

А.Х. СТАШ

О БЕСКОНЕЧНЫХ СПЕКТРАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Тематика исследования данной работы находится на стыке теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. Изучаются спектры (т.е. множества различных значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости знаков (строгих и нестрогих), нулей, корней и гиперкорней линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами.

В первой части работы конструктивно построено дифференциальное уравнение третьего порядка, обладающая тем свойством, что ее спектры всех верхних и нижних сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней содержат счетное множество различных существенных значений, причем как метрически, так и топологически. Более того, все эти значения реализованы на одной и той же последовательности решений построенного уравнения, т.е. для каждого решения из этой последовательности все перечисленные выше показатели колеблемости совпадают между собой.

При построении указанного уравнения и доказательстве требуемых результатов использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и методы теории возмущений решений линейных дифференциальных уравнений, в частности, авторская методика управления фундаментальной системой решений таких уравнений в одном частном случае.

Во второй части работы доказано существование дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами показателей колеблемости. При этом спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с наперед заданными произвольными положительными несоизмеримыми концами. Оказалось, что для каждого решения построенного уравнения все показатели колеблемости совпадают между собой.

Полученные результаты носят теоретический характер, они расширяют наши представления о возможных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частота Сергеева.

УДК: 517.926

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-47-66

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В статье [4] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В настоящей работе будем рассматривать следующие их разновидности:

- показатели колеблемости *строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней*;
- *верхние и нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);
- *сильные и слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения y линейного уравнения n -го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. Сильные показатели, в отличие от слабых, не являются остаточными, т. е. инвариантными относительно изменения решения на любом конечном отрезке [5].

В работах [6], [7] характеристические частоты скалярной функции (см. [1]) стали называться частотами Сергеева. Они позволяют численно измерять колеблемость решений на полупрямой. Частоту Сергеева решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей (или знаков, или корней) решения на полуинтервале длины π . Оказалось, что на решениях линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения [1] и позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к примеру, функции $y(t) = \sin \omega t$ ее частоту ω (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = \exp \alpha t$ ее показатель α).

Мотивацией к рассмотрению характеристик колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем послужило следующее обстоятельство (см. [6]). Как известно, показатели Ляпунова и Перрона линейной дифференциальной системы совпадают в автономном случае с вещественными частями собственных значений матрицы коэффициентов и поэтому могут рассматриваться для систем с переменными коэффициентами как аналоги вещественных частей собственных значений (показатели Перрона после регуляризации по Миллионщикову [1]). Аналогами же мнимых частей собственных значений для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами являются частоты Сергеева после регуляризации по Миллионщикову, а для линейных дифференциальных систем — показатели колеблемости [2], [8], [9]. Поэтому введением (в дополнение к показателям Ляпунова и Перрона) этих характеристик достигается естественная и необходимая полнота рассмотрения линейных дифференциальных уравнений и систем с точки зрения асимптотики поведения на бесконечности их решений в той степени, в какой это поведение для автономных уравнений и систем отражают корни их характеристических многочленов.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Сначала дадим основные определения.

Определение 1. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (соответственно отрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения (см. [1]).

Определение 2. Для момента $t > 0$ и функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введем (см. [1], [2], [3]) следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчете каждый некрatный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\alpha(y, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle \psi y, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3. *Верхние (нижние) частоты Сергеева знаков, нулей и корней* любого решения $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$, соответственно, зададим (см. [1], [2]) формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \right).$$

Определение 4. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, соответственно, зададим (см. [2]–[4]) формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какой-либо из характеристик колеблемости будем называть ее *точной*, убирая в ее обозначении крышечку и галочку.

Для выбранной функции $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ и произвольных $0 \leq s < t$ добавим к определениям 3 и 4 обозначения

$$\nu^\gamma(y, s, t) \equiv \nu^\gamma(y, t) - \nu^\gamma(y, s), \quad \gamma \in \{-, 0, +\},$$

$$\nu^\alpha(y, m, s, t) \equiv \nu^\alpha(y, m, t) - \nu^\alpha(y, m, s), \quad m \in \mathbb{R}_*^n, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Замечание 1. Для любой функции $y \in \mathcal{S}_\varepsilon^n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \hat{\nu}^-(y) &\leq \hat{\nu}^0(y) \leq \hat{\nu}^+(y), \quad \check{\nu}^-(y) \leq \check{\nu}^0(y) \leq \check{\nu}^+(y); \\ \hat{\nu}_\circ^-(y) &\leq \hat{\nu}_\circ^\sim(y) \leq \hat{\nu}_\circ^0(y) \leq \hat{\nu}_\circ^+(y) \leq \hat{\nu}_\circ^*(y), \quad \hat{\nu}_\bullet^-(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^\sim(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^0(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^+(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^*(y); \\ \check{\nu}_\circ^-(y) &\leq \check{\nu}_\circ^\sim(y) \leq \check{\nu}_\circ^0(y) \leq \check{\nu}_\circ^+(y) \leq \check{\nu}_\circ^*(y), \quad \check{\nu}_\bullet^-(y) \leq \check{\nu}_\bullet^\sim(y) \leq \check{\nu}_\bullet^0(y) \leq \check{\nu}_\bullet^+(y) \leq \check{\nu}_\bullet^*(y); \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(y) &\leq \hat{\nu}_\bullet^\alpha(y), \quad \check{\nu}_\circ^\alpha(y) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(y), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}; \\ \hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) &\leq \hat{\nu}^\gamma(y), \quad \check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \leq \check{\nu}^\gamma(y), \quad \gamma \in \{-, 0, +\}. \end{aligned}$$

Определение 5. Множество $\kappa(\mathcal{S}_*(a))$ всех значений показателя $\kappa: \mathcal{S}_*(a) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем *спектром* этого показателя уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, а значение показателя κ , принадлежащее спектру уравнения a , назовем

а) *метрически существенным* (см. [10]), если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, начальные значения $\psi y(0) \in \mathbb{R}^n$ которых заполняют множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) *топологически существенным* (см. [11]), если оно принимается на решениях $y \in \mathcal{S}_*(a)$, множество начальных значений $\psi y(0) \in \mathbb{R}^n$ которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Замечание 2. Из определения вытекает, что множество всех существенных значений показателя κ любого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ не более чем счетно.

2. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все показатели колеблемости равны нулю. Известно [2], что спектры показателей колеблемости линейного однородного уравнения второго порядка состоят ровно из одного элемента, но зато спектры частот Сергеева знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений порядка выше двух принадлежат классу суслинских множеств неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой [7], [12], [13]. В предположении, что спектры содержат точку нуль, справедливо обращение этого утверждения [12]–[14].

Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [2], [8] и полностью завершено в [9]. Частоты Сергеева знаков, нулей и корней на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами были исследованы лишь частично (см. [1]). В [15] доказано, что для произвольных положительных несоизмеримых чисел $\omega_2 > \omega_1$ существует автономное уравнение четвертого порядка, спектр верхней частоты Сергеева корней которого совпадает с отрезком $[\omega_1, \omega_2]$. В [16] установлено существование периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней которого содержат невырожденный отрезок. Этот результат в работе [17] был перенесен и на спектры показателей колеблемости нулей дифференциальных уравнений третьего порядка, правда, с непрерывными неограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Оказалось, что последний результат можно обобщить сразу для всех характеристик колеблемости, спектры которых состоят из отрезка с заданными положительными несоизмеримыми концами.

Теорема 1. Для любых несоизмеримых $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется такое уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, что при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы соотношения

$$\nu_\circ^\alpha(\mathcal{S}_*(a)) = \nu_\bullet^\alpha(\mathcal{S}_*(a)) = \nu^-(\mathcal{S}_*(a)) = \nu^0(\mathcal{S}_*(a)) = \nu^+(\mathcal{S}_*(a)) = [\omega_1, \omega_2].$$

В работах И. Н. Сергеева [10], [11] было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение. Спектры частот Сергеева знаков, нулей и корней автономных уравнений четвертого порядка могут содержать заданное число существенных значений, однако в случае автономных уравнений третьего порядка спектры содержат одно типичное или два существенных значения.

В работах [18], [19] доказано существования дифференциальных уравнений третьего порядка со счетными множествами существенных (и метрически, и топологически) значений частот Сергеева нулей и показателей колеблемости нулей соответственно. Эти результаты обобщаются сразу на все характеристики колеблемости, как показывает следующая

Теорема 2. *Существует уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, имеющее последовательность решений $y_1, y_2, \dots$, удовлетворяющая при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ условиям*

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(y_i) = \nu_{\bullet}^{\alpha}(y_i) = \nu^{-}(y_i) = \nu^0(y_i) = \nu^{+}(y_i) = 2 \cdot 3^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения характеристик колеблемости являются существенными (и метрически, и топологически).

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При вычислении характеристик колеблемости понадобится

Лемма 1. *Пусть возрастающая последовательность положительных чисел $\{t_k\}$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

Тогда для любых $y \in \mathcal{S}_^n$, $\gamma \in \{-, 0, +\}$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$*

1) справедливы равенства

$$\hat{\nu}^{\gamma}(y) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\gamma}(y, t_k) \quad \left(\check{\nu}^{\gamma}(y) = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\gamma}(y, t_k) \right), \quad (1)$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \quad \left(\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \right), \quad (2)$$

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \quad \left(\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y) = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \right); \quad (3)$$

2) если последовательности $T_1, T_2, \dots \geq 0$ и $\nu_1^{\alpha}, \nu_2^{\alpha}, \dots \geq 0$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_k^{\alpha}}{t_k} = 0,$$

то после уменьшения в правых частях формул (1)–(3) каждого из чисел t_k в знаменателе дроби на T_k , а каждого из чисел $\nu^{\alpha}(y, m, t_k)$ на ν_k^{α} значение этих правых частей не изменится.

Доказательство. Справедливость леммы для частот Сергеева нулей и строгих смен знаков установлена в [1], а для показателей колеблемости нулей — в [20]. Для остальных характеристик колеблемости проводятся аналогичные рассуждения. $\square$

Для управления фундаментальной системой решений дифференциального уравнения третьего порядка нам понадобится

Лемма 2. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$ найдутся уравнения $a_k, b_k \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, фундаментальные системы решений $x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{S}_*(a_k)$ и $x_2, y_2, z_2 \in \mathcal{S}_*(b_k)$ которых при каждом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(x_1, y_1, z_1)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c, 1, \sin t), & 0 \leq t \leq (2k+1)\pi; \\ (\exp(-\cos t) + c + 3, 1, \sin t), & t \geq (2k+4)\pi, \end{cases}$$

$$(x_2, y_2, z_2)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + c + 3, 1, \sin t), & 0 \leq t \leq 2k\pi; \\ (\exp(-\cos t) + c, 1, \sin t), & t \geq (2k+3)\pi, \end{cases}$$

$$\nu^\alpha(x_1(t) - c - 1, (2k+1)\pi, (2k+4)\pi) = \nu^\alpha(x_1(t) - c - 4, (2k+1)\pi, (2k+4)\pi) = 0, \quad (4)$$

$$\nu^\alpha(x_2(t) - c - 1, 2k\pi, (2k+3)\pi) = \nu^\alpha(x_2(t) - c - 4, 2k\pi, (2k+3)\pi) = 0.$$

Доказательство. 1. Для набора функций

$$f_1(t) = \exp(-\cos t) + c, \quad f_2(t) = 1, \quad f_3(t) = \sin t,$$

определитель Вронского

$$W_{f_1, f_2, f_3}(t) = \exp(-\cos t) (1 + \sin^2 t \cos t)$$

при любом $t \geq 0$ положителен, а линейное однородное уравнение, решениями которого они являются, имеет вид (см. [21])

$$\frac{1}{W_{f_1, f_2, f_3}(t)} \begin{vmatrix} \exp(-\cos t) + c & 1 & \sin t & y \\ \sin t \exp(-\cos t) & 0 & \cos t & \dot{y} \\ (\cos t + \sin^2 t) \exp(-\cos t) & 0 & -\sin t & \ddot{y} \\ (\sin^3 t + 3 \sin t \cos t - \sin t) \exp(-\cos t) & 0 & -\cos t & \ddot{\ddot{y}} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

2. Пусть заданы $k \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R}$. Введем обозначения:

$$T_1^k \equiv (2k+1)\pi, \quad T_2^k \equiv T_1^k + \pi, \quad T_3^k \equiv T_1^k + 2\pi, \quad T_4^k \equiv T_1^k + 3\pi.$$

На отрезке $[T_1^k, T_4^k]$ выберем непрерывно трижды дифференцируемую функцию $\theta_1(t)$, убывающую на интервалах (T_1^k, T_2^k) , (T_3^k, T_4^k) , возрастающую на (T_2^k, T_3^k) , имеющую перегибы в точках $s_1^k \equiv T_1^k + \pi/2$, $s_2^k \equiv T_2^k + \pi/2$, $s_3^k \equiv T_3^k + \pi/2$ и обладающую свойствами

$$\theta(T_1^k) = f_1(T_1^k), \quad \theta(T_2^k) = c + 2, \quad \theta(T_3^k) = c + 3, 5, \quad \theta(T_4^k) = f_1(T_4^k) + 3,$$

$$\theta'(T_1^k) = f_1'(T_1^k), \quad \theta''(T_1^k) = f_1''(T_1^k), \quad \theta'''(T_1^k) = f_1'''(T_1^k),$$

$$\theta'(T_4^k) = f_1'(T_4^k), \quad \theta''(T_4^k) = f_1''(T_4^k), \quad \theta'''(T_4^k) = f_1'''(T_4^k).$$

Определитель Вронского

$$W_{\theta_1, f_2, f_3}(t) = \theta_1'(t) \sin t + \theta_1''(t) \cos t$$

системы функций $\theta_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ на отрезке $[T_1^k, T_4^k]$ положителен, так как неотрицательные функции $g_1(t) = \theta_1'(t) \sin t$ и $g_2(t) = \theta_1''(t) \cos t$ на отрезке $[T_1^k, T_4^k]$ одновременно в нуль не обращаются.

3. Таким образом, положительность определителя Вронского системы трижды непрерывно дифференцируемых функций

$$x_1(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \leq T_1^k; \\ \theta_1(t), & t \in [T_1^k, T_4^k], \\ f_1(t) + 3, & t \geq T_4^k, \end{cases} \quad y_1(t) = f_2(t), \quad z_1(t) = f_3(t);$$

позволяет восстановить уравнение третьего порядка, решением которого они являются, совпадающим на $[0, T_1^k] \cup [T_4^k, +\infty)$ с уравнением (5).

4. Так как функция $\theta_1(t)$ на отрезке $[T_1^k, T_4^k]$ принимает свои наибольшее и наименьшее значения соответственно в точках T_2^k, T_3^k , то справедливы оценки

$$x_1(t) \geq \theta_1(T_2^k) = c + 2, \quad x_1(t) \leq \theta_1(T_3^k) = c + 3,5, \quad t \in [T_1^k, T_2^k],$$

на оснований которых на отрезке $[T_1^k, T_4^k]$ имеем

$$x_1(t) - c - 1 = \theta_1(t) - c - 1 \geq 1, \quad x_1(t) - c - 4 = \theta_1(t) - c - 4 \leq -0,5.$$

Последние две оценки устанавливают справедливость равенств (4).

5. На отрезке $[T_0^k, T_3^k]$ зададим функцию $\theta_2 \in C^3([T_0^k, T_3^k])$, возрастающую на интервалах (T_0^k, T_1^k) , (T_2^k, T_3^k) , убывающую на (T_1^k, T_2^k) , имеющую перегибы в точках s_0^k, s_1^k, s_2^k , и обладающую свойствами

$$\theta_2(T_0^k) = f_1(T_0^k), \quad \theta_2(T_1^k) = c + 0,5 + e^{-1}, \quad \theta_2(T_2^k) = c - 1,5, \quad \theta_2(T_3^k) = f_1(T_3^k) - 3,$$

$$\theta_2'(T_0^k) = f_1'(T_0^k), \quad \theta_2''(T_0^k) = f_1''(T_0^k), \quad \theta_2'''(T_0^k) = f_1'''(T_0^k),$$

$$\theta_2'(T_3^k) = f_1'(T_3^k), \quad \theta_2''(T_3^k) = f_1''(T_3^k), \quad \theta_2'''(T_3^k) = f_1'''(T_3^k),$$

где $s_0^k = s_1^k - \pi$, $T_0^k = T_1^k - \pi$.

Система функций

$$x_2(t) = \begin{cases} f_1(t) + 3, & t \leq T_0^k; \\ \theta_2(t), & t \in [T_0^k, T_3^k], \\ f_1(t), & t \geq T_3^k, \end{cases} \quad y_2(t) = f_2(t), \quad z_2(t) = f_3(t);$$

с положительным определителем Вронского является фундаментальной для некоторого уравнения $b_k \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

Заметим, что из оценки

$$x_2(t) \leq \theta_2(T_1^k) = c + 0,5 + e^{-1}, \quad t \in [T_0^k, T_3^k],$$

вытекает неравенство

$$x_2(t) - c - 1 = \theta_2(t) - c - 1 \leq e^{-1} - 0,5 < 0, \quad t \in [T_0^k, T_3^k],$$

завершающее доказательство леммы 2. □

4. СЧЕТНЫЕ СПЕКТРЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В этом разделе приведем доказательство теоремы 2.

Доказательство. 1. При любом $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\Delta_k \equiv 6\pi k + 3(3^k - 1)\pi \tag{6}$$

и возьмем любую последовательность $\{\epsilon_k\}$ положительных чисел, стремящуюся к нулю.

Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Начиная с некоторого номера k_1 , всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\Delta_1}{t_k} < \epsilon_1$. Меняем элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера k_2

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \quad k \geq k_2,$$

так, чтобы выполнялось

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \epsilon_2, \quad k \geq k_2.$$

Далее, по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для любого $i \in \mathbb{N}$ построена последовательность $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, удовлетворяющая условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \epsilon_i, \quad k \geq k_i,$$

то выбираем k_{i+1} так, чтобы при любом $k \geq k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1}, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \epsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность $\{t_k\}$, заданную рекуррентной формулой

$$t_k \equiv t_{k-1} + \Delta_{i(k-1)}, \quad t_0 \equiv 0, \quad i(0) = 1,$$

обладающую свойствами

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_k}{t_{k-1}} = 1.$$

2. Первые два элемента построенной в п. 1 последовательности, соответственно, равны

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta_1 = 12\pi.$$

Разобьем промежутки $(0, t_1]$ на части

$$(0; t_0^1], \quad (t_0^1; t_0^1 + T_0], \quad (t_0^1 + T_0; t_0^1 + 2T_0], \quad (t_0^1 + 2T_0; t_1],$$

где $t_0^1 = T_0 = 3\pi$.

Остальные промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1 , также разбиваем на промежутки

$$(t_k; t_k + t_k^1], \quad (t_k + t_k^1; t_k + t_k^1 + T_0], \quad (t_k + t_k^1 + T_0; t_k + t_k^1 + 2T_0], \quad (t_k + t_k^1 + 2T_0; t_{k+1}],$$

где $t_k^1 = 3\pi$.

Промежутки $(t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами с шагом Δ_2 построенной последовательности, начиная с номера k_2 до $k_3 - 1$, разбиваем на части

$$(t_k; t_k + t_k^1], \quad (t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2], \quad (t_k^2 + 2T_0; t_k^3], \quad (t_k^3 + T_0; t_{k+1}],$$

$$(t_k + t_k^1, t_k + t_k^1 + T_0], \quad (t_k^2; t_k^2 + T_0], \quad (t_k^2 + T_0; t_k^2 + 2T_0], \quad (t_k^3; t_k^3 + T_0],$$

где

$$t_k^1 = t_k + 3^2\pi, \quad t_k^2 = t_k + t_k^1 + T_0 + 3\pi, \quad t_k^3 = t_k^2 + 2T_0 + 3\pi, \quad t_{k+1} = t_k^3 + T_0 + 3^2\pi.$$

Любые два соседних элемента построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} = t_k + \Delta_i, \quad k_i \leq k \leq k_{i+1} - 1.$$

Промежутки $(t_k, t_{k+1}]$ разбиваем на три группы:

$$(t_k^i + T_0; t_k^i + 2T_0],$$

$$(t_k + t_k^1, t_k + t_k^1 + T_0], (t_k^2; t_k^2 + T_0], \dots, (t_k^i; t_k^i + T_0], \dots, (t_k^{2i-1}; t_k^{2i-1} + T_0], \quad (7)$$

$$(t_k; t_k + t_k^1], (t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2], (t_k^2 + T_0; t_k^3], \dots, (t_k^i + 2T_0; t_k^{i+1}], \dots, (t_k^{2i-1} + T_0; t_{k+1}], \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} t_k^1 &= t_k + 3^i \pi, & t_k^2 &= t_k + t_k^1 + T_0 + 3^{i-1} \pi, & t_k^3 &= t_k^2 + T_0 + 3^{i-2} \pi, \dots, \\ t_k^i &= t_k^{i-1} + T_0 + 3\pi, & t_k^{i+1} &= t_k^i + 2T_0 + 3\pi, & t_k^{i+2} &= t_k^{i+1} + T_0 + 3^2 \pi, \dots, \\ t_k^{2i-1} &= t_k^{2i-2} + T_0 + 3^{i-1} \pi, & t_{k+1} &= t_k^{2i-1} + T_0 + 3^i \pi. \end{aligned}$$

3. Построим уравнение третьего порядка, фундаментальная система решений которого на каждом из промежутков (8) при некотором фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными фундаментальными системами решений. На основании леммы 2 строим уравнение следующим образом:

— на участке $[t_k + t_k^1; t_k + t_k^1 + T_0]$ найдем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 1, 1, \sin t) \quad (9)$$

решений, заданных на $[t_k, t_k + t_k^1]$, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 4, 1, \sin t) \quad (10)$$

решений, заданных на $[t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2]$ (здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, и третье — в третье);

— на участке $[t_k^2; t_k^2 + T_0]$ найдем уравнение, переводящее набор (10) решений, заданных слева от точки t_k^2 , в набор

$$(\exp(-\cos t) + 7, 1, \sin t)$$

решений, заданных на $[t_k^2 + T_0; t_k^3]$;

— ... и т. д.;

— на участке $[t_k^i; t_k^i + T_0]$ выберем уравнение, переводящее набор

$$(\exp(-\cos t) + 3i - 2, 1, \sin t) \quad (11)$$

решений, заданных на $[t_k^{i-1} + T_0; t_k^i]$, в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3i + 1, 1, \sin t); \quad (12)$$

— на участке $[t_k^i + T_0; t_k^i + 2T_0]$ выберем уравнение, переводящее набор (12) в набор (11) решений, заданных на $[t_k^i + 2T_0; t_k^{i+1}]$;

— на участке $[t_k^{i+1}; t_k^{i+1} + T_0]$ выберем уравнение, переводящее набор (11) решений, заданных слева от точки t_k^{i+1} , в набор

$$(\exp(-\cos t) + 3i - 5, 1, \sin t)$$

решений, заданных справа от точки $t_k^{i+1} + T_0$;

— ... и т. д.;

— на участке $[t_k^{2i-1}; t_k^{2i-1} + T_0]$ выберем уравнение, совпадающим с уравнением, переводящим набор (10) решений, заданных слева от точки t_k^{2i-1} , в набор (9) решений, заданных справа от точки $t_k^{2i-1} + T_0$;

— во всех остальных точках полуинтервала $(t_k; t_{k+1}]$ выберем уравнение, имеющее вид (5).

В итоге построили уравнение на промежутке $(t_k; t_{k+1}]$, фундаментальная система решений y_1, y_2, y_3 которого удовлетворяет условиям:

$$(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{cases} (\exp(-\cos t) + 1, 1, \sin t), & t_k < t \leq t_k + t_k^1; \\ (\exp(-\cos t) + 4, 1, \sin t), & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leq t_k^2; \\ \dots & \\ (\exp(-\cos t) + 3i - 2, 1, \sin t), & t_k^{i-1} + T_0 < t \leq t_k^i; \\ (\exp(-\cos t) + 3i - 2, 1, \sin t), & t_k^i + 2T_0 < t \leq t_k^{i+1}; \\ \dots & \\ (\exp(-\cos t) + 4, 1, \sin t), & t_k^{2i-2} + T_0 < t \leq t_k^{2i-1}; \\ (\exp(-\cos t) + 1, 1, \sin t), & t_k^{2i-1} + T_0 < t \leq t_{k+1}. \end{cases}$$

Повторяя эту процедуру построения для всех $k \in \mathbb{N}$, получим на $\mathbb{R}_+$ уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

4. Определим функцию $u(t) = \exp(-\cos t) - 1$ и установим, что число нулей функции

$$\langle \psi u(t), m \rangle = m_1(\exp(-\cos t) - 1) + m_2 \sin t \exp(-\cos t) + m_3 \exp(-\cos t)(\cos t + \sin^2 t)$$

на полуинтервале $(0, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m = (m_1, m_2, m_3)$ не меньше двух. Для этого проследим за значениями функции $\langle \psi u, m \rangle$ в точках $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$:

$$\langle \psi u(0), m \rangle = \langle \psi u(2\pi), m \rangle = \frac{m_1}{e} - m_1 + \frac{m_3}{e}, \quad (13)$$

$$\langle \psi u(\pi), m \rangle = m_1 e - m_1 - m_3 e, \quad (14)$$

$$\langle \psi u(\pi/2), m \rangle = m_2 + m_3, \quad (15)$$

$$\langle \psi u(3\pi/2), m \rangle = -m_2 + m_3. \quad (16)$$

Если $m_2 = m_3 = 0$ ($m_1 \neq 0$), то функция $\langle \psi u, m \rangle$ совпадает с $m_1 u$, а значит, имеет два нуля.

Можно легко убедиться, что следующие системы:

$$\begin{array}{lll} m_2 + m_3 > 0, & m_2 + m_3 < 0, & m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 = 0, & -m_2 + m_3 = 0, & -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e - 1) - m_3 e > 0, & m_1(e - 1) - m_3 e < 0, & m_1(e - 1) - m_3 e = 0, \\ m_1(1 - e) + m_3 > 0, & m_1(1 - e) + m_3 < 0, & m_1(1 - e) + m_3 > 0, \\ \\ m_2 + m_3 = 0, & m_2 + m_3 < 0, & m_2 + m_3 > 0, \\ -m_2 + m_3 < 0, & -m_2 + m_3 < 0, & -m_2 + m_3 > 0, \\ m_1(e - 1) - m_3 e < 0, & m_1(e - 1) - m_3 e = 0, & m_1(e - 1) - m_3 e > 0, \\ m_1(1 - e) + m_3 < 0, & m_1(1 - e) + m_3 < 0, & m_1(1 - e) + m_3 = 0, \\ \\ m_2 + m_3 < 0, & m_2 + m_3 > 0, & \\ -m_2 + m_3 < 0, & -m_2 + m_3 > 0, & \\ m_1(e - 1) - m_3 e < 0, & m_1(e - 1) - m_3 e > 0, & \\ m_1(1 - e) + m_3 = 0, & m_1(1 - e) + m_3 > 0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
m_2 + m_3 &< 0, & m_2 + m_3 &= 0, \\
-m_2 + m_3 &< 0, & -m_2 + m_3 &> 0, \\
m_1(e-1) - m_3e &< 0, & m_1(e-1) - m_3e &> 0, \\
m_1(1-e) + m_3 &< 0, & m_1(1-e) + m_3 &> 0
\end{aligned}$$

не имеют места, тем самым для значений (13)–(16) исключили десять критических случаев, а все оставшиеся случаи обеспечивают существование по крайней мере двух нулей функции $\langle \psi u(t), m \rangle$ на полуинтервале $(0, 2\pi]$. Поэтому при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ установили

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \nu^\alpha(u, m, 2\pi) = \nu^-(u, 2\pi) = \nu^0(u, 2\pi) = \nu^+(u, 2\pi) = 2. \quad (17)$$

5. Для произвольного решения $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \in \mathcal{S}_*(a)$ определим величины

$$\begin{aligned}
\kappa_k(y) &= \frac{1}{3^{i(k)+1}} (\nu^-(y, t_k, t_k + t_k^1) + \nu^-(y, t_k + t_k^1 + T_0, t_k^2) + \nu^-(y, t_k^2 + T_0, t_k^3) + \dots + \\
&+ \nu^-(y, t_k^i + T_0, t_k^i + 2T_0) + \dots + \nu^-(y, t_k^{2i(k)-2} + T_0, t_k^{2i(k)-1}) + \nu^-(y, t_k^{2i(k)-1} + T_0, t_{k+1})), \\
\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \kappa_k(y, m) &= \frac{1}{3^{i(k)+1}} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} (\nu^-(y, m, t_k, t_k + t_k^1) + \nu^-(y, m, t_k + t_k^1 + T_0, t_k^2) + \dots + \\
&+ \nu^-(y, m, t_k^i + T_0, t_k^i + 2T_0) + \nu^-(y, m, t_k^i + 2T_0, t_k^{i+1}) + \dots + \\
&+ \nu^-(y, m, t_k^{2i(k)-2} + T_0, t_k^{2i(k)-1}) + \nu^-(y, m, t_k^{2i(k)-1} + T_0, t_{k+1})),
\end{aligned}$$

где $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1} .

Из множества $\mathcal{S}_*(a)$ выделим последовательность решений

$$z_q = (y_1 - (3q - 1)y_2) : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Решение z_1 при любом $k \in \mathbb{N}$ представимо в виде

$$z_1(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 1, & t_k < t \leq t_k + t_k^1; \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leq t_k^2; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 4, & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leq t_k^{i(k)}; \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 4, & t_k^{i(k)} + 2T_0 < t \leq t_k^{i(k)+1}; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leq t_k^{2i(k)-1}; \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leq t_{k+1}, \end{cases}$$

и оно на каждом из промежутков

$$(t_k; t_k + t_k^1], \quad (t_k^{2i(k)-1} + T_0; t_{k+1}]$$

имеет $3^{i(k)}$ строгих знаков, тогда как любая функция $\langle z_1, m \rangle$ не может иметь менее $3^{i(k)}$ знаков в силу предыдущего пункта, а на любом другом промежутке вида (8) решение z_1 отделено от нуля, а значит, выполнена цепочка равенств

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \kappa_k(z_1, m) = \kappa_k(z_1) = \frac{2 \cdot 3^i}{3^{i+1}} = \frac{2}{3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Решение z_2 при любом $k \geq k_2$ представимо в виде

$$z_2(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) - 4, & t_k < t \leq t_k + t_k^1; \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leq t_k^2; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 7, & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leq t_k^{i(k)}; \\ \exp(-\cos t) + 3i(k) - 7, & t_k^{i(k)} + 2T_0 < t \leq t_k^{i(k)+1}; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) + 2, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leq t_k^{2i(k)-1}; \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leq t_{k+1}, \end{cases}$$

и на каждом из промежутков

$$(t_k + t_k^1 + T_0; t_k^2], \quad (t_k^{2i(k)-2} + T_0; t_k^{2i(k)-1}]$$

имеет $3^{i(k)-1}$ строгих знаков, поэтому в силу (17) получим

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \kappa_k(z_2, m) = \kappa_k(z_2) = \frac{2 \cdot 3^{i-1}}{3^{i+1}} = \frac{2}{3^2}.$$

При любом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ решение z_q (начиная с первого момента k_q появления Δ_q -го шага) при любом $k \geq k_q$ представимо в виде

$$z_q(t) = \begin{cases} \exp(-\cos t) + 2 - 3q, & t_k < t \leq t_k + t_k^1; \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3q, & t_k + t_k^1 + T_0 < t \leq t_k^2; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{q-1} + T_0 < t \leq t_k^q; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)-1} + T_0 < t \leq t_k^{i(k)}; \\ \exp(-\cos t) - 1 + 3(i(k) - q), & t_k^{i(k)} + 2T_0 < t \leq t_k^{i(k)+1}; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) - 1, & t_k^{2i(k)-q+1} + T_0 < t \leq t_k^{2i(k)-q+2}; \\ \dots & \\ \exp(-\cos t) + 5 - 3q, & t_k^{2i(k)-2} + T_0 < t \leq t_k^{2i(k)-1}; \\ \exp(-\cos t) + 2 - 3q, & t_k^{2i(k)-1} + T_0 < t \leq t_{k+1}, \end{cases}$$

и любая функция $\langle z_q, m \rangle$ на каждом из промежутков

$$(t_k^{q-1} + T_0; t_k^q], \quad (t_k^{2i(k)-q+1} + T_0; t_k^{2i(k)-q+2}] \quad (19)$$

в силу (17) имеет не менее $3^{i(k)-q+1}$ строгих знаков, а на любом другом промежутке вида (8) решение z_q отделено от нуля, следовательно,

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \kappa_k(z_q, m) = \kappa_k^\alpha(z_q) = \frac{2}{3^q}. \quad (20)$$

6. Сначала последовательность (6) представим в виде

$$\Delta_k = (2k - 1)T_0 + 3^{k+1}\pi,$$

далее последовательность $\{T_l\}$ сумм длин всех промежутков из списка (7), попавших в промежуток $(0, t_{l+1}]$, зададим формулой

$$T_{l+1} \equiv (P_1 + 3P_2 + \dots + (2j(l) - 1)P_{j(l)})T_0,$$

где P_1 — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом Δ_1 , P_2 — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом Δ_2 и т. д., $P_{j(l)}$ — число всех элементов последовательности $\{t_k\}$ с шагом $\Delta_{j(l)}$, не превышающих $t_{l+1} \equiv t_l + \Delta_{j(l)}$. Ясно, что

$$t_{l+1} \equiv \left(3^2 P_1 + 3^3 P_2 + \dots + 3^{j(l)+1} P_{j(l)}\right) \pi + T_{l+1},$$

и из $l \rightarrow +\infty$ следует $j \rightarrow +\infty$.

На основании леммы 2 последовательность $\{\nu_l\}$ сумм строгих знаков любой функции (18) на каждом из всех промежутков (7), попавших в $(0, t_{l+1}]$, равна нулю.

В силу неубывания последовательности $\{P_j\}$ имеем

$$\frac{P_k}{P_j} \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, j - 1,$$

поэтому справедливы оценки

$$\frac{T_{l+1}}{t_{l+1}} \leq \frac{T_0 (P_1 + 3P_2 + \dots + (2j(l) - 1)P_{j(l)})}{\pi 3^{j(l)+1} P_{j(l)}} \leq \frac{T_0 (1 + 3 + \dots + (2j(l) - 1))}{\pi 3^{j(l)+1}} = \frac{j^2(l)}{3^{j(l)}},$$

на основании которых выполнены равенства

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{T_l}{t_l} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\nu_l}{t_l} = 0.$$

7. На основании п. 6 настоящего доказательства при вычислении частот Сергеева любой функции из последовательности (18) воспользуемся леммой 1, согласно которой можно не учитывать как полуинтервал $(0, t_{k_q}]$, так и все полуинтервалы (7) (т. е. не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число знаков, ни в само это число). Учитывая, что все нули любой функции z_q из (18) являются точками строгой смены знака, будем иметь

$$\begin{aligned} \check{\nu}^-(z_q) &= \check{\nu}^0(z_q) = \check{\nu}^+(z_q) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(z_q, t_p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi \nu^-(z_q, t_{k_q}) + \pi \sum_{i=k_q}^p \nu^-(z_q, t_i, t_{i+1})}{t_{p+1}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi \sum_{i=k_q}^p \nu^-(z_q, t_i, t_{i+1})}{t_{p+1} - t_{k_q}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi \sum_{i=k_q}^p (\nu^-(z_q, t_i + T_0, t_i^1) + \nu^-(z_q, t_i^1 + T_0, t_i^2) + \dots + \nu^-(z_q, t_i^{2^{j(i)}-1} + T_0, t_{i+1}))}{(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1})\pi} = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{3^{j(k_q)+1} \kappa_{k_q}(z_q) + 3^{j(k_q+1)+1} \kappa_{k_q+1}(z_q) + \dots + 3^{j(p)+1} \kappa_p(z_q)}{3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1})}{3^q(3^{j(k_q)+1} + 3^{j(k_q+1)+1} + \dots + 3^{j(p)+1})} = \frac{2}{3^q}, \end{aligned}$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между t_i, t_{i+1} .

В силу равенств (20) минимум в определении слабых показателей колеблемости каждого выбранного решения реализуется на векторе $m = (1, 0, 0)$. Следовательно, при любом $q \in \mathbb{N}$ получим

$$\check{\nu}_\circ^\alpha(z_q) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(z_q, m, t_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(z_q, m_q, t_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(z_q, t_p) = \frac{2}{3^q}.$$

Кроме того, для выбранных решений при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеет место (см. замечание 1) двусторонняя оценка

$$\frac{2}{3^q} = \check{\nu}_\circ^\alpha(z_q) \leq \check{\nu}_\bullet^\alpha(z_q) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(z_q, m, t_p) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^\alpha(z_q, m_q, t_p) = \frac{2}{3^q}.$$

Аналогичные соотношения справедливы, соответственно, и для верхних характеристик колеблемости, поэтому имеем

$$\nu^-(z_q) = \nu^0(z_q) = \nu^+(z_q) = \nu_\bullet^\alpha(z_q) = \nu_\circ^\alpha(z_q) = 2 \cdot 3^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

8. Докажем, что каждое значение (21) является метрически и топологически существенным. С одной стороны, согласно теореме об изоморфизме [22] линейное пространство решений $y \in \mathcal{S}(a)$ изоморфно линейному пространству их начальных значений

$$\psi y(0) = (y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0)) \in \mathbb{R}^3.$$

С другой стороны, функции z_1, z_2, z_3 образуют фундаментальную систему решений уравнения a . Поэтому каждому решению $y \in \mathcal{S}(a)$ можно поставить в соответствие единственную тройку коэффициентов его линейного разложения

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

получив тем самым еще один изоморфизм линейных пространств $\mathcal{S}(a)$ и $\mathbb{R}^3$. В итоге мы имеем отображение множества начальных значений $\psi y(0) \in \mathbb{R}^3$ в множество троек коэффициентов $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, которое также осуществляет изоморфизм линейных пространств. Учитывая, что естественная топология в $\mathbb{R}^3$ задается нормой и не зависит от ее выбора, без ограничения общности можно считать, что эта норма задается формулой

$$|c| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что для каждого решения z_q из последовательности (18) возмущенное решение

$$\begin{aligned} \bar{z}_q &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, \\ c_1 &\in (1, 1 + \epsilon), \quad c_2 \in (1 - 3q, 1 - 3q + \epsilon), \quad c_3 \in (0, \epsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

того же уравнения при сколь угодно малом $\epsilon > 0$ удовлетворяет равенствам

$$\nu^-(\bar{z}_q) = \nu^0(\bar{z}_q) = \nu^+(\bar{z}_q) = \nu_\bullet^\alpha(\bar{z}_q) = \nu_\circ^\alpha(\bar{z}_q) = 2 \cdot 3^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Отсюда будет следовать совпадение показателей колеблемости исходного и возмущенного решений, соответствующих точкам из некоторой окрестности точки $(1, 1 - 3q, 0)$ в пространстве троек коэффициентов или, что то же, из некоторой окрестности U_q точки $\psi z_q(0)$ в пространстве начальных значений. Это сразу повлечет за собой и метрическую, и топологическую существенность значений (21), поскольку мера окрестности U_q положительна, а дополнение к ней в U_q вообще пусто.

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений возмущенное решение $\bar{z}_q$ с коэффициентами c_1, c_2, c_3 , удовлетворяющими условиям на любом отрезке $[0, t]$, будет мало отличаться от z_q . Поэтому решение $\bar{z}_q$ ни разу не будет обращаться в нуль

на тех участках, где функция z_q отделена от нуля. На остальных участках вида (19), где функция z_q имеет вид $\exp(-\cos t) - 1$, решение $\bar{z}_q$ представимо в виде

$$\bar{z}_q = c_1(\exp(-\cos t) - 1) + c_2^* + c_3 \sin t,$$

где c_2^* — положительное, достаточно малое число.

Покажем, что функция

$$\begin{aligned} \langle \psi \bar{z}_q(t), m \rangle &\equiv m_1(c_1(\exp(-\cos t) - 1) + c_2^* + c_3 \sin t) + \\ &+ m_2 \exp(-\cos t)(c_1 \sin t + c_3 \cos t) + m_3 \exp(-\cos t)(c_1(\cos t + \sin^2 t) - c_3 \sin t) \end{aligned}$$

на полуинтервале $(0, 2\pi]$ при любом ненулевом векторе $m \in \mathbb{R}_*^3$ имеет не менее двух нулей. Для этого проследим за следующими значениями функции:

$$\langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle = (c_2^* + c_3)m_1 + c_1m_2 + (c_1 - c_3)m_3, \quad (24)$$

$$\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle = (c_2^* - c_3)m_1 - c_1m_2 + (c_1 + c_3)m_3, \quad (25)$$

$$\langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle = m_1(c_1e + c_2^* - c_1) - ec_3m_2 - ec_1m_3, \quad (26)$$

$$e\langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle = e\langle \psi \bar{z}_q(2\pi), m \rangle = m_1(c_1 + ec_2^* - ec_1) + c_3m_2 + c_1m_3. \quad (27)$$

Нетрудно проверить, что системы

$$\begin{aligned} \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &< 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &> 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &= 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &= 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &> 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &< 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &= 0, \\ e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &> 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &< 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &> 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &< 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &< 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &= 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &< 0, \\ e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &< 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &= 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &= 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &= 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &< 0, \\ e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &> 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(0), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi), m \rangle &< 0, \\ \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &> 0, & \langle \psi \bar{z}_q(\pi/2), m \rangle &< 0, \\ e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &> 0, & e\langle \psi \bar{z}_q(3\pi/2), m \rangle &< 0 \end{aligned}$$

не имеют места. В самом деле, пусть имеет место последняя система (для остальных систем проводятся аналогичные рассуждения)

$$\begin{aligned} (c_2^* + c_3)m_1 + c_1m_2 + (c_1 - c_3)m_3 &< 0, \\ (c_2^* - c_3)m_1 - c_1m_2 + (c_1 + c_3)m_3 &< 0, \\ (c_1e + c_2^* - c_1)m_1 - ec_3m_2 - ec_1m_3 &< 0, \\ (c_1 + ec_2^* - ec_1)m_1 + c_3m_2 + c_1m_3 &< 0. \end{aligned}$$

Умножая последнее неравенство системы на e и складывая его с третьим, получаем неравенство

$$(2c_1e + e^2c_2^* + c_2^* - c_1 - e^2c_1)m_1 < 0,$$

из которого следует $m_1 > 0$.

Складывая первые два неравенства системы, будем иметь

$$c_2^*m_1 + c_1m_3 < 0,$$

отсюда на основании положительности m_1 вытекает отрицательность m_3 .

Далее, первое неравенство умножив на ec_3 , а третье — на c_1 , сложим их:

$$(ec_2^*c_3 + ec_3^2 + c_1^2e + c_1c_2^* - c_1)m_1 + (ec_1c_3 - ec_3^2 - ec_1^2)m_3 < 0.$$

С другой стороны, в последнем неравенстве коэффициент при m_1 положительный, а коэффициент при m_3 отрицательный, поэтому (учитывая положительность m_1 и отрицательность m_3) имеет место неравенство

$$(ec_2^*c_3 + ec_3^2 + c_1^2e + c_1c_2^* - c_1)m_1 + (ec_1c_3 - ec_3^2 - ec_1^2)m_3 > 0,$$

которое не согласуется с предыдущим неравенством, а значит, рассматриваемой системе не удовлетворяет никакой вектор $m \in \mathbb{R}_*^3$.

Следовательно, рассмотренные десять различных комбинаций знаков значений (24)–(27) не имеют места, а любая другая комбинация гарантирует существование хотя бы двух нулей функции $\langle \psi \bar{y}_i, m \rangle$ на полуинтервале $(0, 2\pi]$. Тем самым при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ установлено равенство

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \nu^\alpha(\bar{z}_q, m, 2\pi) = \nu^-(\bar{z}_q, 2\pi) = \nu^0(\bar{z}_q, 2\pi) = \nu^+(\bar{z}_q, 2\pi) = 2.$$

Таким образом, все решения $\bar{z}_q$ с коэффициентами c_1, c_2, c_3 из условия (22) при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ обладают свойством (23).

Последнее означает, что значения, задаваемые равенствами (21), являются метрически и топологически существенными. $\square$

5. КОНТИНУАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В этом разделе приведем доказательство теоремы 1.

Доказательство. 1. По заданным несоизмеримым $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется такое $\epsilon \in (0, 1)$, что выполнено неравенство

$$\omega_2 < \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\epsilon}},$$

из которого вытекает

$$0 < \omega_2^2 - \omega_1^2 < \epsilon \omega_2^2. \quad (28)$$

Выберем на $\mathbb{R}_+$ систему из трех функций:

$$y_1(t) = e^{t^2}(\cos \omega_1 t + \epsilon), \quad y_2(t) = e^{t^2} \cos \omega_2 t, \quad y_3(t) = e^{t^2} \sin \omega_2 t$$

и вычислим их производные до третьего порядка включительно

$$\dot{y}_1(t) = e^{t^2}(2t \cos \omega_1 t + 2t\epsilon - \omega_1 \sin \omega_1 t),$$

$$\ddot{y}_1(t) = e^{t^2}(4t^2 \cos \omega_1 t + 4t^2\epsilon - 4\omega_1 t \sin \omega_1 t + (2 - \omega_1^2) \cos \omega_1 t + 2\epsilon),$$

$$\ddot{y}_1(t) = e^{t^2}(8t^3 \cos \omega_1 t - 12\omega_1 t^2 \sin \omega_1 t + (12t - 6\omega_1^2 t) \cos \omega_1 t + (\omega_1^3 - 6\omega_1) \sin \omega_1 t + 8\epsilon t^3 + 12\epsilon t),$$

$$\dot{y}_2(t) = e^{t^2}(2t \cos \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_2 t),$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_2(t) &= e^{t^2} (4t^2 \cos \omega_2 t - 4\omega_2 t \sin \omega_2 t + (2 - \omega_2^2) \cos \omega_2 t), \\
\ddot{y}_2(t) &= e^{t^2} ((12t - 6\omega_2^2 t) \cos \omega_2 t - 12\omega_2 t^2 \sin \omega_2 t + 8t^3 \cos \omega_2 t + (\omega_2^3 - 6\omega_2) \sin \omega_2 t), \\
\dot{y}_3(t) &= e^{t^2} (2t \sin \omega_2 t + \omega_2 \cos \omega_2 t), \\
\ddot{y}_3(t) &= e^{t^2} (4t^2 \sin \omega_2 t + 4\omega_2 t \cos \omega_2 t + (2 - \omega_2^2) \sin \omega_2 t), \\
\ddot{y}_3(t) &= e^{t^2} ((12t - 6\omega_2^2 t) \sin \omega_2 t + 12\omega_2 t^2 \cos \omega_2 t + 8t^3 \sin \omega_2 t - (\omega_2^3 - 6\omega_2) \cos \omega_2 t).
\end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы

$$X \equiv \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 \end{pmatrix}$$

и на основании (28) оценим снизу

$$\begin{aligned}
\det X(t) &= \omega_2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) \cos t + \epsilon \omega_2^2) e^{-3t^2} > \\
&> e^{3t^2} \omega_2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) \cos t + (\omega_2^2 - \omega_1^2)) = e^{3t^2} \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\cos t + 1) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Следовательно, выбранная система функций $y_1, y_2, y_3 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ является (см. [21]) фундаментальной для уравнения

$$\frac{1}{\det X(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y} \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \ddot{y} \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \ddot{y} \end{vmatrix} = 0$$

из множества $\tilde{\mathcal{E}}^3$. Обозначим это уравнение через $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$.

2. Зафиксируем ненулевой набор $c = (c_1, c_2, c_3)$ так, чтобы решение

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \in \mathcal{S}_*(a)$$

или функция

$$f_c(t) \equiv e^{-t^2} y_c(t) = c_1 (\cos \omega_1 t + \epsilon) + c_2 \cos \omega_2 t + c_3 \sin \omega_2 t$$

не имели кратных нулей.

Докажем, что число нулей функции $f_c(t)$ на любом интервале (t_0, T) при достаточно большом t_0 совпадает с числом нулей функции

$$\begin{aligned}
e^{-t^2} \langle \psi y_c(t), m \rangle &\equiv m_1 (c_1 (\cos \omega_1 t + \epsilon) + c_2 \cos \omega_2 t + c_3 \sin \omega_2 t) + \\
&+ m_2 (c_1 (2t \cos \omega_1 t + 2t\epsilon - \omega_1 \sin \omega_1 t) + c_2 (2t \cos \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_2 t) + c_3 (2t \sin \omega_2 t + \omega_2 \cos \omega_2 t)) + \\
&+ m_3 (c_1 (4t^2 \cos \omega_1 t + 4t^2 \epsilon - 4\omega_1 t \sin \omega_1 t + (2 - \omega_1^2) \cos \omega_1 t + 2\epsilon) + c_2 (4t^2 \cos \omega_2 t - \\
&- 4\omega_2 t \sin \omega_2 t + (2 - \omega_2^2) \cos \omega_2 t) + c_3 (4t^2 \sin \omega_2 t + 4\omega_2 t \cos \omega_2 t + (2 - \omega_2^2) \sin \omega_2 t))
\end{aligned}$$

на этом же интервале при любом векторе $m \in \mathbb{R}_*^3$.

Если $m_3 \neq 0$, то при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнена цепочка равенств

$$\nu^\alpha(y_c(t), m, t_0, T) = \nu^-(f_c(t), t_0, T) = \nu^0(f_c(t), t_0, T) = \nu^+(f_c(t), t_0, T), \quad (29)$$

так как имеет место представление

$$\frac{\langle \psi y_c(t), m \rangle}{4m_3 t^2 e^{t^2}} = c_1 (\cos \omega_1 t + \epsilon) + c_2 \cos \omega_2 t + c_3 \sin \omega_2 t + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если $m_3 = 0$, $m_2 \neq 0$, то при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнена цепочка равенств (29), поскольку функция $\langle \psi y_c(t), m \rangle$ удовлетворяют условию

$$\frac{\langle \psi y_c(t), m \rangle}{2m_2 t e^{t^2}} = c_1(\cos \omega_1 t + \epsilon) + c_2 \cos \omega_2 t + c_3 \sin \omega_2 t + \varphi_2(t),$$

где $\varphi_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Справедливость цепочки равенств (29) очевидна и в случае $m_2 = m_3 = 0$, так как

$$\langle \psi y_c(t), m \rangle = m_1(c_1(\cos \omega_1 t + \epsilon) + c_2 \cos \omega_2 t + c_3 \sin \omega_2 t).$$

Рассмотренные случаи показывают, что минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на любом векторе $m \in \mathbb{R}_*^3$, в частности, на векторе $m = (1, 0, 0)$.

3. Выделим из множества $\mathcal{S}_*(a)$ однопараметрическое множество

$$f_A(t) = (1 - A)(\cos \omega_1 t + \epsilon) - A \cos(\omega_2 t + \varphi), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad A \in [0, 1].$$

Очевидно, что множество всех различных значений вспомогательного аргумента $\varphi = \varphi(A)$ имеет мощность континуума.

В работе [16] доказано, что для каждого значения $A \in [0, 1]$

- множество всех значений φ , в которых функция $f_A(t)$ имеет кратные нули, не более чем счетно;
- найдется такое значение $\varphi = \varphi(A)$, при котором ни в одном из нулей функции $f_A(t)$ не обнуляется ее производная;
- частота нулей функции $f_A(t)$ не зависит от φ и является точной.

Следовательно, на основании п.2 настоящего доказательства при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и любом фиксированном значении $A \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$\nu_\bullet^\alpha(y_A) = \nu_\circ^\alpha(y_A) = \nu^-(y_A) = \nu^0(y_A) = \nu^+(y_A) = \nu^0(f_A),$$

где

$$y_A(t) = (1 - A)e^{t^2}(\cos \omega_1 t + \epsilon) - Ae^{t^2} \cos(\omega_2 t + \varphi) \in \mathcal{S}_*(a).$$

Так как характеристические частоты нулей однопараметрического семейства f_A при изменении параметра A от 0 до 1 принимают все значения из отрезка $[\omega_1, \omega_2]$ (см. [15], [16]), то характеристики колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней однопараметрического семейства y_A также будут принимать все значения из отрезка $[\omega_1, \omega_2]$.

4. Теперь убедимся в том, что спектры характеристик колеблемости не содержат других значений. Заметим, что нижний слабый показатель строгих смен знаков любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ не может быть меньше ω_1 в силу рассуждений, проведенных в п. 2 настоящего доказательства.

На основании теоремы IV [1] и следствия 2 [9] верхние частота Сергеева корней и показатель колеблемости гиперкорней любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ не могут быть больше ω_2 в силу того, что при каждом $m \in \mathbb{R}_*^3$ функция $e^{-t^2} \langle \psi y_c(t), m \rangle$ является решением некоторого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, спектры всех характеристик колеблемости (см. замечание 1) состоят из всех чисел отрезка $[\omega_1, \omega_2]$. $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе доказано существования дифференциальных уравнений с бесконечными спектрами характеристик колеблемости. Интересным остается вопрос о существовании линейного однородного периодического дифференциального уравнения третьего порядка со счетным спектром существенных значений какой-либо характеристики колеблемости.

Автор искренне признателен профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сергеев И.Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения*, Тр. сем. им. И. Г. Петровского **25**, 249–294 (2006).
- [2] Сергеев И.Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы*, Изв. РАН. Сер. матем. **76** (1), 149–172 (2012).
- [3] Сергеев И.Н. *Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем*, Матем. сб. **204** (1), 119–138 (2013).
- [4] Сергеев И.Н. *Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем*, Тр. сем. им. И. Г. Петровского **31**, 177–219 (2016).
- [5] Сташ А. Х. *Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки **31** (1), 59–69 (2021).
- [6] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. *К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I*, Дифференц. уравнения **52** (10), 1302–1320 (2016).
- [7] Быков В.В. *О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **52** (4), 419–425 (2016).
- [8] Бурлаков Д.С., Цой С.В. *Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы*, Тр. сем. им. И. Г. Петровского **30**, 75–93 (2014).
- [9] Сташ А.Х. *Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки **29** (4), 558–568 (2019).
- [10] Сергеев И.Н. *Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем*, Дифференц. уравнения **47** (11), 1661–1662 (2011).
- [11] Сергеев И.Н. *Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем*, Дифференц. уравнения **48** (11), 1567–1568 (2012).
- [12] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. *Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений*, Докл. НАН Беларуси **60** (1), 24–31, (2016).
- [13] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. *К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II*, Дифференц. уравнения **52** (12), 1595–1609 (2016).
- [14] Войделевич А.С. *О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений*, Журн. Белорусск. гос. ун-та. Матем. Информатика (1), 28–32 (2019).
- [15] Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н. *Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний*, Дифференц. уравнения **48** (4), 479–486 (2012).
- [16] Смоленцев М.В. *Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок*, Дифференц. уравнения **50** (10), 1413–1417 (2014).
- [17] Сташ А.Х. *О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот*, Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки **122** (3), 9–17 (2013).
- [18] Смоленцев М.В. *Существование линейного уравнения третьего порядка со счетным спектром частот*, Тр. сем. им. И.Г. Петровского **30**, 242–251 (2014).
- [19] Сташ А.Х. *О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка*, Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. наук. **119** (2), 9–23 (2013).
- [20] Сташ А.Х. *О спектрах полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнения третьего порядка*, Тр. сем. им. И.Г. Петровского. **30**, 252–269 (2014).
- [21] Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений* (М.: Едиториал УРСС, 2004).
- [22] Сергеев И.Н. *Дифференциальные уравнения* (М.: Издат. центр «Академия», 2013).

Айдамир Хазретович Сташ

Адыгейский государственный университет,
ул. Первомайская, д. 208, г. Майкоп, 385000, Россия,

e-mail: aidamir.stash@gmail.com

*A.Kh. Stash***On infinite spectra of oscillation exponents of third order linear differential equations**

Abstract. The research topic of this work is at the junction of the theory of Lyapunov exponents and oscillation theory. In this paper, we study the spectra (i.e., the sets of different values on nonzero solutions) of the exponents of oscillation of signs (strict and nonstrict), zeros, roots, and hyperroots of linear homogeneous differential equations with coefficients continuous on the positive semi-axis.

In the first part of the paper, we build a third order linear differential equation with the following property: the spectra of all upper and lower strong and weak exponents of oscillation of strict and non-strict signs, zeros, roots and hyper roots contain a countable set of different essential values, both metrically and topologically. Moreover, all these values are implemented on the same sequence of solutions of the constructed equation, that is, for each solution from this sequence, all of the oscillation exponents coincide with each other.

In the construction of the indicated equation and in the proof of the required results, we used analytical methods of the qualitative theory of differential equations and methods from the theory of perturbations of solutions of linear differential equations, in particular, the author's technique for controlling the fundamental system of solutions of such equations in one special case.

In the second part of the paper, the existence of a third order linear differential equation with continuum spectra of the oscillation exponents is established, wherein the spectra of all oscillation exponents fill the same segment of the number axis with predetermined arbitrary positive incommensurable ends. It turned out that for each solution of the constructed differential equation, all of the oscillation exponents coincide with each other.

The obtained results are theoretical in nature, they expand our understanding of the possible spectra of oscillation exponents of linear homogeneous differential equations.

Keywords: differential equation, linear system, oscillation, number of zeros, oscillation exponent, Sergeev frequency.

*Aydamir Khazretovich Stash**Adyghe State University,**208 Pervomayskaya str., Maykop, 385000 Russia,**e-mail:* aidamir.stash@gmail.com