

П. ГОШ, Т.К. САМАНТА

УПРАВЛЯЕМЫЕ РЕПЕРЫ В n -ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Аннотация. Вводятся понятия управляемого репера и дуального к нему репера в n -гильбертовом пространстве, обсуждаются некоторые их свойства. Также управляемый репер изучается в тензорном произведении n -гильбертовых пространств, получена связь между управляемым репером и ограниченным линейным оператором в тензорном произведении n -гильбертовых пространств. Наконец, рассматривается прямая сумма управляемых реперов в n -гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: n -нормированное пространство, n -предгильбертово пространство, тензорное произведение гильбертовых пространств, репер, дуальный репер, управляемый репер.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-5-8-29

ВВЕДЕНИЕ

При изучении векторных пространств главной характеристикой базиса является возможность представить любой элемент пространства в виде линейной комбинации векторов базиса. Репер — это тоже последовательность элементов гильбертова пространства, для которой любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации элементов репера. Однако в этом случае соответствующие коэффициенты не обязательно единственны. Таким образом, репер можно рассматривать как обобщение понятия базиса. Традиционно реперы применялись в обработке изображений и сигналов, сжатии данных, негармонических рядах Фурье и в теории сэмплирования. В последнее время появляется все больше приложений теории реперов к задачам чистой и прикладной математики, физики, инженерного дела, компьютерных наук и т.д. В 1946 г. Д. Габор [1] впервые предложил технику перестройки сигналов с использованием семейства элементарных сигналов. В 1952 г. Р. Даффин и А. Шеффер в фундаментальной работе [2] использовали суть метода Габора для определения репера в гильбертовом пространстве. Впоследствии в начале эры вейвлетов в 1986 г. И. Добеши и др. [3] заметили, что реперы могут быть использованы для нахождения разложения в ряд функций из $L^2(\mathbb{R})$, очень похожего на разложение в ортонормированном базисе. Управляемый репер является одним из новейших обобщений репера в гильбертовом пространстве. Управляемый репер для сферических вейвлетов был предложен И. Богдановой и др. [4] с целью получения численно более эффективного алгоритма аппроксимации. Далее П. Балаз [5] разработал концепцию взвешенного и управляемого репера в гильбертовом пространстве.

Тензорное произведение гильбертовых пространств — определенное линейное пространство операторов. Основную его концепцию представил С. Рабинсон в работе [6]. Она была далее разработана Дж. Фолландом в [7], Р. Кадисоном и Дж. Рингроузом в [8].

Идея 2-предгильбертова пространства была впервые предложена С. Диминни и др. [9] в 1970х гг. В 1989 г. А. Мисиак [10] представил обобщение 2-предгильбертова пространства для $n \geq 2$. Реперы в 2-скалярном произведении изучались А.А. Арефиджаалом и Г. Садегхи [11].

В настоящей статье внимание фокусируется на изучении управляемого репера, ассоциированного с $(a_2, \dots, a_n)$, в n -гильбертовом пространстве. Мы покажем, что в n -гильбертовом пространстве любой управляемый репер, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$, является репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, при этом в обратную сторону это утверждение верно при выполнении некоторых достаточных условий. Будет доказано, что в тензорном произведении n -гильбертовых пространств образ управляемого репера под действием ограниченного линейного оператора является управляемым репером тогда и только тогда, когда оператор обратим. Также мы рассмотрим дуальный управляемый репер в тензорном произведении n -гильбертовых пространств и докажем, что прямая сумма управляемых реперов, ассоциированных с $(a_2, \dots, a_n)$, при выполнении некоторых достаточных условий снова является управляемым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема 1 ([12]). Пусть H_1, H_2 — два гильбертовых пространства и $U : H_1 \rightarrow H_2$ — ограниченный линейный оператор с замкнутым образом $\mathcal{R}_U$. Тогда существует ограниченный линейный оператор $U^\dagger : H_2 \rightarrow H_1$ такой, что $UU^\dagger x = x \quad \forall x \in \mathcal{R}_U$.

Оператор $U^\dagger$, определенный в теореме (1), называется псевдообратным к U .

Теорема 2 ([13]). Множество $\mathcal{S}(H_1)$ всех самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H_1 является частично упорядоченным по отношению к частичному порядку $\leq$, заданному для $T, S \in \mathcal{S}(H_1)$ условием

$$T \leq S \Leftrightarrow \langle Tf, f \rangle \leq \langle Sf, f \rangle \quad \forall f \in H_1.$$

Определение 1 ([13]). Самосопряженный оператор $U : H_1 \rightarrow H_1$ называется положительным, если $\langle Ux, x \rangle \geq 0$ для всех $x \in H_1$. Мы будем обозначать это свойство через $U \geq 0$. Самосопряженный оператор $V : H_1 \rightarrow H_1$ называется квадратным корнем из U , если $V^2 = U$. Если вдобавок $V \geq 0$, то V называется положительным квадратным корнем из U и обозначается через $V = U^{1/2}$.

Теорема 3 ([13]). Положительный квадратный корень $V : H_1 \rightarrow H_1$ из произвольного положительного самосопряженного оператора $U : H_1 \rightarrow H_1$ существует и единственен. Более того, оператор V коммутирует с любым ограниченным линейным оператором на H_1 , который коммутирует с U .

В комплексном гильбертовом пространстве любой ограниченный положительный оператор является самосопряженным и любые два ограниченных положительных оператора могут коммутировать друг с другом.

Определение 2 ([12]). Последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H_1 называется репером для H_1 , если существуют положительные константы A, B такие, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in H_1. \quad (1)$$

Константы A и B называются реперными границами. Если семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет только правому неравенству в (1), оно называется бесселевой последовательностью с границей B .

Определение 3 ([5]). Пусть C — ограниченный линейный оператор на H_1 , имеющий ограниченный обратный оператор. Репер, управляемый оператором C , или C -управляемый репер, — это семейство векторов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ в H_1 такое, что существуют константы $0 < A \leq B < \infty$, при которых

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle \langle Cf_i, f \rangle \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in H_1.$$

Оператор управляемого репера $S : H_1 \rightarrow H_1$ задается следующим образом:

$$Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle Cf_i \quad \forall f \in H_1.$$

Определение 4 ([14]). Тензорное произведение гильбертовых пространств $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ и $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ обозначается через $H_1 \otimes H_2$ и задается как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f \otimes g, f' \otimes g' \rangle = \langle f, f' \rangle_1 \langle g, g' \rangle_2 \quad \forall f, f' \in H_1, g, g' \in H_2.$$

Норма на $H_1 \otimes H_2$ определяется равенством

$$\|f \otimes g\| = \|f\|_1 \|g\|_2 \quad \forall f \in H_1, g \in H_2.$$

Пространство $H_1 \otimes H_2$ является гильбертовым по отношению к вышеупомянутому скалярному произведению.

Для $Q \in \mathcal{B}(H_1)$ и $T \in \mathcal{B}(H_2)$ тензорное произведение операторов Q и T обозначается через $Q \otimes T$ и задается равенством

$$(Q \otimes T)A = QAT^* \quad \forall A \in H_1 \otimes H_2.$$

Теорема 4 ([7]). Пусть $Q, Q' \in \mathcal{B}(H_1)$ и $T, T' \in \mathcal{B}(H_2)$. Тогда

- (i) $Q \otimes T \in \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ и $\|Q \otimes T\| = \|Q\| \|T\|$;
- (ii) $(Q \otimes T)(f \otimes g) = Qf \otimes Tg$ для всех $f \in H_1, g \in H_2$;
- (iii) $(Q \otimes T)(Q' \otimes T') = (QQ') \otimes (TT')$;
- (iv) $Q \otimes T$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы Q и T , и в таком случае $(Q \otimes T)^{-1} = (Q^{-1} \otimes T^{-1})$;
- (v) $(Q \otimes T)^* = (Q^* \otimes T^*)$.

Определение 5 ([15]). n -Нормой на линейном пространстве H (над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел) называется функция

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \|x_1, x_2, \dots, x_n\|, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in H,$$

из H^n во множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел такая, что для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ выполняются условия

- (i) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы;
- (ii) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ инвариантна относительно перестановок $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- (iii) $\|\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$;
- (iv) $\|x + y, x_2, \dots, x_n\| \leq \|x, x_2, \dots, x_n\| + \|y, x_2, \dots, x_n\|$.

Линейное пространство H , снабженное n -нормой $\|\cdot, \dots, \cdot\|$, называется линейным n -нормированным пространством.

Определение 6 ([10]). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и H — линейное пространство размерности больше или равной n над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел. n -Скалярным произведением на H называется отображение

$$(x, y, x_2, \dots, x_n) \mapsto \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle, \quad x, y, x_2, \dots, x_n \in H,$$

из H^{n+1} во множество $\mathbb{K}$ такое, что для любых $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ выполняются следующие условия:

- (i) $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle \geq 0$ и $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы;
- (ii) $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, y | x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \rangle$ для любой перестановки $(i_2, \dots, i_n)$ индексов $(2, \dots, n)$;
- (iii) $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \overline{\langle y, x | x_2, \dots, x_n \rangle}$;
- (iv) $\langle \alpha x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \alpha \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$;
- (v) $\langle x + y, z | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, z | x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y, z | x_2, \dots, x_n \rangle$.

Линейное пространство H , снабженное n -скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle$, называется n -предгильбертовым пространством.

Теорема 5 ([16]). В n -предгильбертовом пространстве $(H, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$

$$|\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle| \leq \|x, x_2, \dots, x_n\| \|y, x_2, \dots, x_n\|$$

для любых $x, y, x_2, \dots, x_n \in H$, где

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle}.$$

Это неравенство называется неравенством Коши–Шварца.

Определение 7 ([15]). Пусть $(H, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ — линейное n -нормированное пространство. Последовательность $\{x_k\}$ в H называется сходящейся к некоторому $x \in H$, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x, e_2, \dots, e_n\| = 0$$

для любых $e_2, \dots, e_n \in H$, и она называется последовательностью Коши, если

$$\lim_{l, k \rightarrow \infty} \|x_l - x_k, e_2, \dots, e_n\| = 0$$

для любых $e_2, \dots, e_n \in H$. Пространство H называется полным, если любая последовательность Коши в нем сходится в H . n -Предгильбертово пространство называется n -гильбертовым пространством, если оно полное по отношению к индуцированной в нем норме.

Определение 8 ([17]). Последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ в n -гильбертовом пространстве H называется репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что

$$A \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2 \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \quad (2)$$

для всех $f \in H$. Инфимум всех таких B называется оптимальной верхней границей репера, а супремум всех таких A — оптимальной нижней границей репера. Последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющая только правому неравенству в (2), называется бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$ с границей B .

Пусть L_F обозначает линейное подпространство n -гильбертова пространства H , натянутое на непустое конечное множество $F = \{a_2, a_3, \dots, a_n\}$, где $a_2, a_3, \dots, a_n$ — фиксированные элементы из H . Тогда фактор-пространство H/L_F является нормированным линейным пространством по отношению к норме

$$\|x + L_F\|_F = \|x, a_2, \dots, a_n\| \text{ для любых } x \in H.$$

Пусть M_F — прямое дополнение L_F , т.е. $H = L_F \oplus M_F$. Определим

$$\langle x, y \rangle_F = \langle x, y | a_2, \dots, a_n \rangle \text{ на } H.$$

Тогда $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ является полускалярным произведением на H , индуцирующим скалярное произведение на фактор-пространстве H/L_F , определяемое формулой

$$\langle x + L_F, y + L_F \rangle_F = \langle x, y \rangle_F = \langle x, y | a_2, \dots, a_n \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Естественным образом отождествляя H/L_F с M_F , мы получаем скалярное произведение на M_F . Теперь для любых $x \in M_F$ положим $\|x\|_F = \sqrt{\langle x, x \rangle_F}$, тогда легко показать, что $(M_F, \|\cdot\|_F)$ — нормированное пространство. Пусть H_F — прямое дополнение предгильбертова пространства M_F .

Теорема 6 ([17]). Пусть H — n -гильбертово пространство. Тогда $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subseteq H$ — репер, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A, B , если и только если он является репером для гильбертова пространства H_F с границами A, B .

Определение 9 ([17]). Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — репер для H , ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$. Тогда ограниченный линейный оператор $T_F : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H_F$, заданный формулой $T_F\{c_i\} = \sum_{i=1}^\infty c_i f_i$, называется предреперным оператором, а сопряженный к нему оператор, заданный формулой

$$T_F^* : H_F \rightarrow l^2(\mathbb{N}), \quad T_F^* f = \{\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle\}_{i=1}^\infty,$$

называется аналитическим оператором. Оператор $S_F : H_F \rightarrow H_F$, заданный формулой

$$S_F f = T_F T_F^* f = \sum_{i=1}^\infty \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle f_i \text{ для всех } f \in H_F,$$

называется реперным оператором.

Легко проверить, что $AI_F \leq S_F \leq BI_F$, где I_F — тождественный оператор на H_F . Поскольку S_F^{-1} коммутирует и с S_F , и с I_F , то, умножая неравенство $AI_F \leq S_F \leq BI_F$ на S_F^{-1} , получаем $B^{-1}I_F \leq S_F^{-1} \leq A^{-1}I_F$. Больше информации о реперах в n -гильбертовых пространствах и их тензорном произведении можно найти в работах [17]–[19].

Всюду дальше в данной статье $(H, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ является n -гильбертовым пространством, I_F — тождественный оператор на H_F , $\mathcal{B}(H_F)$ обозначает пространство всех ограниченных линейных операторов на H_F , $\mathcal{GB}(H_F)$ — множество всех ограниченных линейных операторов, имеющих ограниченный обратный оператор. Если $S, R \in \mathcal{GB}(H_F)$, то R^*, R^{-1} и SR также принадлежат $\mathcal{GB}(H_F)$; $\mathcal{GB}^+(H_F)$ — множество всех положительных операторов в $\mathcal{GB}(H_F)$, а C, C_1, C_2 — обратимые операторы в $\mathcal{GB}(H_F)$; $l^2(\mathbb{N})$ обозначает пространство суммируемых с квадратом скалярнозначных последовательностей, индексным множеством которых является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

2. УПРАВЛЯЕМЫЙ РЕПЕР В n -ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе вводится понятие управляемого репера в n -гильбертовом пространстве и обсуждаются некоторые его свойства. В конце раздела обсуждается дуальный управляемый репер в n -гильбертовом пространстве.

Определение 10. Пусть $C \in \mathcal{GB}(H_F)$. Репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ и управляемым оператором C , или C -управляемым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, называется семейство векторов $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ в H такое, что существуют константы $0 < A \leq B < \infty$, удовлетворяющие условию

$$A \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \quad \forall f \in H_F. \quad (3)$$

Константы A и B называются, соответственно, нижней и верхней границами C -управляемого репера, ассоциированного с $(a_2, \dots, a_n)$.

- (i) Семейство векторов $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ называется C -управляемым узким репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, если $A = B$, и оно называется C -управляемым парсевалевым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, если $A = B = 1$.
- (ii) Если в (3) выполняется только правое неравенство, то это семейство называется C -управляемой бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$ с границей B .

Замечание 1. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C -управляемым узким репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границей A . Тогда для любого элемента $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle &= A \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f, A^{-1/2} f_i | a_2, \dots, a_n \right\rangle \left\langle C A^{-1/2} f_i, f | a_2, \dots, a_n \right\rangle &= \|f, a_2, \dots, a_n\|^2. \end{aligned}$$

Откуда $\{A^{-1/2} f_i\}_{i=1}^\infty$ является C -управляемым парсевалевым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Определение 11. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C -управляемой бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$. Оператор $T_C : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H_F$, заданный формулой $T_C(\{c_i\}_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i C f_i$, называется предреперным оператором или синтетическим оператором. Сопряженный оператор

$$T_C^* : H_F \rightarrow l^2(\mathbb{N}), \quad T_C^* f = \{\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad f \in H_F,$$

называется аналитическим оператором. Для C -управляемого репера реперный оператор $S_C : H_F \rightarrow H_F$ задается формулой

$$S_C f = T_C T_C^* f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C f_i \quad \forall f \in H_F.$$

Для любого $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned} \langle S_C f, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, то из (3) находим

$$A \langle f, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \leq \langle S_C f, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \leq B \langle f, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \Rightarrow A I_F \leq S_C \leq B I_F.$$

Отсюда можно заключить, что S_C является ограниченным и положительным, а следовательно, обратимым.

Теорема 7. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемой бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$ с границей B . Оператор

$$U : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H_F, \quad U(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i C f_i,$$

корректно определен и является ограниченным оператором из $l^2(\mathbb{N})$ в H_F , при этом

$$\|U\| \leq \sqrt{B} \|C^{1/2}\|.$$

Доказательство. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемой бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$ с границей B . Тогда для любого $f \in H_F$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|^2.$$

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Для $l > k$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^l a_i C f_i - \sum_{i=1}^k a_i C f_i \right\|_F^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^l a_i C f_i, a_2, \dots, a_n \right\|^2 = \\ &= \sup_{f \in H_F, \|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \left\{ \left| \left\langle \sum_{i=k+1}^l a_i C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle \right|^2 \right\} = \\ &= \sup_{f \in H_F, \|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \left\{ \left| \sum_{i=k+1}^l a_i \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq \sup_{f \in H_F, \|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \left\{ \sum_{i=k+1}^l \langle f, C f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \right\} \sum_{i=k+1}^l |a_i|^2 \leq \\ &\leq \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \left\langle \sum_{i=k+1}^l \langle f, C f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle \|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|^2 = \\ &= \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \langle C S_C f, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|^2 = \\ &= \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \left\langle (C S_C)^{1/2} f, (C S_C)^{1/2} f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle \|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \|(CS_C)^{1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 \|\{a_i\}_{i=1}^\infty\|^2 \leq \\
&\leq \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \|C^{1/2}\|^2 \|S_C^{1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 \|\{a_i\}_{i=1}^\infty\|^2 = \\
&= \sup_{\|f, a_2, \dots, a_n\|=1} \|C^{1/2}\|^2 \langle S_C f, f | a_2, \dots, a_n \rangle \|\{a_i\}_{i=1}^\infty\|^2 \leq B \|C^{1/2}\|^2 \|\{a_i\}_{i=1}^\infty\|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\sum_{i=1}^k a_i C f_i$ — последовательность Коши, сходящаяся в H_F . Таким образом, U корректно определен и является ограниченным оператором, при этом $\|U\| \leq \sqrt{B} \|C^{1/2}\|$. $\square$

Для $f \in H_F$ и $\{a_i\}_{i=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ получаем

$$\langle f, U \{a_i\}_{i=1}^\infty | a_2, \dots, a_n \rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^\infty a_i C f_i | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \sum_{i=1}^\infty \bar{a}_i \langle C f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle.$$

Поэтому

$$\langle f, U \{a_i\}_{i=1}^\infty \rangle_F = \langle \{ \langle C f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \}, \{a_i\}_{i=1}^\infty \rangle \Rightarrow U^* f = \{ \langle C f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \}_{i=1}^\infty \quad \forall f \in H_F.$$

Следующая теорема показывает, что любой управляемый репер, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$, является репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Теорема 8. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, и $C \in \mathcal{GB}^+(H_F)$. Тогда $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — репер для H , ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$.

Доказательство. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A и B . Тогда для любого $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned}
A \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 &= A \|C^{1/2} C^{-1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq A \|C^{1/2}\|^2 \|C^{-1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \\
&\leq \|C^{1/2}\|^2 \sum_{i=1}^\infty \left\langle C^{-1/2} f, f_i | a_2, \dots, a_n \right\rangle \left\langle C f_i, C^{-1/2} f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{1/2}\|^2 \sum_{i=1}^\infty \left\langle C^{-1/2} f, f_i | a_2, \dots, a_n \right\rangle \left\langle f_i, C^{1/2} f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{1/2}\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^\infty \left\langle C^{-1/2} f, f_i | a_2, \dots, a_n \right\rangle f_i, C^{1/2} f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{1/2}\|^2 \left\langle S_F C^{-1/2} f, C^{1/2} f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{1/2}\|^2 \langle S_F f, f | a_2, \dots, a_n \rangle = \|C^{1/2}\|^2 \sum_{i=1}^\infty |\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow A \|C^{1/2}\|^{-2} \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty |\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2.
\end{aligned}$$

С другой стороны, для любого $f \in H_F$ имеем

$$\sum_{i=1}^\infty |\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2 = \langle f, S_F f | a_2, \dots, a_n \rangle = \langle f, C^{-1} C S_F f | a_2, \dots, a_n \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle (C^{-1}CS_F)^{1/2} f, (C^{-1}CS_F)^{1/2} f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle = \|(C^{-1}CS_F)^{1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \\
&\leq \|C^{-1/2}\|^2 \|(CS_F)^{1/2} f, a_2, \dots, a_n\|^2 = \|C^{-1/2}\|^2 \langle f, CS_F f \mid a_2, \dots, a_n \rangle = \\
&= \|C^{-1/2}\|^2 \langle f, S_C f \mid a_2, \dots, a_n \rangle = \|C^{-1/2}\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \leq \\
&\leq B \|C^{-1/2}\|^2 \|f, a_2, \dots, a_n\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами $A\|C^{1/2}\|^{-2}$ и $B\|C^{-1/2}\|^2$. $\square$

Следующая теорема показывает, что при тех же условиях любой репер, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$, является управляемым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Теорема 9. Пусть $C \in \mathcal{GB}^+(H_F)$ — самосопряженный оператор. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — репер для H , ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$, то $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Доказательство. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — репер для H , ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A и B . Тогда для любого $f \in H_F$ получаем

$$\begin{aligned}
A \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 &= A \left\| C^{-1/2} C^{1/2} f, a_2, \dots, a_n \right\|^2 \leq A \|C^{-1/2}\|^2 \left\| C^{1/2} f, a_2, \dots, a_n \right\|^2 \leq \\
&\leq \|C^{-1/2}\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle C^{1/2} f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle \left\langle C^{1/2} f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{-1/2}\|^2 \left\langle C^{1/2} f, \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f_i, C^{1/2} f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\
&= \|C^{-1/2}\|^2 \left\langle C^{1/2} f, C^{1/2} S_F f \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle = \|C^{-1/2}\|^2 \langle f, CS_F f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \Rightarrow \\
&\Rightarrow A \|C^{-1/2}\|^{-2} \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle.
\end{aligned}$$

С другой стороны, для любого $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle = \\
&= \langle f, CS_F f \mid a_2, \dots, a_n \rangle = \langle C f, S_F f \mid a_2, \dots, a_n \rangle \leq \|C f, a_2, \dots, a_n\| \|S_F f, a_2, \dots, a_n\| \leq \\
&\leq \|C\| \|f, a_2, \dots, a_n\| B \|f, a_2, \dots, a_n\| = B \|C\| \|f, a_2, \dots, a_n\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$. $\square$

Для любого управляемого репера, ассоциированного с $(a_2, \dots, a_n)$, получим канонический управляемый узкий репер, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$ с реперной границей 1.

Теорема 10. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, и S_C — его реперный оператор. Пусть S_C^{-1} коммутирует с C . Тогда $\{S_C^{-1/2} f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым парсевалевым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Доказательство. Существование единственного положительного квадратного корня из S_C^{-1} следует из теоремы 2; поскольку $S_C^{-1/2}$ является пределом последовательности многочленов в S_C^{-1} , то он коммутирует с S_C^{-1} , а значит, и с S_C . Тогда для любого $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned} f &= S_C^{-1/2} S_C S_C^{-1/2} f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S_C^{-1/2} f_i | a_2, \dots, a_n \rangle S_C^{-1/2} C f_i = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S_C^{-1/2} f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C S_C^{-1/2} f_i. \end{aligned}$$

Теперь для любого $f \in H_F$ получаем

$$\begin{aligned} \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 &= \langle f, f | a_2, \dots, a_n \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S_C^{-1/2} f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C S_C^{-1/2} f_i, f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S_C^{-1/2} f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C S_C^{-1/2} f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{S_C^{-1/2} f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым парсевалевым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$. $\square$

Рассмотрим теперь понятие дуального управляемого репера в n -гильбертовом пространстве.

Определение 12. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$. Тогда C -управляемый репер $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, ассоциированный с $(a_2, \dots, a_n)$, для которого

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i | a_2, \dots, a_n \rangle C f_i \quad \forall f \in H_F,$$

называется (альтернативным) дуальным к $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ управляемым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

Теорема 11. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — две C -управляемые бесселевы последовательности в H , ассоциированные с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами B и D соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i | a_2, \dots, a_n \rangle C f_i \quad \forall f \in H_F,$
- (ii) $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C g_i \quad \forall f \in H_F.$

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Пусть T_C и T'_C — предреперные операторы для $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ соответственно. Беря композицию T_C с сопряженным оператором для T'_C , для любых $f \in H_F$ получаем

$$T_C (T'_C)^* : H_F \rightarrow H_F, \quad T_C (T'_C)^* f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i | a_2, \dots, a_n \rangle C f_i.$$

Теперь утверждение (i) может быть записано в терминах предреперных операторов как $T_C(T'_C)^* = I_F$, что эквивалентно $T'_C T_C^* = I_F$. Откуда для любого $f \in H_F$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C g_i.$$

Аналогично получается импликация (ii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Замечание 2. Предположим, что выполняется одно из двух условий теоремы 11. Тогда, используя неравенство Коши–Шварца, для любого $f \in H_F$ имеем

$$\begin{aligned} \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 &= \langle f, f | a_2, \dots, a_n \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle C g_i, f | a_2, \dots, a_n \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C g_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle C f, g_i | a_2, \dots, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\|C^{-1/2}\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\|C^{-1/2}\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle C f, g_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C g_i, C f | a_2, \dots, a_n \rangle \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle \right)^{1/2} D^{1/2} \|C^{-1/2}\|^2 \|C f, a_2, \dots, a_n\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{D \|C^{-1/2}\|^4 \|C\|^2} \|f, a_2, \dots, a_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle \langle C f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами $\frac{1}{D \|C^{-1/2}\|^4 \|C\|^2}$ и B . Аналогично можно показать, что $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ также является C -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$.

3. УПРАВЛЯЕМЫЙ РЕПЕР В ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ n -ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В данном разделе предложено понятие управляемого репера в тензорном произведении n -гильбертовых пространств и дана его характеристика. Также описан дуальный управляемый репер в тензорном произведении n -гильбертовых пространств. Наконец, рассмотрена прямая сумма управляемых реперов в n -гильбертовых пространствах.

Пусть H и K — два n -гильбертова пространства, ассоциированные с n -скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle_2$ соответственно. Тензорное произведение H и K обозначается через $H \otimes K$ и определяется как n -предгильбертово пространство, ассоциированное с n -скалярным произведением

$$\langle f \otimes g, f_1 \otimes g_1 | f_2 \otimes g_2, \dots, f_n \otimes g_n \rangle = \langle f, f_1 | f_2, \dots, f_n \rangle_1 \langle g, g_1 | g_2, \dots, g_n \rangle_2 \quad (4)$$

для всех $f, f_1, f_2, \dots, f_n \in H$ и $g, g_1, g_2, \dots, g_n \in K$. Тогда n -норма на $H \otimes K$ определяется формулой

$$\|f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2, \dots, f_n \otimes g_n\| = \|f_1, f_2, \dots, f_n\|_1 \|g_1, g_2, \dots, g_n\|_2 \quad (5)$$

для всех $f_1, f_2, \dots, f_n \in H$ и $g_1, g_2, \dots, g_n \in K$, где n -нормы $\|\cdot, \dots, \cdot\|_1$ и $\|\cdot, \dots, \cdot\|_2$ порождены $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle_2$ соответственно. Действительно, пространство $H \otimes K$ является полным по отношению к вышеприведенному n -скалярному произведению. Поэтому пространство $H \otimes K$ является n -гильбертовым.

Рассмотрим $G = \{b_2, b_3, \dots, b_n\}$, где $b_2, b_3, \dots, b_n$ — фиксированные элементы из K , и L_G — линейное подпространство K , натянутое на G . Определим теперь гильбертово пространство K_G со скалярным произведением

$$\langle p + L_G, q + L_G \rangle_G = \langle p, q \rangle_G = \langle p, q | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \quad \forall p, q \in K.$$

Замечание 3. В соответствии с определением 4 $H_F \otimes K_G$ является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению

$$\langle p \otimes q, p' \otimes q' \rangle = \langle p, p' \rangle_F \langle q, q' \rangle_G$$

для всех $p, p' \in H_F$ и $q, q' \in K_G$.

Определение 13. Пусть $C_1 \otimes C_2 \in \mathcal{GB}(H_F \otimes K_G)$. Тогда последовательность $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ в $H \otimes K$ называется $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$ для $H \otimes K$, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что

$$\begin{aligned} A \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\ &\times \langle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j), f \otimes g | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \leq \\ &\leq B \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2 \quad \forall f \otimes g \in H_F \otimes K_G, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательности векторов из H и K соответственно, и $a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3, \dots, a_n \otimes b_n$ — фиксированные элементы в $H \otimes K$. Константы A, B называются реперными границами. Если последовательность $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ удовлетворяет только правому неравенству в (6), то она называется $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемой бесселевой последовательностью в $H \otimes K$, ассоциированной с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$.

Теорема 12. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательности векторов в n -гильбертовых пространствах H и K . Последовательность $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty \subseteq H \otimes K$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$, тогда и только тогда, когда $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, и $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Тогда для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G - \{\theta \otimes \theta\}$ существуют константы $A, B > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} A \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\ &\times \langle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j), f \otimes g | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \leq B \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2. \end{aligned}$$

Используя (4), (5), получаем

$$\begin{aligned}
& A \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \times \\
& \times \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow A \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \times \\
& \times \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2.
\end{aligned}$$

Элемент $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ является ненулевым, т. е. $f \in H_F$ и $g \in K_G$ — ненулевые элементы. Мы можем предположить здесь, что $f_i, C_1 f_i$ и $a_2, \dots, a_n$ линейно независимы, а также, что $g_j, C_2 g_j$ и $b_2, \dots, b_n$ линейно независимы. Тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2, \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1
\end{aligned}$$

ненулевые. Поэтому из неравенства выше получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{A \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \leq \\
& \leq \frac{B \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$A_1 \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \leq B_1 \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \quad \forall f \in H_F,$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \inf_{g \in K_G} \left\{ \frac{A \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2} \right\}, \\
B_1 &= \sup_{g \in K_G} \left\{ \frac{B \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2} \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$. Аналогично может быть показано, что $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$.

В обратную сторону предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A, B , и $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$ с границами C, D . Тогда

$$A \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \quad \forall f \in H_F,$$

$$C \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \leq D \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \quad \forall g \in K_G.$$

Перемножая два неравенства выше и используя (4), (5), получаем

$$\begin{aligned} AC \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\ &\times \langle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j), f \otimes g | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \leq \\ &\leq BD \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2 \quad \forall f \otimes g \in H_F \otimes K_G. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. $\square$

Замечание 4. Пусть $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. В соответствии с определением 11 реперный оператор $S_{C_1 \otimes C_2} : H_F \otimes K_G \rightarrow H_F \otimes K_G$ задается формулой

$$S_{C_1 \otimes C_2}(f \otimes g) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j)$$

для всех $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$.

Предложение 1. Если S_{C_1}, S_{C_2} и $S_{C_1 \otimes C_2}$ — соответствующие реперные операторы для $\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{g_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ соответственно, то

$$S_{C_1 \otimes C_2} = S_{C_1} \otimes S_{C_2} \text{ и } S_{C_1 \otimes C_2}^{-1} = S_{C_1}^{-1} \otimes S_{C_2}^{-1}.$$

Доказательство. Поскольку $S_{C_1 \otimes C_2}$ является реперным оператором для $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$, то

$$\begin{aligned} S_{C_1 \otimes C_2}(f \otimes g) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j | a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 (C_1 f_i \otimes C_2 g_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 C_1 f_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j | b_2, \dots, b_n \rangle_2 C_2 g_j \right) = \\ &= S_{C_1} f \otimes S_{C_2} g = (S_{C_1} \otimes S_{C_2})(f \otimes g) \quad \forall f \otimes g \in H_F \otimes K_G. \end{aligned}$$

Таким образом, $S_{C_1 \otimes C_2} = S_{C_1} \otimes S_{C_2}$. Поскольку S_{C_1} и S_{C_2} обратимы, то по теореме 4 (iv) $S_{C_1 \otimes C_2}^{-1} = (S_{C_1} \otimes S_{C_2})^{-1} = S_{C_1}^{-1} \otimes S_{C_2}^{-1}$. $\square$

Предложение 2. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A, B , $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$ с границами C, D , а S_{C_1} и S_{C_2} — их реперные операторы соответственно. Тогда $ACI_{F \otimes G} \leq S_{C_1 \otimes C_2} \leq BDI_{F \otimes G}$, где $I_{F \otimes G}$ — тождественный оператор на $H_F \otimes K_G$.

Доказательство. Поскольку S_{C_1} и S_{C_2} являются реперными операторами, то

$$AI_F \leq S_{C_1} \leq BI_F, \quad CI_G \leq S_{C_2} \leq DI_G,$$

где I_F и I_G — тождественные операторы на H_F и K_G соответственно. Беря тензорное произведение двух вышеприведенных неравенств, получаем

$$AC(I_F \otimes I_G) \leq (S_{C_1} \otimes S_{C_2}) \leq BD(I_F \otimes I_G) \Rightarrow ACI_{F \otimes G} \leq S_{C_1 \otimes C_2} \leq BDI_{F \otimes G}.$$

□

Представим теперь формулу разложения по реперу в $H \otimes K$.

Предложение 3. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$, а S_{C_1} и S_{C_2} — их реперные операторы соответственно. Тогда для любого элемента $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$f \otimes g = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle f \otimes g, S_{C_1 \otimes C_2}^{-1}(f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \right\rangle (C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j),$$

$$f \otimes g = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle S_{C_1 \otimes C_2}^{-1}(C_1 \otimes C_2)(f_i \otimes g_j).$$

При этом оба ряда сходятся безусловно для всех $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$.

Доказательство. Поскольку S_{C_1} — реперный оператор для $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, то

$$f = S_{C_1} S_{C_1}^{-1} f = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle S_{C_1}^{-1} f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle_1 C_1 f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f, S_{C_1}^{-1} f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle_1 C_1 f_i \quad \forall f \in H_F.$$

Аналогично можно показать, что

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle g, S_{C_2}^{-1} g_j \mid b_2, \dots, b_n \right\rangle_2 C_2 g_j \quad \forall g \in K_G.$$

Таким образом, для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$\begin{aligned} f \otimes g &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f, S_{C_1}^{-1} f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle_1 C_1 f_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle g, S_{C_2}^{-1} g_j \mid b_2, \dots, b_n \right\rangle_2 C_2 g_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle f, S_{C_1}^{-1} f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle_1 \left\langle g, S_{C_2}^{-1} g_j \mid b_2, \dots, b_n \right\rangle_2 (C_1 f_i \otimes C_2 g_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle f \otimes g, S_{C_1}^{-1} f_i \otimes S_{C_2}^{-1} g_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \right\rangle (C_1 f_i \otimes C_2 g_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle f \otimes g, (S_{C_1}^{-1} \otimes S_{C_2}^{-1})(f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \right\rangle (C_1 f_i \otimes C_2 g_j) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\langle f \otimes g, S_{C_1 \otimes C_2}^{-1} (f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \right\rangle (C_1 \otimes C_2) (f_i \otimes g_j).$$

Поскольку

$$\left\{ \left\langle f, S_{C_1}^{-1} f_i \mid a_2, \dots, a_n \right\rangle_1 \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad \left\{ \left\langle g, S_{C_2}^{-1} g_j \mid b_2, \dots, b_n \right\rangle_2 \right\}_{j=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}),$$

$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемой бесселевой последовательностью в H , ассоциированной с $(a_2, \dots, a_n)$, а $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемой бесселевой последовательностью в K , ассоциированной с $(b_2, \dots, b_n)$, вышеупомянутые ряды сходятся безусловно. С другой стороны, для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$\begin{aligned} f \otimes g &= S_{C_1}^{-1} S_{C_1} f \otimes S_{C_2}^{-1} S_{C_2} g = \\ &= S_{C_1}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 C_1 f_i \right) \otimes S_{C_2}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 C_2 g_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle S_{C_1 \otimes C_2}^{-1} (C_1 \otimes C_2) (f_i \otimes g_j). \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемым узким репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, а $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемым узким репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$, с границами A_1 и A_2 соответственно. Тогда для любого элемента $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$f \otimes g = \frac{1}{A_1 A_2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, f_i \otimes g_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2) (f_i \otimes g_j).$$

В следующей теореме мы показываем, что образ управляемого репера для $H \otimes K$, ассоциированного с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$, относительно ограниченного линейного оператора является управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$, тогда и только тогда, когда ограниченный линейный оператор обратим.

Теорема 13. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A, B , $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$ с границами C, D , а S_{C_1} и S_{C_2} — их реперные операторы соответственно. Пусть также C_1 и C_2 коммутируют с U_1 и U_2 соответственно. Тогда $\{\Delta_{ij} = (U_1 \otimes U_2) (f_i \otimes g_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$, тогда и только тогда, когда $U_1 \otimes U_2$ является обратимым оператором на $H_F \otimes K_G$.

Доказательство. Сначала предположим, что $U_1 \otimes U_2$ обратим на $H_F \otimes K_G$. Тогда по теореме 4 U_1 и U_2 обратимы на H_F и K_G соответственно. Тогда для любых $f \in H_F$ и $g \in K_G$ имеем

$$\|f, a_2, \dots, a_n\|_1 \leq \|U_1^{-1}\| \|U_1^*(f), a_2, \dots, a_n\|_1, \quad (7)$$

$$\|g, b_2, \dots, b_n\|_2 \leq \|U_2^{-1}\| \|U_2^*(g), b_2, \dots, b_n\|_2. \quad (8)$$

Теперь для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, (U_1 \otimes U_2) (f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\
& \times \langle (C_1 \otimes C_2) (U_1 \otimes U_2) (f_i \otimes g_j), f \otimes g \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle = \\
& = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, (U_1 f_i \otimes U_2 g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\
& \times \langle (C_1 U_1 f_i \otimes C_2 U_2 g_j), f \otimes g \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle = \\
& = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f, U_1 f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle g, U_2 g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \times \\
& \times \langle C_1 U_1 f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_2 U_2 g_j, g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 = \\
& = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle U_1^* f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle U_2^* g, g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \times \\
& \times \langle C_1 f_i, U_1^* f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_2 g_j, U_2^* g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 = \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \langle U_1^* f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, U_1^* f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \times \\
& \times \sum_{j=1}^{\infty} \langle U_2^* g, g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, U_2^* g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \leq \\
& \leq BD \|U_1^* f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|U_2^* g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \leq \\
& \leq BD \|U_1^*\|^2 \|U_2^*\|^2 \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 = \\
& = BD \|U_1 \otimes U_2\|^2 \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, (U_1 \otimes U_2) (f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\
& \times \langle (C_1 \otimes C_2) (U_1 \otimes U_2) (f_i \otimes g_j), f \otimes g \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \geq \\
& \geq AC \|U_1^* f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|U_2^* g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \geq \\
& \geq \frac{AC \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2}{\|U_1^{-1}\|^2 \|U_2^{-1}\|^2} \quad (\text{см. (7), (8)}) = \\
& = \frac{AC}{\|(U_1 \otimes U_2)^{-1}\|^2} \|f \otimes g, a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n\|^2.
\end{aligned}$$

Откуда последовательность $\{\Delta_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$.

Обратно, предположим, что $\{\Delta_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, \Delta_{ij} \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2) \Delta_{ij} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, U_1 f_i \otimes U_2 g_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 U_1 f_i \otimes C_2 U_2 g_j) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle U_1^* f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 U_1 C_1 f_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle U_2^* g, g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 U_2 C_2 g_j \right) = \\
&= U_1 S_{C_1} U_1^* f \otimes U_2 S_{C_2} U_2^* g = (U_1 \otimes U_2) (S_{C_1} \otimes S_{C_2}) (U_1^* \otimes U_2^*) (f \otimes g) = \\
&= (U_1 \otimes U_2) S_{C_1 \otimes C_2} (U_1 \otimes U_2)^* (f \otimes g).
\end{aligned}$$

Откуда реперным оператором для $\{\Delta_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ является $(U_1 \otimes U_2) S_{C_1 \otimes C_2} (U_1 \otimes U_2)^*$, и поэтому он обратим. Мы знаем к тому же, что $S_{C_1 \otimes C_2}$ обратим, откуда $U_1 \otimes U_2$ обратим на $H_F \otimes K_G$. $\square$

Представим теперь понятие дуального управляемого репера в $H \otimes K$.

Определение 14. Пусть $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Тогда $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемый репер $\{e_i \otimes h_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ для $H \otimes K$, ассоциированный с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$ и удовлетворяющий условию

$$f \otimes g = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, e_i \otimes h_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2) (f_i \otimes g_j) \quad (9)$$

для всех $f \otimes g \in H \otimes K$, называется дуальным к $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$.

Теорема 14. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}, \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — пара дуальных C_1 -управляемых реперов для H , ассоциированных с $(a_2, \dots, a_n)$, и $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}, \{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ — пара дуальных C_2 -управляемых реперов для K , ассоциированных с $(b_2, \dots, b_n)$. Тогда $\{e_i \otimes h_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ является дуальным к $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$.

Доказательство. По теореме 12 $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^{\infty}, \{e_i \otimes h_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ — $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемые реперы для $H \otimes K$, ассоциированные с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Поскольку $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является дуальным к $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ C_1 -управляемым репером, ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, а $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ — дуальным к $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ C_2 -управляемым репером, ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$ соответственно, то для любых $f \in H_F, g \in K_G$ имеем

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 C_1 f_i \quad \text{и} \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, h_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 C_2 g_j.$$

Тогда для любых $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$

$$\begin{aligned}
f \otimes g &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 C_1 f_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, h_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 C_2 g_j \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f, e_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle g, h_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 (C_1 f_i \otimes C_2 g_j) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle f \otimes g, e_i \otimes h_j \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2) (f_i \otimes g_j).
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 15. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty, \{e_i\}_{i=1}^\infty$ — пара дуальных C_1 -управляемых реперов для H , ассоциированных с $(a_2, \dots, a_n)$, и $\{g_j\}_{j=1}^\infty, \{h_j\}_{j=1}^\infty$ — пара дуальных C_2 -управляемых реперов для K , ассоциированных с $(b_2, \dots, b_n)$. Пусть также $U \in \mathcal{B}(H_F), V \in \mathcal{B}(K_G)$ — унитарные операторы, C_1 и C_2 коммутируют с U и V соответственно. Тогда $\Lambda = \{(U \otimes V)(f_i \otimes g_j)\}_{i,j=1}^\infty$ и $\Gamma = \{(U \otimes V)(e_i \otimes h_j)\}_{i,j=1}^\infty$ также представляют собой пару дуальных $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемых реперов для $H \otimes K$, ассоциированных с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$.

Доказательство. По теореме 14 последовательности $\{f_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^\infty$ и $\{e_i \otimes h_j\}_{i,j=1}^\infty$ образуют пару дуальных $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемых реперов для $H \otimes K$, ассоциированных с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Тогда для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, (U \otimes V)(f_i \otimes g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\ & \times \langle (C_1 \otimes C_2)(U \otimes V)(f_i \otimes g_j), f \otimes g \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle = \\ & = \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, (U f_i \otimes V g_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle \times \\ & \times \langle (C_1 U f_i \otimes C_2 V g_j), f \otimes g \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle = \\ & = \sum_{i=1}^\infty \langle f, U f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 U f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \times \\ & \times \sum_{j=1}^\infty \langle g, V g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 V g_j, g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 = \\ & = \sum_{i=1}^\infty \langle U^* f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, U^* f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \times \\ & \times \sum_{j=1}^\infty \langle V^* g, g_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_j, V^* g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2. \end{aligned}$$

Поскольку $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$, а $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$, то из вышеприведенных вычислений следует, что последовательность Λ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Аналогично можно показать, что Γ является $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемым репером для $H \otimes K$, ассоциированным с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. Более того, для любого $f \otimes g \in H_F \otimes K_G$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes f, (U \otimes V)(e_i \otimes h_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 \otimes C_2)(U \otimes V)(f_i \otimes g_j) = \\ & = \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, (U e_i \otimes V h_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (C_1 U f_i \otimes C_2 V g_j) = \\ & = \sum_{i,j=1}^\infty \langle f \otimes g, (U e_i \otimes V h_j) \mid a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n \rangle (U C_1 f_i \otimes V C_2 g_j) = \\ & = U \sum_{i=1}^\infty \langle U^* f, e_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 C_1 f_i \otimes V \sum_{j=1}^\infty \langle V^* g, h_j \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 C_2 g_j = U U^*(f) \otimes V V^*(g) = f \otimes g. \end{aligned}$$

Откуда Λ и Γ образуют пару дуальных $(C_1 \otimes C_2)$ -управляемых реперов для $H \otimes K$, ассоциированных с $(a_2 \otimes b_2, \dots, a_n \otimes b_n)$. $\square$

Закончим теперь этот раздел рассмотрением репера в прямой сумме n -гильбертовых пространств H и K . Прямая сумма n -гильбертовых пространств H и K обозначается через $H \oplus K$ и задается как n -гильбертово пространство, ассоциированное с n -скалярным произведением

$$\langle f \oplus g, f_1 \oplus g_1 \mid f_2 \oplus g_2, \dots, f_n \oplus g_n \rangle = \langle f, f_1 \mid f_2, \dots, f_n \rangle_1 + \langle g, g_1 \mid g_2, \dots, g_n \rangle_2 \quad (10)$$

для любых $f, f_1, f_2, \dots, f_n \in H$ и $g, g_1, g_2, \dots, g_n \in K$.

При этом n -норма на $H \otimes K$ определена формулой

$$\|f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2, \dots, f_n \oplus g_n\| = \|f_1, f_2, \dots, f_n\|_1 + \|g_1, g_2, \dots, g_n\|_2 \quad (11)$$

для всех $f_1, f_2, \dots, f_n \in H$ и $g_1, g_2, \dots, g_n \in K$, где n -нормы $\|\cdot, \dots, \cdot\|_1$ и $\|\cdot, \dots, \cdot\|_2$ порождены $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \dots, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \dots, \cdot \rangle_2$ соответственно.

Пространство $H_F \oplus K_G$ является гильбертовым по отношению к скалярному произведению

$$\langle p \oplus q, p' \oplus q' \rangle = \langle p, p' \rangle_F + \langle q, q' \rangle_G$$

для всех $p, p' \in H_F$ и $q, q' \in K_G$.

Определение 15. Пусть $T \in \mathcal{B}(H_F)$ и $U \in \mathcal{B}(K_G)$. Тогда прямая сумма операторов T и U — это оператор $T \oplus U : H_F \oplus K_G \rightarrow H_F \oplus K_G$, определенный как $(T \oplus U)(f \oplus g) = Tf \oplus Ug$.

Легко проверить, что $T \oplus U$ является корректно определенным ограниченным линейным оператором с нормой $\|T \oplus U\| = \sup\{\|T\|, \|U\|\}$.

В следующей теореме мы покажем, что прямая сумма управляемых реперов является управляемым репером в n -гильбертовом пространстве при выполнении некоторых достаточных условий.

Теорема 16. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является C_1 -управляемым репером для H , ассоциированным с $(a_2, \dots, a_n)$ с границами A, B , а $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ является C_2 -управляемым репером для K , ассоциированным с $(b_2, \dots, b_n)$ с границами C, D соответственно. Тогда $\{f_i \oplus g_i\}_{i=1}^\infty$ является $(C_1 \oplus C_2)$ -управляемым репером, ассоциированным с $(a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n)$ для $H \oplus K$, если для всех $f \in H_F$ и $g \in K_G$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_2 g_i, g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, g_i \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_1 f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Для любого $f \oplus g \in H \oplus K$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \langle f \oplus g, f_i \oplus g_i \mid a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle \langle (C_1 \oplus C_2)(f_i \oplus g_i), f \oplus g \mid a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f \oplus g, f_i \oplus g_i \mid a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle \langle C_1 f_i \oplus C_2 g_i, f \oplus g \mid a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\{ \langle f, f_i \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 + \langle g, g_i \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \} \{ \langle C_1 f_i, f \mid a_2, \dots, a_n \rangle_1 + \langle C_2 g_i, g \mid b_2, \dots, b_n \rangle_2 \} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i | a_2, \dots, a_n \rangle_1 \langle C_1 f_i, f | a_2, \dots, a_n \rangle_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, g_i | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \langle C_2 g_i, g | b_2, \dots, b_n \rangle_2 \leq \\
&\leq B \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 + D \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \leq \max\{B, D\} \|f \oplus g, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n\|^2.
\end{aligned}$$

С другой стороны, для любого $f \oplus g \in H \oplus K$ также имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \langle f \oplus g, f_i \oplus g_i | a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle \langle (C_1 \oplus C_2)(f_i \oplus g_i), f \oplus g | a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n \rangle \geq \\
&\geq A \|f, a_2, \dots, a_n\|_1^2 + C \|g, b_2, \dots, b_n\|_2^2 \geq \min\{A, C\} \|f \oplus g, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{f_i \oplus g_i\}_{i=1}^{\infty}$ является $(C_1 \oplus C_2)$ -управляемым репером для $H \oplus K$, ассоциированным с $(a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n)$ с границами $\max\{B, D\}$ и $\min\{A, C\}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gabor D. *Theory of communications*, J. Inst. Elect. Engineers **93** (26), 429–457 (1946).
- [2] Duffin R.J., Schaeffer A.C. *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 341–366 (1952).
- [3] Daubechies I., Grossmann A., Mayer Y. *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. **27** (5), 1271–1283 (1986).
- [4] Bogdanova I., Vandergheynst P., Antoine J.-P., Jacques L., Morvidone M. *Stereographic wavelet frames on the sphere*, Appl. Comput. Harmonic Anal. **19** (2), 223–252 (2005).
- [5] Balazs P., Antonie J.-P., Grybos A. *Weighted and controlled frames: mutual relationship and first numerical properties*, Int. J. Wavelets, Multiresolution Inform. Proc. **84** (1), 109–132 (2010).
- [6] Rabinson S. *Hilbert space and tensor products* (Lect. notes September 8, 1997).
- [7] Folland G.B. *A Course in abstract harmonic analysis* (CRC Press, Boca Raton, 1995).
- [8] Kadison R.V., Ringrose J.R. *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Vol. I (Acad. Press, New York, 1983).
- [9] Diminnie C., Gahler S., White A. *2-inner product spaces*, Demonstratio Math. **6** (1), 525–536 (1973).
- [10] Misiak A. *n-inner product spaces*, Math. Nachr. **140**, 299–319 (1989).
- [11] Arefijamaal A.A., Sadeghi G. *Frames in 2-inner product spaces*, Iranian J. Math. Sci. Inform. **8** (2), 123–130 (2013).
- [12] Christensen O. *An introduction to frames and Riesz bases*, Appl. Numer. Harmonic Anal. (Birkhauser, Basel, 2003).
- [13] Kreyzig E. *Introductory Functional Analysis with Applications* (Wiley, New York, 1989).
- [14] Upender Reddy G., Gopal Reddy N., Krishna Reddy B. *Frame operator and Hilbert-Schmidt Operator in Tensor Product of Hilbert Spaces*, J. Dynam. Syst. Geom. Theor. **7** (1), 61–70 (2009).
- [15] Gunawan H., Mashadi *On n-normed spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **27**, 631–639 (2001).
- [16] Gunawan H. *On n-inner products, n-norms, and the Cauchy-Schwarz inequality*, Sci. Math. Jpn. **5**, 47–54 (2001).
- [17] Ghosh P., Samanta T.K. *Construction of frame relative to n-Hilbert space*, J. Linear Topological Algebra **10** (2), 117–130 (2021).
- [18] Ghosh P., Samanta T.K. *Introduction of frame in tensor product of n-Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal. **18** (4), 1–18 (2021).
- [19] Ghosh P., Samanta T.K. *Atomic systems in n-Hilbert spaces and their tensor products*, J. Linear Topological Algebra **10** (4), 241–256 (2021).

Прасенджит Гош

Университет Калькутты,

окружная дорога Баллигандж, д. 35, г. Калькутта, 700019, Западная Бенгалия, Индия,

e-mail: prasenjitpuremath@gmail.com

Тапас К. Саманта

Колледж Улуберия,
Улуберия, г. Хаора, 711315, Западная Бенгалия, Индия,

e-mail: mumpu_tapas5@yahoo.co.in

P. Ghosh and T.K. Samanta

Controlled frames in n -Hilbert spaces and their tensor products

Abstract. The concepts of controlled frame and its dual in n -Hilbert space have been introduced and then some of their properties are going to be discussed. Also, we study controlled frame in tensor product of n -Hilbert spaces and establish a relationship between controlled frame and bounded linear operator in tensor product of n -Hilbert spaces. At the end, we consider the direct sum of controlled frames in n -Hilbert space.

Keywords: n -normed space, n -inner product space, tensor product of Hilbert spaces, frame, dual frame, controlled frame.

Prasenjit Ghosh

University of Calcutta,
35 Ballygunge Circular Road, Kolkata, 700019, West Bengal, India,

e-mail: prasenjitpuremath@gmail.com

Tapas K. Samanta

Uluberia College,
Uluberia, Howrah, 711315, West Bengal, India,

e-mail: mumpu_tapas5@yahoo.co.in