

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

В.С. СЕКОРИН

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОМЕСТНЫХ RFP-ОПЕРАТОРОВ БЕЗ ВЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ОДНОГО СЛЕДОВАНИЯ

Аннотация. В данной работе мы исследуем разрешимость расширений логики первого порядка. Например, в работах А. С. Золотова показано, что логика с унарным оператором транзитивного замыкания для теории следования является разрешимой. Мы показываем, что в аналогичной ситуации логика с унарным оператором частичной неподвижной точки разрешимой не является. Для этого мы сводим проблему остановки счетчиковой машины к проблеме истинности формулы. При этом используется только один оператор частичной неподвижной точки, он является унарным, невложенным и применяется к универсальной или экзистенциальной формуле.

Ключевые слова: логика первого порядка, частичная фиксированная точка, неразрешимость.

УДК: 510.624

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-89-93

Введение. В настоящее время различные методы математической логики широко применяются при решении задач проектирования и анализа программного обеспечения для ЭВМ. Теория логических языков является одним из разделов математической логики, который наиболее тесным образом связан с информатикой. Но необходимо отметить, что многие простые и известные свойства, имеющие большое практическое значение [1], являются невыразимыми в логике первого порядка. Например, таким свойством является транзитивное замыкание.

Это обосновывает тот факт, что логика первого порядка и различные ее расширения постоянно изучаются. Среди одних из самых распространенных расширений можно выделить оператор неподвижной точки. Существует несколько видов операторов неподвижной точки. Самым общим из этих операторов является оператор частичной неподвижной точки (RFP-оператор). Отметим, что предложен этот оператор был Ю. Гуревичем в работе [2].

Стоит заметить то, что увеличение выразительных возможностей языка первого порядка может быть получено из следующего факта. Операции базы данных могут выполняться не только над элементами самой базы данных, но и над произвольными элементами универсума. Но такое увеличение выразительных возможностей является незначительным [3]. При совместном использовании этих двух возможностей возникает ситуация, при которой применение RFP-оператора происходит для бесконечных алгебраических систем. В этом случае полученная теория может оказаться неразрешимой. В других случаях, например, теория с одноместным оператором транзитивного замыкания, является разрешимой [4]. Далее мы

будем использовать оператор частичной неподвижной точки $\text{PFP}^\forall$, такая семантика рассмотрена в работе [5]. В произвольном случае теория PFP -оператора тоже неразрешима, так как позволяет выразить сложение и умножение. Но как известно [6], в частных случаях, например, без вложения операторов, ситуация может быть другой.

Возникает вопрос: какую сложность имеет задача определения истинности формулы PFP -логики. В настоящей работе в качестве основного результата доказано утверждение о том, что проблема остановки счетчиковой машины с двумя счетчиками сводится к проблеме истинности формулы PFP -логики в теории одного следования по одноместному предикату и без вложенных PFP -операторов.

Определение (формула логики частичной неподвижной точки и значение, см. [2], [5]). Формулой PFP -логики называется формула, построенная по правилам логики первого (или второго) порядка с использованием оператора частичной неподвижной точки PFP : если $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q , то $\text{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)$ — формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$. При этом длина $\bar{y}$ совпадает с местностью Q .

Зафиксируем значения переменных $\bar{x}$ как $\bar{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств $Q_i^{\bar{d}}$ следующим образом. Пусть для $i \in \omega$

$$Q_0^{\bar{d}} = \emptyset; \quad Q_{i+1}^{\bar{d}} = \left\{ \bar{y} \in |\mathfrak{A}| \mid (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{d}}) \models \varphi(\bar{d}, \bar{y}) \right\}.$$

Значением оператора $\text{PFP}_{Q(\bar{y})}^\forall(\varphi)(\bar{d})$ является множество $Q_{\forall}^{\bar{d}}$. Множеству $Q_{\forall}^{\bar{d}}$ будут принадлежать только те наборы $\bar{y}$, для которых существует i такой, что $\bar{y} \in Q_j$ для всех $j > i$.

1. Теорема о неразрешимости.

Теорема 1. *Рассмотрим алгебраическую систему $(\mathbb{Z}, s^{(1)})$. Здесь $\mathbb{Z}$ является множеством целых чисел, $s^{(1)}$ — функция следования. Проблема остановки HALT для машины Минского с двумя счетчиками сводится к проблеме истинности формул логики оператора частичной неподвижной точки в алгебраической системе $(\mathbb{Z}, s^{(1)})$. Кроме того, формулы содержат единственный невложенный унарный PFP -оператор.*

Рассмотрим произвольную машину Минского с двумя счетчиками $\mathfrak{M} = (S, 2, P, q_0)$. Здесь множество состояний S содержит $n + 1$ состояние: $q_0, \dots, q_n$, где q_0 — начальное состояние, а q_n — единственное заключительное. Программа P содержит m команд $p_0, \dots, p_{m-1}$ видов $q \rightarrow \text{inc}_k, p$ и $q \rightarrow \text{dec}_k, p_1 : p_2$. Команда первого вида увеличивает на единицу значение k -го счетчика и меняет состояние на p . Команда второго вида уменьшает значение k -го счетчика на единицу, и если такое изменение было выполнено, то меняет состояние на p_1 в противном случае на p_2 . Без ограничения общности считаем, что значения обоих счетчиков равны нулю при остановке машины.

Любое унарное отношение U на множестве целых чисел можно представить в виде последовательности нулей и единиц бесконечной в обе стороны. В таком представлении 1 будет означать, что соответствующее число принадлежит U , а 0 будет означать обратное. Закодируем конфигурацию (q_i, g, h) для $\mathfrak{M}$ следующим унарным отношением:

$$\dots \overset{a}{0} \underbrace{10\dots 0}_{g+1} \overset{b}{1} \overset{z}{1} \underbrace{10\dots 0}_{i+1} \underbrace{1110\dots 0}_{n-i+1} \overset{d}{1} \underbrace{11110\dots 0}_{h+1} \overset{e}{1} 11110\dots$$

$n+5$

Кодировка представляет собой четыре последовательности нулей, которые располагаются между последовательностями единиц. Разделителем будем называть непрерывную

последовательность единиц длины 1, 2, 3, 4, или 5. Нули между единицами будут соответствовать значению первого счетчика, номеру состояния и второму значению счетчика. При помощи z будем обозначать позицию, с которой начинается кодировка номера состояния. Целые числа a, b, c, d и e соответствуют нулям перед разделителями.

Определим формулу α , которая описывает начальную конфигурацию $\zeta = (q_i, g, h)$:

$$\alpha(z, x) \equiv s^{g+2}x = z \vee \bigvee_{j=0}^1 x = s^j z \vee \bigvee_{j=3}^5 x = s^{j+i} z \vee \bigvee_{j=7}^{10} x = s^{j+n} z \vee \bigvee_{j=12}^{16} x = s^{j+n+h} z.$$

Формула τ , описывающая финальную конфигурацию $\xi = (q_n, 0, 0)$, записывается аналогично α . Формулы α и τ определяют положения разделителей.

Построим формулу p_l для каждой команды p'_l машины Минского $\mathfrak{M}$, где $0 \leq l \leq m-1$. Предварительно определим вспомогательные формулы

$$\begin{aligned} \varphi_i(a, b, c, d, e) \equiv & \neg Q(a) \wedge Q(sa) \wedge \neg Q(s^2a) \wedge \dots \wedge \\ & \wedge \neg Q(e) \wedge \bigwedge_{i=1}^5 Q(s^i e) \wedge \neg Q(s^6 e) \wedge \bigwedge_{j=1}^i \neg Q(s^{3+j} b) \wedge s^{3+i+1} b = c. \end{aligned}$$

Первые элементы конъюнкции φ_i определяют положение разделителей a, b, c, d и e . После определяем, что текущим состоянием является q_i .

Формула ψ означает, что выполнение команды не изменит позиций b и d относительно z :

$$\psi(x, b, d) \equiv x = sb \vee x = s^2b \vee x = sd \vee x = s^2d \vee x = s^3d \vee x = s^4d.$$

Существует всего четыре вида команд. Пусть команда p'_l является инкрементом первого счетчика, тогда соответствующая ей формула p_l имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\forall a, b, c, d, e) ((\exists u) Q(u) \wedge \varphi_i(a, b, c, d, e) \rightarrow \psi(x, b, d) \vee x = a \vee x = s^{3+j+1}b \vee \\ \vee x = s^{3+j+2}b \vee x = s^{3+j+3}b \vee x = se \vee x = s^2e \vee x = s^3e \vee x = s^4e \vee x = s^5e). \end{aligned}$$

Множество Q_{i+1} содержит число a вместо $a+1 \in Q_i$. Это соответствует увеличению первого счетчика на один. Разделитель 111 будет перенесен на позицию, соответствующую числу j . Разделитель 11111 не поменяет свою позицию.

Формулы для остальных видов команд строятся аналогично.

Формула τ^Q означает, что множество Q на текущем шаге кодирует финальную конфигурацию $(q_n, 0, 0)$ машины Минского $\mathfrak{M}$:

$$\tau^Q(z) \equiv (\exists v)(s^2v = z \wedge Q(v)) \vee \bigvee_{i=0}^1 Q(s^i z) \vee \bigvee_{i=3}^5 Q(s^{i+n} z) \vee \bigvee_{i=7}^{10} Q(s^{i+n} z) \vee \bigvee_{i=12}^{16} Q(s^{i+n} z).$$

Построим следующую формулу логики частичной неподвижной точки:

$$(\exists z)(\forall u) \left[\text{RFP}_{Q(x)}^{\forall} \left(\left[\neg Q(z) \rightarrow \alpha(z, x) \right] \wedge \left[\bigwedge_{l=0}^{m-1} p_l \right] \wedge \left[\tau^Q(z) \rightarrow Q(x) \right] \right) (u) \leftrightarrow \tau(z, u) \right]. \quad (1)$$

Первый элемент конъюнкции означает, что первый шаг построения множества Q определяет начальную конфигурацию ζ , далее идет часть, соответствующая командам $\mathfrak{M}$. Последняя останавливает построение Q_i для заключительной конфигурации ξ .

Сформулируем главное техническое утверждение.

Лемма. Если машина $\mathfrak{M}$ не останавливается за $k-1$ шаг, то Q_k в (1) кодирует конфигурацию σ^{k-1} на $k-1$ шаге работы $\mathfrak{M}$.

Доказательство проводится методом математической индукции по параметру k . $\square$

Схема доказательства теоремы 1. В работе М. Л. Минского [7] показано, что проблема остановки для счетчиковой машины с двумя счетчиками является неразрешимой. Покажем, что формула (1) будет истинна в $(\mathbb{Z}, s^{(1)})$ тогда и только тогда, когда машина Минского $\mathfrak{M}$ останавливается в конфигурации $\xi = (q_n, 0, 0)$, начав работу в конфигурации $\zeta = (q_i, g, h)$.

Пусть выполнена формула (1). Это означает, что существует целое число z_0 такое, что $\text{PFP}_{Q(x)}^\forall (\theta(z, x))(u) \leftrightarrow \tau(z, u)$ выполняется для любого u и выбранного z_0 . Следовательно, результат PFP-оператора в (1) кодирует конфигурацию ξ . Таким образом, существует такое число k , что $Q_k = \{r \in \mathbb{Z} \mid (\mathbb{Z}, s^{(1)}) \models \tau(z_0, r)\}$, а также $Q_j = Q_{j+1}$ выполняется для всех $j \geq k$. При построении PFP-оператора в (1) множество Q_0 является пустым и множество Q_j кодирует конфигурацию (q_j, g', h') согласно утверждению . Также машина $\mathfrak{M}$ достигнет конфигурацию ξ за $k - 1$ шаг, т. е. остановится.

Пусть машина $\mathfrak{M}$ останавливается в конфигурации ξ . Тогда Q -шаг, соответствующий ξ , будет достигнут согласно лемме. Такая конфигурация кодируется отношением Q_f для некоторого z по построению. Отметим, что из-за бесконечности в обе стороны в качестве z можно взять любое z_0 . Формула τ^Q выполняется для Q_f : $(\mathfrak{A}, Q_f) \models \tau^Q(z_0)$. Следовательно, $Q_{f+1} = Q_f$. Тогда будет выполнено $Q_j = Q_{j+1}$ для всех $j \geq f$. Это означает, что значение PFP-оператора в (1) равно Q_f по определению. Значит, $\text{PFP}_{Q(x)}^\forall (\theta(z_0, x))(u) \leftrightarrow \tau(z_0, u)$ выполняется для любого u , так как формула τ кодирует конфигурацию ξ . Таким образом, будет выполнена формула (1).

Рассмотрев формулы, построенные в теореме, получим

Следствие. Проблема остановки машины Минского с двумя счетчиками сводится к проблеме истинности формулы логики частичной неподвижной точки в алгебраической системе $(\mathbb{Z}, s^{(1)})$. Кроме того, все PFP-операторы являются невложенными, унарными и применяются только к универсальным или только к экзистенциальным формулам.

2. Теория следования с первым элементом.

Теорема 2. Рассмотрим алгебраическую систему $(\mathbb{A}, s^{(1)})$. Здесь $\mathbb{A}$ — произвольное множество, $s^{(1)}$ — функция следования, имеющая первый элемент. Проблема остановки для машины Минского с двумя счетчиками сводится к проблеме истинности формул логики оператора частичной неподвижной точки в алгебраической системе $(\mathbb{A}, s^{(1)})$. Формулы содержат единственный невложенный унарный PFP-оператор.

Построим формулу логики частичной неподвижной точки:

$$(\exists o) \left[\neg(\exists p)(s p = o) \wedge (\exists z)(\forall u) \left[\text{PFP}_{Q(x)}^\forall \left([\neg Q(z) \rightarrow \alpha(z, x)] \wedge \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \wedge \left[\bigwedge_{l=0}^{m-1} p_l \right] \wedge [\tau^Q(z) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(o) \rightarrow s x = x] \right) (u) \leftrightarrow \tau(z, u) \right] \right]. \quad (2)$$

Формула $(\exists o)\neg(\exists p)(s p = o)$ определяет первый элемент o .

Схема доказательства. Рассмотрим все случаи.

1) Пусть машина $\mathfrak{M}$ на начальной конфигурации $\zeta = (q_i, g, h)$ останавливается. При помощи t обозначим количество выполняемых шагов. Отсюда следует, что первый счетчик не может быть увеличен более чем t раз. Это означает, что максимальным значением первого

счетчика является $g + t$. Таким образом, мы можем выбрать достаточно большое число z , чтобы первый элемент не входил ни в одно из множеств Q_i .

2) Пусть машина $\mathfrak{M}$ на ζ не останавливается и значение первого счетчика не превышает некоторого значения. Этот случай аналогичен первому.

3) Пусть машина $\mathfrak{M}$ на ζ не останавливается, а значение первого счетчика увеличивается неограниченно, т.е. для любого числа z найдется номер шага f такой, что Q_f будет содержать первый элемент $(\mathfrak{A}, Q_f) \models Q(o)$. В силу последней импликации Q_{f+1} содержит элементы, удовлетворяющие $sx = x$, т.е. $Q_{f+1} = Q_0 = \emptyset$, и процесс повторится. Таким образом, для любого целого числа x не существует такого j , что $x \in Q_i$ для всех $i > j$. Следовательно, значение PFP-оператора в (2) равно $\emptyset$ по определению.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aho A., Ulman J.D. *Universality of data retrieval languages*, Proceedings of the 6th ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages POPL '79, 110–119 (1979).
- [2] Gurevich Y., Shelah S. *Fixed-point extensions of first-order logic*, Ann. Pure and Appl. Logic **32**, 265–280 (1986).
- [3] Dudakov S.M., Taitslin M. A. *Collapse results for query languages in database theory*, УМН **61** (2), 3–66 (2006).
- [4] Zolotov A.S. *On decidability of the theory with the transitive closure operator*, Lobachevskii J. Math. **36** (4), 434–440 (2015).
- [5] Секорин В.С. *Об эквивалентности двух семантик PFP-оператора*, Вестн. Тверск. гос. ун-та. Сер. Прикл. матем. (3), 41–49 (2020).
- [6] Dudakov S.M. *On Safety of Unary and Nonunary IFP Operators*, Automatic Control and Computer Sci. **53**, 683–688 (2019).
- [7] Minsky M.L. *Computation: Finite and Infinite Machines* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967).

Всеслав Станиславович Секорин

Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия

e-mail: vssekorin@gmail.com

V.S. Sekorin

On undecidability of unary non-nested PFP-operators for one successor function theory

Abstract. We investigate the decidability of first-order logic extensions. For example, it is established in A. S. Zolotov's works that a logic with a unary transitive closure operator for the one successor theory is decidable. We show that in a similar case, a logic with a unary partial fixed point operator is undecidable. For this purpose, we reduce the halting problem for the counter machine to the problem of truth of the underlying formula. This reduction uses only one unary non-nested partial fixed operator that is applied to a universal or existential formula.

Keywords: first-order logic, partial fixed point, undecidability.

Vseslav Stanislavovich Sekorin

Tver State University
33 Zhelyabova str., Tver, 170100 Russia,

e-mail: vssekorin@gmail.com