Ю.Х. ХАСАНОВ, Ф.М. ТАЛБАКОВ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье почти периодических в смысле Безиковича функций в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности. В качестве структурной характеристики рассматриваемой функции используется модуль непрерывности высшего порядка.

Ключевые слова: почти периодические функции Безиковича, ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, модуль непрерывности, тригонометрические полиномы.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-67-79

ВВЕДЕНИЕ

Пусть B_p ($1 \leq p \leq \infty$) — линейное пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^p$ ($1 \leq p < \infty$) интегрируема по Лебегу на любом конечном отрезке действительной оси с нормой

$$\|f\|_{B_p} = \{\overline{M}[|f(x)|^p]\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{B_\infty} = \text{vrai} \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty.$$

А. Безикович [1] или [2] при $1 \leq p < \infty$ ввел следующее понятие B_p -почти периодической функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется почти периодической в смысле Безиковича или B_p -почти периодической, если существует последовательность конечных тригонометрических полиномов $\{P_n(x)\}$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(f) e^{i\lambda_k x},$$

для которых выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - P_n(x)\|_{B_p} = 0.$$

Для каждой $f \in B_p$ определена функция

$$c(f, \lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda x} dx = M \left\{ f(x) e^{-i\lambda x} \right\}.$$

Она может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений $\lambda: \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$. Числа $\{\lambda_k\}$ называются показателями Фурье или спектром рассматриваемой функции, а числа $c_k(f) = c(f, \lambda_k)$ — коэффициентами Фурье. Таким образом, каждой функции $f \in B_p$ можно записать ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_k c_k(f) e^{i\lambda_k x}.$$

Пространство B_∞ равномерных почти периодических функций обозначают B (см., например, [3], [4]).

Обозначим через $\Delta_t^n f(x)$ конечную разность n -го порядка функции $f \in B_p$ в точке x с шагом t , т. е.

$$\Delta_t^n f(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} f \left(x + \left(\frac{k}{2} - r \right) t \right).$$

Для определения гладкости функции в качестве структурной характеристики функции $f \in B_p, p \geq 1$, будем использовать модуль непрерывности порядка k

$$\omega_n(f, h)_{B_p} = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^n f(x)\|_{B_p}, \quad h > 0, \quad n \in N.$$

Определим, как обычно, вариацию порядка n функции $f \in B_p, p \geq 1$, на заданном конечном отрезке $[a, b]$ равенством

$$V_n(f)_{B_p} = \sup \sum_{r=0}^{n-1} \|\Delta_{h_r}^n f(x_r)\|_{B_p},$$

где $n \in N, h_r = \frac{x_{r+1} - x_r}{n}$, верхняя грань берется по всевозможным разбиениям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

В случае если $V_n(f)_{B_p}$ ограничена для всякого конечного отрезка $[a, b]$, то класс таких функций обозначим символом $B_p V_n$.

В работах [5]–[13] и др. получены некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических в смысле Бора и Безиковича функций.

Ю. Мусеилак [6] показал, что если спектр $\lambda_k \rightarrow \infty$ и $k^\alpha = O(\lambda_k), k \rightarrow \infty, \alpha > 0$, то для функции $f \in B_2$ условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1-\beta}{\alpha-1}} \omega_1^\beta \left(f; \frac{1}{k} \right)_{B_2} < \infty \quad (1)$$

при $0 < \beta < 2$ влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_k(f)|^\beta. \quad (2)$$

Н.П. Купцов [7] показал, что для функций $f \in B$ условие (1) при $\alpha = 1, \beta = 1$ и замене величины $\omega_1 \left(f, \frac{1}{k} \right)_{B_2}$ на $\omega_2 \left(f, \frac{1}{k} \right)_B$ обеспечивает абсолютную сходимость ряда (2).

В работе Я.Г. Притулы [8] доказываются, что если при $\lambda_k \rightarrow \infty$, $0 < \beta < q$, $2 \leq q < \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, $\gamma > 0$ выполняется условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2\nu}}{\lambda_{2\nu-1}}\right)^{\beta} \omega_1^{\beta}\left(f, \frac{1}{\lambda_{2\nu}}\right)_{B_p} 2^{\nu(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(f)|^{\beta} k^{\beta} < \infty.$$

В случае, когда $f(x) \in B_p$, $1 < p \leq 2$, $\lambda_k \rightarrow 0$, А.С. Джафаров и Г.А. Мамедов [9] установили сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^{\beta} \varphi(k)$$

при некоторых ограничениях на функции $\varphi(k)$. Они вместо модуля непрерывности использовали следующую величину, построенную на базе преобразование Лапласа:

$$\Omega(f; H; \delta; \theta) = \delta \sup_x \left| \int_0^{\infty} \exp(-\delta\theta) f(x-t) \exp(i\theta t) dt \right|, \quad \delta > 0, \quad \theta \in R.$$

В работе Ю.Х. Хасанова [10] установлены некоторые достаточные, а в случае монотонного убывания коэффициентов Фурье и необходимые условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических по Безиковичу функций, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку на бесконечности или в нуле.

Результаты данной статьи являются аналогами некоторых результатов работ [6], [10] и [11] для класса почти периодических функций Безиковича.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций из пространства B_2 , когда спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{-k} = -\lambda_k, \quad |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty. \quad (3)$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$, имеет место разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos \lambda_k x + b_k(f) \sin \lambda_k x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_0(f) &= M\{f(x)\}, \\ a_k(f) &= M\{f(x) \cos \lambda_k x\}, \\ b_k(f) &= M\{f(x) \sin \lambda_k x\} \quad (k = 1, 2, \dots), \\ M\{g(x)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx. \end{aligned}$$

Введем определение функций ограниченной Ф-вариации. Пусть $\Phi(u)$, $\frac{u^2}{\Phi(u)}$ — неубывающие функции, причём

$$\Phi(0) \geq 0, \quad \Phi(u) > 0 \quad (u > 0). \quad (5)$$

Положим

$$V_{\Phi, T}(f) = \sup_{\Pi} \sum_{k=1}^n \Phi[|f(x_k) - f(x_{k-1})|]_{B_2},$$

$$V_{\Phi}(f) = \overline{M}\{V_{\Phi, T}(f)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_{\Phi, T}(f) dx,$$

где $\Pi = \{-T = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T\}$ — произвольное разбиение интервала $(-T, T)$.

Ниже приводятся некоторые новые результаты, относящиеся к абсолютной сходимости ряда (4) с известными коэффициентами (см., например, [5]–[11]).

Теорема 1. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (3) и $\Phi(u) > 0$, $u > 0$. Пусть для некоторого $\beta \in (0, 2)$ выполняется условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^{\nu}\pi) - \mu(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega^{\beta}(f, 2^{-\nu}) \omega_{\Phi}^{\beta/2}(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-\beta/2}[\omega(f, 2^{-\nu})] < \infty, \quad (6)$$

где

$$\omega(f, h) = \text{vrai} \sup_{-\infty < x < \infty} \sup_{|\delta| \leq h} |f(x + \delta) - f(x)|,$$

$$\omega_{\Phi}(f, h) = \sup_{|\delta| \leq h} \overline{M}\{|f(x + \delta) - f(x)|\},$$

тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^{\beta} + |b_k(f)|^{\beta}) \quad (7)$$

сходится.

Доказательство. Предварительно покажем, что

$$\sum_{n \in A_{\nu}} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \leq \frac{1}{2} M \left\{ |f(x + 2^{-\nu-1}) - f(x - 2^{-\nu-1})|^2 \right\}, \quad (8)$$

где $A_{\nu} = E_k \{2^{-\nu-1}\pi \leq \lambda_k \leq 2^{-\nu}\pi\}$, $\nu \geq 1$.

Для любого $h \geq 0$ рассмотрим функцию

$$F_h(x) = f(x + h) - f(x - h).$$

Коэффициенты функции Фурье $F_h(x)$ определяются следующим образом:

$$a_0(F_h) = M\{F_h(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x + h) - f(x - h)] dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x) - f(x)] dx = 0.$$

$$\begin{aligned} a_k(F_h) &= M\{F_h(x) \cos \lambda_k x\} = M\{[f(x + h) - f(x - h)] \cos \lambda_k x\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+h}^{T+h} f(t) \cos \lambda_k(t - h) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-h}^{T-h} f(t) \cos \lambda_k(t + h) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + h) [\cos \lambda_k t \cos \lambda_k h + \sin \lambda_k t \sin \lambda_k h] dt - \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t - h) [\cos \lambda_k t \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k t \sin \lambda_k h] dt = \\ &= 2 \sin \lambda_k h \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \sin \lambda_k t dt = 2 \sin \lambda_k h M\{f(t) \sin \lambda_k t\} = 2b_k \sin \lambda_k h. \end{aligned}$$

Аналогично, повторяя эти выкладки для коэффициентов $b_k(F_h)$, находим

$$b_k(F_h) = -2a_k \sin \lambda_k h.$$

Тогда в силу неравенства Бесселя получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \sin^2 \lambda_k h &= \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f) \sin \lambda_k h|^2 + |b_k(f) \sin \lambda_k h|^2) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (|2a_k(f) \sin \lambda_k h|^2 + |2b_k(f) \sin \lambda_k h|^2) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_n(F_h)|^2 + |b_k(F_h)|^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} M \{ |f(x+h) - f(x-h)|^2 \}. \end{aligned}$$

При $k \in A_\nu$ рассмотрим

$$2^{\nu-1} \pi h \leq \lambda_k h < 2^\nu \pi h.$$

Положим $h = 2^{-\nu-1}$ и из последнего получим

$$2^{\nu-1} \pi 2^{-\nu-1} \leq \lambda_k h < 2^\nu \pi 2^{-\nu-1}$$

или

$$\frac{\pi}{4} \leq \lambda_k h < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin^2 \lambda_k 2^{-\nu-1} \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда, используя ряд выкладок, вытекает неравенство (8):

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) &\leq 2 \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \sin^2 \lambda_k 2^{-\nu-1} \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \sin^2 \lambda_k 2^{-\nu-1} \leq \frac{1}{2} M \{ |f(x+2^{-\nu-1}) - f(x-2^{-\nu-1})|^2 \}. \end{aligned}$$

Далее обозначим через $\varphi(u)$ функцию $\frac{u^2}{\Phi(u)}$, которая является неубывающей. Так как функция $f(x)$ является ограниченной, то $\omega(f, 2^{-\nu}) < \infty$. Значит, если $\Phi(u) \equiv u^2$, то $\varphi(u) \equiv 1$, и предположение об ограниченности функции $f(x)$ будет излишним.

Умножив и разделив правую часть (8) на функцию $\Phi[\omega(f, 2^{-\nu})]$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) &\leq \frac{1}{2} M \{ |f(x+2^{-\nu-1}) - f(x-2^{-\nu-1})|^2 \} \frac{\Phi[\omega(f, 2^{-\nu})]}{\Phi[\omega(f, 2^{-\nu})]} \leq \\ &\leq 2^{-1} \omega^2(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-1}[\omega(f, 2^{-\nu})] \overline{M} \{ \Phi[\omega(f, 2^{-\nu})] \} = 2^{-1} \omega^2(f, 2^{-\nu}) \omega_\Phi(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-1}[\omega(f, 2^{-\nu})]. \end{aligned}$$

Пусть $m(A_\nu)$ — мера множеств A_ν . Тогда с помощью неравенство Гёльдера из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)^{\frac{\beta}{2}} &\leq [m(A_\nu)]^{1-\frac{\beta}{2}} \left[\sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \right]^{\frac{\beta}{2}} \leq \\ &\leq [m(A_\nu)]^{1-\frac{\beta}{2}} [2^{-1} \omega^2(f, 2^{-\nu}) \omega_\Phi(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-1}[\omega(f, 2^{-\nu})]]^{\frac{\beta}{2}} = \\ &= 2^{-\frac{\beta}{2}} [m(A_\nu)]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\nu}) \omega_\Phi^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f, 2^{-\nu})] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2^{-\frac{\beta}{2}} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega^\beta(f, 2^{-\nu}) \omega_{\Phi}^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f, 2^{-\nu})]. \quad (9)$$

Значит, при

$$k_0 = \min_{\lambda_k \geq \pi} k$$

из неравенства (9) находим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_0}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)^{\frac{\beta}{2}} \leq \\ & \leq 2^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega^\beta(f, 2^{-\nu}) \omega_{\Phi}^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f, 2^{-\nu})]. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу условия (6) ряд (7) сходится. $\square$

Теорема 2. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (3). Пусть для некоторого $\beta \in (0, 2)$ выполняется условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega_2^\beta(f, 2^{-\nu}) < \infty,$$

где

$$\omega_2(f, h) = \left[\sup_{|\delta| \leq h} M\{|f(x+\delta) - f(x)|^2\} \right]^{\frac{1}{2}},$$

тогда ряд (7) сходится.

Доказательство. Неравенство (8) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) & \leq \frac{1}{2} M \left\{ |f(x + 2^{-\nu-1}) - f(x - 2^{-\nu-1})|^2 \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{|\delta| \leq 2^{-\nu}} M \left\{ |f(x + \delta) - f(x)|^2 \right\} = \frac{1}{2} \omega(f, 2^{-\nu}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)^{\frac{\beta}{2}} & \leq 2^{-\frac{\beta}{2}} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} [\omega(f, 2^{-\nu})]^{\frac{\beta}{2}} = \\ & = 2^{-\frac{\beta}{2}} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega_2^\beta(f, 2^{-\nu}). \end{aligned}$$

Тогда по условиям теоремы из последнего следует

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)^{\frac{\beta}{2}} \leq 2^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega_2^\beta(f, 2^{-\nu}) < \infty.$$

$\square$

Далее нам понадобится

Лемма 1. Пусть $\Phi(u) \geq 0$, $u \geq 0$, $h > 0$. Тогда

$$\overline{M}\{\Phi[f(x+h) - f(x-h)]\} \leq 2hV_\Phi(f). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $V_{\Phi}(f) < \infty$. Предположим, что для $\varepsilon > 0$ существует такое число T_0 , что для каждого $T > T_0$ выполняется неравенство

$$V_{\Phi, T+3h}(f) \leq 2[V_{\Phi}(f) + \varepsilon](T + 3h). \quad (12)$$

Действительно, по определению верхнего предела

$$\frac{1}{2(T + 3h)} V_{\Phi, T+3h}(f) \leq V_{\Phi}(f) + \varepsilon,$$

отсюда вытекает неравенство (12).

При фиксированном $T > T_0$ определяем такой интервал $(-T - h, T - h)$, в котором точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ будут

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= 2h \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ x_k - x_{k-1} &\geq 2h \quad (k = n). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая значения $x_k - x_{k-1}$, для допредельного среднего значения функции $\Phi[|f(x+h) - f(x-h)|]$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi[|f(x+h) - f(x-h)|] dx = \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Phi[|f(x+h) - f(x-h)|] dx = \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^{2h} \sum_{k=1}^n \Phi[|f(x_k+t) - f(x_{k-1}+t)|] dt + \frac{1}{2T} \int_0^{x_n - x_{n-1}} \Phi[|f(x_k+t+2h) - f(x_{k-1}+t)|] dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2T} \int_0^{2h} \sup_{x_k \in [-T+3h, T+3h]} \sum_{k=1}^n \Phi[|f(x_k) - f(x_{k-1})|] dt = \\ & = \frac{1}{2T} \int_0^{2h} V_{\Phi, T+h+3h}(f) dt = \frac{1}{2T} V_{\Phi, T+3h} \int_0^{2h} dt = \\ & = \frac{1}{2T} \int_0^{2h} V_{\Phi, T+h+3h}(f) dt = \frac{h}{T} V_{\Phi, T+3h} \leq \frac{2h}{T} [V_{\Phi}(f) + \varepsilon] [T + 3h] = \left(2h + \frac{6h^2}{T}\right) (V_{\Phi}(f) + \varepsilon), \end{aligned}$$

Отсюда при $T \rightarrow \infty$, переходя к пределу, получаем оценку (11). $\square$

Теорема 3. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$, $V_{\Phi}(f) < \infty$, удовлетворяет условиям (3) и (5). Если при $0 < \beta < 2$ выполнено условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\mu(2^{\nu}\pi) - \mu(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} 2^{-\frac{\beta\nu}{2}} \omega^{\beta}(f, 2^{-\nu}) \Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f, 2^{-\nu})] < \infty, \quad (13)$$

то ряд (7) сходится.

Доказательство проведем с помощью теоремы 1 и леммы 1. Действительно, так как

$$\begin{aligned} \omega_{\Phi}(f, 2^{-\nu}) &= \sup_{|\delta| \leq 2^{-\nu}} \overline{M}\{\Phi[|f(x+\delta) - f(x)|]\} \leq \\ &\leq 2h V_{\Phi}(f) = \sup_{|\delta| \leq 2^{-\nu}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi[|f(x+2^{-\nu}) - f(x)|] \leq 2^{-\nu}, \end{aligned}$$

то подставляя в неравенстве (6) вместо $\omega_{\Phi}^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\nu})$ величину $2^{-\nu}$, получаем неравенство (10), что и доказывает теорему 3. $\square$

В дальнейшем условии сходимости ряда (7) будет существование спектра $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. В этом случае нам необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 2. Если $a_1, a_2, \dots$ — положительные числа, то для любого χ ряды

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\chi\nu} a_{2^\nu}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\chi-1} a_k,$$

одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Заметим, что эта лемма неявно содержится в работе (см. [6], с. 13).

Действительно, в силу монотонности a_k при любом ν имеем

$$2^{\chi\nu} a_{2^\nu} \leq 2^{|\chi|+1} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} k^{\chi-1} a_k \leq 2^{2|\chi|+1} 2^{\chi(\nu-1)} a_{2^{\nu-1}},$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\chi-1} a_k = a_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{s=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} s^{\chi-1} a_s.$$

Лемма 3. Если $a_k \downarrow 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, то, полагая $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \Delta a_k = +\infty.$$

Положим

$$k^{\chi-1} a_k = \sum_{\nu=1}^k \nu \Delta a_\nu.$$

В силу $a_k \downarrow 0$ получим $\Delta a_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Значит, все $k^{\chi-1} a_k \geq 0$ монотонно не убывают. Необходимо доказать, что $k^{\chi-1} a_k \rightarrow \infty$. Если бы это было неверно, то

$$k^{\chi-1} a_k \uparrow a \quad (a \neq +\infty).$$

Тогда $k^{\chi-1} a_k = a - \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \downarrow 0$. Следовательно, так как

$$k^{\chi-1} a_k - (k-1)^{\chi-1} a_{k-1} = k \Delta a_k = (a - \varepsilon_k) - (a - \varepsilon_{k-1}) = \Delta \varepsilon_{k-1},$$

то

$$\Delta a_k = \frac{\Delta \varepsilon_{k-1}}{k}.$$

В силу $a_k \rightarrow 0$ и $\Delta \varepsilon_\nu \geq 0$ имеем

$$a_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta a_\nu = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{\nu-1}}{\nu} \leq \frac{1}{k} \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu-1} = \frac{\varepsilon_{k-1}}{k},$$

и поэтому $ka_k \rightarrow 0$.

Но, применяя к сумме, представляющей $k^{\chi-1} a_k$, преобразование Абеля, находим

$$k^{\chi-1} a_k = \sum_{\nu=1}^k \nu \Delta a_\nu = \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu = a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}.$$

Так как $k^{\chi-1}a_k \rightarrow a$, а $ka_k \rightarrow 0$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} \rightarrow 0$, что противоречит условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\chi-1}a_k$ — сходящийся ряд с $k^{\chi-1}a_k \downarrow 0$. Полагаем

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\chi-1}a_k.$$

Если

$$r_n = O(k^{\chi-1}a_k), \quad (14)$$

то будем говорить, что ряд удовлетворяют *условию* (А).

Если члены ряда убывают не медленнее некоторой геометрической прогрессии, т. е. если

$$(k+1)^{\chi-1}a_{k+1} < \theta k^{\chi-1}a_k, \quad 0 < \theta < 1,$$

то он удовлетворяет условию (А). Но обратное заключение, разумеется, неверно, как показывает такой пример:

$$(2k-1)^{\chi-1}a_{2k-1} - (2k)^{\chi-1}a_{2k} = \theta^k, \quad k \in N, \quad 0 < \theta < 1.$$

Покажем, что если ряд удовлетворяет условию (А), то, каково бы ни было $\theta < 1$, его можно разбить на конечное l рядов (l зависит от θ) так, чтобы члены каждого из них убывали не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ .

Действительно, условие (14) означает, что $r_n < ck^{\chi-1}a_k$, где c — постоянное. Пусть θ задано. Выберем число l так, чтобы

$$l = \left[\frac{c}{\theta} \right]. \quad (15)$$

Тогда в силу монотонного убывания чисел $k^{\chi-1}a_k$ и в силу (15) имеем

$$(l+1)(k+l)^{\chi-1}a_{k+l} \leq \sum_{\nu=k}^{\nu=k+l} \nu^{\chi-1}a_{\nu} \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \nu^{\chi-1}a_{\nu} \leq ck^{\chi-1}a_k, \quad (16)$$

и поэтому из (16) следует

$$(k+l)^{\chi-1}a_{k+l} \leq \frac{c}{l+1} k^{\chi-1}a_k \leq \theta k^{\chi-1}a_k.$$

Значит, все l ряды

$$\begin{aligned} & 1^{\chi-1}a_1 + (1+l)^{\chi-1}a_{1+l} + (1+2l)^{\chi-1}a_{1+2l} + \dots, \\ & 2^{\chi-1}a_2 + (2+l)^{\chi-1}a_{2+l} + (2+2l)^{\chi-1}a_{2+2l} + \dots, \\ & \dots \\ & l^{\chi-1}a_l + (2l)^{\chi-1}a_{2l} + (3l)^{\chi-1}a_{3l} + \dots \end{aligned}$$

можно разложить на ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\chi-1}a_{\nu},$$

который убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ .

Далее в терминах модулей непрерывности приводятся необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций из пространства B_2 , когда спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ подчиняется условиям (3).

Для $0 < \beta < 2$ и $0 \leq \gamma < 1$ рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^\beta + |b_k(f)|^\beta) k^\gamma, \quad (17)$$

в котором $a_k(f), b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in B_2$.

Теорема 4. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (3) и

$$k^\rho = O(\lambda_k), \quad \rho > 0. \quad (18)$$

Если при $0 < \beta < 2$ и $0 \leq \gamma < 1$, $k > \frac{\gamma + 1 - \frac{\beta}{2}}{\rho\beta}$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\rho}-1} \omega_n^\beta \left(f, \frac{1}{k} \right)_{B_2} < \infty, \quad (19)$$

то ряд (17) сходится.

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_k \geq \pi$. Пусть

$$A_\nu = \{k : 2^{-\nu-1}\pi \leq \lambda_k \leq 2^{-\nu}\pi\}, \quad \nu \geq 1,$$

и $m(A_\nu)$ — количество элементов в A_ν . Коэффициентами Фурье функции $\Delta_h^n f(x)$ будут числа $2^n(|a_k(f)| + |b_k(f)|) \sin^n\left(\frac{h}{2}\right) \lambda_k$. Тогда в силу равенства Парсеваля (см., например, [4])

$$2^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \sin^{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \lambda_k = \|\Delta_h^n(f, x)\|_{B_2}^2,$$

тем более

$$2^{2n} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \sin^{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \lambda_k \leq \omega_n^2(f, h)_{B_2}. \quad (20)$$

При $h = 2^{-\nu}$ для чисел $\lambda_k \in A_\nu$ имеем $\sin\left(\frac{h}{2}\right) \lambda_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, из оценки (20) вытекает

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \leq 2^{-n} \omega_n^2(f, 2^{-\nu})_{B_2}. \quad (21)$$

По условиям теоремы $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, выполняются условия (18). Выберем возрастающую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda(k) = \lambda_k$ и $x^\rho = O(\lambda(x))$. Поступая так же, как и в работе [10], обозначив через $y = \mu(x)$ обратную функцию к $\lambda(x)$, имеем

$$y^\rho = x \frac{y^\rho}{\lambda(y)} = O(x),$$

где $x = \lambda(y)$. Следовательно,

$$y = O\left\{x^{\frac{1}{\rho}}\right\}.$$

Отсюда

$$m(A_\nu) \leq \mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1 \leq \mu(2^\nu \pi) + 1 = O\left\{2^{\frac{\nu}{\rho}}\right\}.$$

Если $\gamma \geq 0$, то, применяя неравенство Гёльдера, из (21) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^\beta + |b_k(f)|^\beta) k^\gamma &\leq \left\{ \sum_{k \in A_\nu} k^{\gamma(1-\frac{\beta}{2})^{-1}} \right\}^{1-\frac{\beta}{2}} \left\{ \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \right\}^{\frac{\beta}{2}} \leq \\ &\leq 2^{\frac{\nu\gamma}{\rho}} 2^{\frac{\nu(1-\frac{\beta}{2})}{\rho}} 2^{-\frac{n\beta}{2}} \omega_n^\beta(f, 2^{-\nu})_{B_2} = 2^{\frac{\nu(\gamma+1-\frac{\beta}{2})}{\rho}} 2^{-\frac{n\beta}{2}} \omega_n^\beta(f, 2^{-\nu})_{B_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

После суммирования (22) по ν имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k \in A_\nu} (|a_k(f)|^\beta + |b_k(f)|^\beta) k^\gamma \leq 2^{-\frac{n\beta}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\frac{\nu(\gamma+1-\frac{\beta}{2})}{\rho}} \omega_n^\beta(f, 2^{-\nu})_{B_2}.$$

Отсюда в силу монотонности величины $\omega_n(f, h)_{B_2}$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^\beta + |b_k(f)|^\beta) k^\gamma \leq 2^{-\frac{n\beta}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\gamma+1-\frac{\beta}{2}}{\rho}-1} \omega_n^\beta\left(f, \frac{1}{k}\right)_{B_2}.$$

Таким образом, в силу (19) и последнего неравенства вытекает сходимость ряда (17). $\square$

Отметим, что при $\gamma = 0$, $k = 1$ теорема 4 содержит результат Ю. Мусеилака (см., например, [6]). Так как $\omega_n(f, h)_{B_2} \leq 2^n \omega_1(f, h)_{B_2}$, то при $\gamma = 0$ теорема 4 дает более сильное условие сходимости рядов вида (17), чем теорема Мусеилака.

Определение 2. Говорят, что функция $f \in B$ имеет вариацию порядка $(r, 2)$, если

$$V_{r,2}(f) = \sup_{[a,b], T} \sum_{k=1}^n \left| f(x_k) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right|^r < \infty,$$

где T — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_n$. Такой класс функций обозначим через $BV_{r,2}$.

Лемма 4. Пусть $f \in BV_{r,2}$, $0 < r < 2$, $0 \leq h \leq 1$. Тогда

$$\omega(f, h)_{B_2} \leq \sqrt{2hBV_{r,2}(f)} \omega^{1-\frac{r}{2}}(f, h)_B \quad (23)$$

Доказательство. Так как $f \in B$, то равномерно по a существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{Th} \int_a^{a+Th} |f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)|^2 dx = \Omega_2^2(f, h)_{B_2},$$

не зависящий от a (см., например, [3]).

Тогда

$$\Omega_2^2(f, h)_{B_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{Th} \int_a^{a+Th} |f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)|^2 + \varepsilon_k(T),$$

где $\lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon_k(T) = 0$ равномерно по k .

Если $n \in \mathbb{N}$, $nh \leq 1 < (n+1)h$, то

$$\begin{aligned} n\Omega_2^2(f, h)_{B_2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{Th} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{kh+Th} |f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(T) \leq \\ &\leq \frac{1}{Th} \omega_2^{2-r}(f, h)_B \int_0^{Th} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x-h+kh) - 2f(x+kh) + f(x+h+kh)|^r dx + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(T) \leq \end{aligned}$$

$$\leq V_{r,2}(f)\omega_2^{2-r}(f, h)_B + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(T).$$

Таким образом,

$$\Omega_2^2(f, h)_{B_2} \leq \frac{(n+1)h}{n} V_{r,2}(f)\omega_2^{2-r}(f, h)_B + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(T).$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим (23). $\square$

Теорема 5. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in BV_{r,2}$, $0 < r < 2$, удовлетворяет условиям (3) и (18). Если при $0 < \beta < 2$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1-\beta}{\rho} - 1 - \frac{\beta}{2}} \omega_n^{\beta(1-\frac{r}{2})} \left(f, \frac{1}{k} \right)_B < \infty,$$

то ряд (7) сходится.

Доказательство. Из теоремы 4 при $n = 2$ и $\gamma = 0$ следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^{\beta} + |b_k(f)|^{\beta}) \leq 2^{-n} \omega_n^{\beta} \left(f, \frac{1}{k} \right)_{B_2}.$$

Тогда в силу неравенства (23) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^{\beta} + |b_k(f)|^{\beta}) \leq k^{\frac{1-\beta}{\rho} - 1 - \frac{\beta}{2}} \omega_n^{\beta(1-\frac{r}{2})} \left(f, \frac{1}{k} \right)_B.$$

$\square$

В случае, когда $\rho = 1$ и $\omega(h) = O\{h^{\alpha}\}$, получим $\beta > \frac{2}{2 + \alpha(2-r)}$. Этот случай при $r = 1$ получен Варашкевичем и А. Зигмундом (см. [14], с. 138). При $\rho = \beta = 1$ справедлива

Теорема 6. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f \in BV_{r,2}$, $0 < r < 2$, удовлетворяет условиям (3) и $\omega(f, h) = O\{h^{\alpha}\}$, $\alpha > 0$. Тогда ряд (4) абсолютно сходится.

При $r = 1$ эта теорема была получена А. Зигмундом. Если в теореме 5 полагать $\rho = \beta = r = 1$, то получаем известное условие абсолютной сходимости ряда (4) ([15], с. 231)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt{\omega(f, k^{-1})} < \infty,$$

который обобщает результат Зигмунда.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Besicovich A.S. *Almost periodic functions* (Cambridge Univ. Press, 1932).
- [2] Besicovich A.S. *Almost periodic and generalized trigonometric series*, Acta Math. **57**, 203-292 (1931).
- [3] Бор Г. *Почти периодические функции* (М.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1934).
- [4] Левитан Б.М. *Почти-периодические функции* (М.: Гостехиздат, 1953).
- [5] Бредихина Е.А. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций*, ДАН СССР **179** (5), 1023-1026 (1968).
- [6] Musielak J. *O bezwzględnej zbieżności szeregow Fouriera pewnych funkcji prawie okresowych*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III **5**, 9-17 (1957).
- [7] Купцов Н.П. *Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций*, Матем. сб. **40** (2), 157-178 (1956).

- [8] Припула Я.Г. *Про абсолютну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій*, Вісник Львів. ун-ту **137** (5), 72–80 (1971).
- [9] Джафаров А.С., Мамедов Г.А. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича*, Изв. АН Азерб. ССР (5), 8–13 (1983).
- [10] Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций*, Матем. заметки **94** (5), 745–756 (2013).
- [11] Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича*, Докл. АН Респ. Тадж. **61** (5), 813–821 (2018).
- [12] Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике*, Докл. АН Респ. Тадж. **63** (5–6), 286–292 (2020).
- [13] Талбаков Ф.М. *Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике*, Изв вузов. Матем. (4), 65–75 (2023).
- [14] Zygmund A. *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwow, 1935).
- [15] Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов*. I, Матем. сб. **29** (1), 225–232 (1951).

Юсуфали Хасанович Хасанов

*Российско-Таджикский славянский университет,
ул. М. Турсун-заде, д. 30, г. Душанбе, 734025, Республика Таджикистан,
e-mail: yukhas60@mail.ru*

Фарходдзон Махмадшоевич Талбаков

*Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни,
ул. Рудаки д. 121, г. Душанбе, 734003, Республика Таджикистан,
e-mail: talbakov_90@mail.ru*

Yu.Kh. Khasanov and F.M. Talbakov

On the absolute convergence of Fourier series of almost periodic functions

Abstract. The paper investigates sufficient conditions for the absolute convergence of trigonometric Fourier series of almost-periodic functions in the sense of Besikovitch in the case when the Fourier exponents have a single limiting point at infinity. A higher-order modulus of continuity is used as a structural characteristic of the function under consideration.

Keywords: almost-periodic Besikovitch function, Fourier series, function spectrum, Fourier coefficients, modulus of continuity, trigonometric polynomial.

Yusufali Khasanovich Khasanov

*Russian-Tajik Slavonic University,
30 M. Tursunzoda str., Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan,
e-mail: yukhas60@mail.ru*

Farkhodzhon Makhmadshevich Talbakov

*Tajik State Pedagogical University named after S. Aenya,
121 Rudaki str., Dushanbe, 734003 Republic of Tajikistan,
e-mail: talbakov_90@mail.ru*