевидно, что $a \in L_w^p$ и $\|a\|_{L_w^p} \leq 1$, тогда ввиду неравенства Гёльдера получаем

$$\int_I |a(x)|^p w(x) dx \leq \|a^p\|_{L_w^r} \left(\int_I w(x) dx \right)^{1/r'} = \|a\|_{L_w^q}^p w(I)^{1-p/q} \leq 1,$$

где $r = q/p$ и $1/r' = 1 - 1/r = 1 - p/q$. $\square$

Одним из наиболее важных свойств атомарной характеристики взвешенных пространств Харди является следующее: любая функция в таких пространствах может быть разложена по атомам аналогично классическому случаю. Более точно, пусть $f \in H_w^{p,q,s}(\mathbb{R})$, тогда существует последовательность $(\lambda_i) \in \ell^p$ такая, что

$$f = \sum_i \lambda_i a_i,$$

где a_i являются $(w - (p, q, s))$ -атомами, и

$$\mathcal{N}_{p,q,s}(f) = \inf \left\{ \left(\sum_i |\lambda_i|^p \right)^{1/p} : \sum_i \lambda_i a_i \text{ — атомарное разложение } f \right\}$$

является $H_w^{p,q,s}$ -нормой f .

Заметим, что все пространства $H_w^{p,q,s}$ совпадают с H_w^p , и $\mathcal{N}_{p,q,s}(f) \approx \|f\|_{H_w^p}$. За деталями и доказательствами известных фактов, изложенных здесь, мы отсылаем читателя к работе Дж. Гарсиа-Куэрва [2].

Положительная функция $w \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ называется A_p -весом для некоторого $1 < p < \infty$, если выполнено условие

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем интервалам I в $\mathbb{R}$.

Функция w называется A_∞ -весом, если существуют $\delta > 0$ и $\epsilon > 0$ такие, что для данного интервала I в $\mathbb{R}$ и любого его измеримого подмножества $E \subset I$ верна импликация

$$|E| < \delta \cdot |I| \implies w(E) < (1 - \epsilon)w(I);$$

здесь

$$w(E) = \int_E w.$$

Широко известно, и это легко увидеть, что $w \in A_p \implies w \in A_\infty$ при $1 < p < \infty$.

Будем говорить, что $w \in A_1$, если для данного интервала I в $\mathbb{R}$ существует положительная константа C такая, что

$$\frac{1}{|I|} \int_I w(y) dy \leq Cw(x)$$

для п.в. $x \in I$.

Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Будем говорить, что ядро $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ удовлетворяет D_r -условию для $1 \leq r < \infty$, записывая это $K \in D_r$, если существует последовательность $\{c_j\}_{j=2}^\infty$ положительных чисел таких, что $\sum_j c_j < \infty$ и для любых $j \geq 2$ и $y > 0$

$$\left(\int_{S_j(y)} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathbb{B}}^r dx \right)^{1/r} \leq c_j |S_j(y)|^{-1/r'},$$

где $S_j(y) = (2^j y, 2^{j+1} y)$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

При $K \in D_1$ получаем условие Хёрмандера

$$\int_{\{x > 4y\}} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathbb{B}} dx \leq C,$$

где C — положительная константа, не зависящая от $y > 0$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала докажем следующую теорему, играющую ключевую роль в доказательстве нашего основного результата.

Теорема 2. *Пусть*

$$\phi_k(x) = \frac{1}{n_k} \chi_{[0, n_k]}(x),$$

определим ядерный оператор $K : \mathbb{R} \rightarrow \ell^\rho(\mathbb{Z}^+)$ формулой

$$K(x) = \{\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}.$$

Положим $\rho \geq 2$ и пусть (n_k) — лакунарная последовательность. Тогда ядерный оператор K удовлетворяет D_1 -условию, т. е.

$$\int_{|x| > 2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} dx \leq C,$$

где C — положительная константа, не зависящая от $y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}(x), \quad \Phi_k(x) = \phi_{n_k}(x) - \phi_{n_{k-1}}(x).$$

Тогда имеем

$$\|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_k(x-y) - \Phi_k(x)|^\rho \right)^{1/\rho}.$$

Пусть $x > 2y$, $y > 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(x-y) - \Phi_k(x) &= \phi_{n_k}(x-y) - \phi_{n_{k-1}}(x-y) - (\phi_{n_k}(x) - \phi_{n_{k-1}}(x)) = \\ &= \phi_{n_k}(x-y) - \phi_{n_k}(x) - (\phi_{n_{k-1}}(x-y) - \phi_{n_{k-1}}(x)). \end{aligned}$$

Поскольку $x > 2y$, $y > 0$, то

$$\begin{aligned} \phi_{n_k}(x-y) - \phi_{n_k}(x) &= \frac{1}{n_k} \chi_{[0, n_k]}(x-y) - \frac{1}{n_k} \chi_{[0, n_k]}(x) = \frac{1}{n_k} \chi_{[y, n_k+y]}(x) - \frac{1}{n_k} \chi_{[0, n_k]}(x) = \\ &= \frac{1}{n_k} \chi_{[2y, n_k+y]}(x) - \frac{1}{n_k} \chi_{[2y, n_k]}(x) = \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, n_k+y]}(x). \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\phi_{n_{k-1}}(x-y) - \phi_{n_{k-1}}(x) = \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, n_k+y]}(x) - \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x) \right|^\rho \right)^{1/\rho} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, n_k+y]}(x) \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{y \leq n_k} \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, n_k+y]}(x) + \sum_{y \leq n_{k-1}} \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x). \end{aligned}$$

Пусть теперь k_0 — первый такой индекс, что $y \leq n_{k_0}$, тогда

$$\frac{n_{k_0}}{n_k} = \frac{n_{k_0}}{n_{k_0+1}} \frac{n_{k_0+1}}{n_{k_0+2}} \frac{n_{k_0+1}}{n_{k_0+2}} \frac{n_{k-1}}{n_k} \leq \frac{1}{\beta^{k-1-k_0}},$$

поскольку для всех $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \beta > 1$$

ввиду лакуарности. Так как $\beta > 1$, то $\frac{1}{\beta} < 1$, откуда получаем

$$\sum_{y \leq n_k} \frac{1}{n_k} = \sum_{y \leq n_k} \frac{n_{k_0}}{n_{k_0} n_k} \leq \frac{C(\beta)}{y},$$

где $C(\beta) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta}}$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \int_{|x| > 2|y|} \|K(x-y) - K(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)}^r dx &\leq 2 \int_{|x| > 2|y|} \sum_{y \leq n_{k-1}} \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x) = \\ &= 2 \sum_{y \leq n_{k-1}} \int_{|x| > 2|y|} \frac{1}{n_{k-1}} \chi_{[n_{k-1}, n_{k-1}+y]}(x) \leq 2 \sum_{y \leq n_{k-1}} \int_{n_{k-1}}^{n_{k-1}+y} \frac{1}{n_{k-1}} \leq 2 \sum_{y \leq n_{k-1}} \frac{y}{n_{k-1}} = 2C(\beta). \end{aligned}$$

Если предположить, что $x \leq 0$, $y \leq 0$, получим $y > x$, поскольку $|x| > 2|y|$. В этом случае $\Phi_k(x, y) = 0$, так как $x \notin [y, y+n_k] \cup [y, n_k]$. То же самое верно и для $x \leq 0$, $y \geq 0$, поскольку в этом случае $x < y$. Если же $x \geq 0$, $y \leq 0$, получаем ситуацию, аналогичную первому случаю. Поэтому нам достаточно оценить

$$\Phi_k(x, y) = \frac{1}{n_k} \chi_{[n_k, y+n_k]}(x).$$

С другой стороны, поскольку последовательность (n_k) лакуарна, имеем

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \beta > 1,$$

откуда существует константа $C(\beta)$ такая, что

$$\sum_{y \leq n_k} \frac{1}{n_k} \leq \frac{C(\beta)}{y}.$$

Итак, получили ту же ситуацию, что и в первом случае. $\square$

Для доказательства нашего основного результата также понадобится

Теорема 3. Пусть $2 \leq \rho < \infty$. Тогда для любого $1 < s < \infty$ и любой $(f_j) \in L_w^p(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ взвешенное неравенство

$$\left\| \left(\sum_j (\mathcal{V}_\rho f_j)^s \right)^{1/s} \right\|_{L_w^p} \leq C_{p,s}(w) \left\| \left(\sum_j |f_j|^s \right)^{1/s} \right\|_{L_w^p}$$

выполняется, если $w \in A_{p/r'}$ и $r' \leq p < \infty$ или если $w \in A_p^{r'}$ и $1 < p \leq r'$. Аналогично, если $w(x)^{r'} \in A_1$, то неравенство слабого типа

$$w \left(\left\{ x : \left(\sum_j (\mathcal{V}_\rho f_j(x))^s \right)^{1/s} > \lambda \right\} \right) \leq C_s(w) \frac{1}{\lambda} \int \left(\sum_j |f_j(x)|^s \right)^{1/s} w(x) dx$$

выполняется для любой $(f_j) \in L_w^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Доказательство представлено в ([3], теорема 12).

Основным результатом статьи является

Теорема 4. Пусть $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, и $\rho \geq 2$. Предположим, что (n_k) — лакунарная последовательность. Тогда существует положительная константа C такая, что

$$\|\mathcal{V}_\rho f\|_{L_w^1} \leq C \|f\|_{H_w^1}$$

для всех $f \in H_w^1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть K — ядерный оператор, определенный в теореме 2, зададим

$$Tf(x) = \{K * f(x)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}.$$

Ясно, что

$$\mathcal{V}_\rho f(x) = \|Tf(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)}.$$

Пусть $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. Возьмем интервал $I = I(x_0; R)$ в $\mathbb{R}$ с центром в x_0 и радиуса R , через $\tilde{I}$ обозначим удвоенный интервал $\tilde{I} = I(x_0; 2R)$. Для начала заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}-\tilde{I}} \|Tf(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} w(x) dx \leq C \|f\|_{L_w^1}$$

для любой $f \in L_w^1$ с носителем I такой, что $\int f(x) dx = 0$. Действительно, для такой функции f

$$Tf(x) = \int_I \{K(x-y) - K(x-x_0)\} f(y) dy \quad (x \in \tilde{I}),$$

и ввиду теоремы Фубини и теоремы 2 получаем

$$\int_{\mathbb{R}-\tilde{I}} \|Tf(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} w(x) dx \leq \int \int_{|x-x_0| \geq 2R > 2|y-x_0|} \|\{K(x-y) - K(x-x_0)\} f(y)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} dy w(x) dx \leq$$

$$\leq C \int_{|y-x_0|<R} |f(y)|w(y) dy,$$

что и требовалось.

Пусть теперь a — атом в $H_w^1(\mathbb{R})$ с носителем интервалом J , а I — наименьший шар, содержащий J , интервал $\tilde{I}$ определен выше. Тогда существует константа $C_1 > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}-\tilde{I}} \|Ta(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} w(x) dx \leq C_1.$$

С другой стороны, по теореме 3 существует положительная константа C_2 такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|Ta(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)}^p w(x) dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} |a(x)|^p w(x) dx.$$

Таким образом, получаем

$$\int_{\tilde{I}} \|Ta(x)\|_{\ell^\rho(\mathbb{Z}^+)} w(x) dx \leq C_3 \|a\|_{L_w^p} (Cw(J))^{1/p'} \leq \text{const.}$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Demir S. *H^p spaces and inequalities in ergodic theory*, Ph.D Thesis (University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 1999).
- [2] Garcia-Cuerva J. *Weighted H^p spaces*, Diss. Math. **162**, 1–63 (1979).
- [3] Demir S. *Variational inequalities for the differences of averages over lacunary sequences*, New York J. Math. **28**, 1099–1111 (2022).

Сакин Демир

Университет Агры Ибрагима Чечена,

г. Агры, 04100, Турция,

e-mail: sakin.demir@gmail.com

S. Demir

The variation operator of differences of averages over lacunary sequences maps $H_w^1(\mathbb{R})$ to $L_w^1(\mathbb{R})$

Abstract. Let f be a locally integrable function defined on $\mathbb{R}$, and (n_k) be a lacunary sequence. Define

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x-t) dt,$$

and let

$$\mathcal{V}_\rho f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k} f(x) - A_{n_{k-1}} f(x)|^\rho \right)^{1/\rho}.$$

Suppose that $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, and $\rho \geq 2$. Then, there exists a positive constant C such that

$$\|\mathcal{V}_\rho f\|_{L_w^1} \leq C \|f\|_{H_w^1}$$

for all $f \in H_w^1(\mathbb{R})$.

Keywords: variation operator, weighted Hardy space, A_p weight.

Sakin Demir

Agri Ibrahim Cecen University,

Ağrı, 04100 Turkey,

e-mail: sakin.demir@gmail.com