

Н.А. РАТХЕР, А. БХАТ, М. ШАФИ

УТОЧНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ТУРАНА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Аннотация. Для многочлена $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ степени n , все нули которого находятся в $|z| \leq k$, $k \geq 1$, В. Джейн в работе “On the derivative of a polynomial”, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome **59**, 339–347 (2016) доказал, что

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \left(\frac{|c_0| + |c_n| k^{n+1}}{|c_0|(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Мы уточняем это неравенство и связанные с ним результаты для многочленов степени $n \geq 2$.

Ключевые слова: многочлен, неравенство, комплексная область.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-39-46

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{P}_n$ — класс многочленов $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ степени n . Область математических неравенств и их приложений в последние десятилетия развивалась динамично и экспоненциально, что существенно повлияло на различные научные направления. Одним из важных неравенств в теории комплексных многочленов является неравенство Бернштейна [1], которое утверждает, что если $P \in \mathcal{P}_n$, то $\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|$. П. Туран [2] исследовал нижнюю границу максимума модуля первой производной комплексного многочлена на единичной окружности в терминах максимума модуля многочлена на той же окружности и доказал, что если $P \in \mathcal{P}_n$ и все нули $P(z)$ находятся в $|z| \leq 1$, то

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (1)$$

В качестве обобщения (1) Н. Говил [3] показал, что если $P \in \mathcal{P}_n$ и $P(z) \neq 0$ в $|z| > k$, $k \geq 1$, то

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{1 + k^n} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (2)$$

В 1991 г. Н. Говил [4] улучшил оценку в (2) и доказал, что при тех же предположениях

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{1 + k^n} \left\{ \max_{|z|=1} |P(z)| + \min_{|z|=k} |P(z)| \right\}. \quad (3)$$

За дальнейшей информацией по полиномиальным неравенствам мы отсылаем читателя к монографиям Г. Миловановича и др. [5], а также К. Рахмана и Г. Шмайсера [6]. Применив обобщенную форму классической леммы Шварца, недавно В. Джейн [7] получил следующее уточнение (2) с использованием коэффициентов многочлена $P(z)$.

Теорема А. Если $P \in \mathcal{P}_n$ и все нули $P(z)$ находятся в $|z| \leq k$, $k \geq 1$, то

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \left(\frac{|c_0| + |c_n|k^{n+1}}{|c_0|(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (4)$$

После этого А. Мир [8] получил следующее обобщение (4).

Теорема В. Если $P \in \mathcal{P}_n$ и все нули $P(z)$ находятся в $|z| \leq k$, $k \geq 1$, то для любого $0 \leq t \leq 1$

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \left(\frac{|c_0| + tm + |c_n|k^{n+1}}{(|c_0| + tm)(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \left\{ \max_{|z|=1} |P(z)| + tm \right\}, \quad (5)$$

где $m = \min_{|z|=k} |P(z)|$.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье мы получаем определенные уточнения и обобщения неравенств (2)–(5).

Теорема 1. Пусть $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2$, и $P(z)$ не имеет нулей в $|z| > k$, $k \geq 1$, тогда

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} |P'(z)| &\geq n \left(\frac{|c_0| + |c_n|k^{n+1}}{|c_0|(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \max_{|z|=1} |P(z)| + \\ &+ \left(\frac{(|c_0| + k^{n-1}|c_n|)(k^{n+1} - \phi(k))}{|c_0|(k^{n+1} + 1) + |c_n|(k^{2n} + k^{n+1})} \right) |c_1|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2; \\ k, & n = 2. \end{cases}$$

Данная оценка точна и равенство достигается при $P(z) = z^n + k^n$.

Замечание 1. При $k \geq 1$ имеем $k^{n+1} - \phi(k) \geq 0$, отсюда теорема 1 является уточнением неравенства (4). Проиллюстрируем это с помощью следующего примера.

Пример 1. Рассмотрим $P(z) = (z + 1)^2(z + 2)$ — многочлен степени 3. Ясно, что все нули $P(z)$ находятся в $|z| \leq 2$. Применяя теорему А к этому многочлену при $k = 2$, мы получаем

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq 5.684,$$

тогда как теорема 1 дает оценку

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq 9.631,$$

что является значительным улучшением нижней границы, полученной из неравенства (4).

Докажем теперь усиление теоремы 1, которое, в свою очередь, уточняет оценки в (4) и (5).

Теорема 2. Пусть $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2$, и $P(z)$ не имеет нулей в $|z| > k$, $k \geq 1$, тогда для любого $0 \leq l \leq 1$

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n & \left(\frac{|c_0| + lm + |c_n|k^{n+1}}{(|c_0| + lm)(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \left\{ \max_{|z|=1} |P(z)| + lm \right\} \\ & + \left(\frac{(|c_0| + lm + k^{n-1}|c_n|)(k^{n+1} - \phi(k))}{(|c_0| + lm)(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) |c_1|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2, \\ k, & n = 2, \end{cases} \text{ и } m = \min_{|z|=k} |P(z)|.$$

Данная оценка точна и равенство достигается при $P(z) = z^n + k^n$.

Замечание 2. При $l = 0$ теорема 2 сводится к теореме 1. Как и раньше, легко увидеть, что теорема 2 также уточняет неравенство (5), покажем это с помощью следующего примера.

Пример 2. Рассмотрим $P(z) = z^2 + 3z + \frac{5}{4}$. Ясно, что $P(z)$ — многочлен степени 2, все нули которого находятся в $|z| \leq \frac{5}{2}$. Возьмем $k = 3$ и получим

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = \frac{21}{4}, \quad \min_{|z|=3} |P(z)| = \frac{5}{4}.$$

Применяя теорему В с $t = 1$ к этому многочлену, имеем

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq 2.154,$$

тогда как теорема 2 (с $l = 1$) дает оценку

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq 4.378,$$

что гораздо лучше нижней границы, полученной из неравенства (5).

2. ЛЕММЫ

Для доказательства наших результатов нам понадобятся следующие леммы. Известным обобщением леммы Шварца является

Лемма 1 (Р. Оссерман [9]). Пусть $P(z)$ — аналитическая функция в $|z| < 1$, причем $P(0) = 0$ и $|P(z)| < 1$ для $|z| < 1$, тогда

$$|P(z)| \leq |z| \frac{|z| + |P'(0)|}{1 + |z||P'(0)|}, \quad |z| < 1.$$

Лемма 2 (К. Фраппье и др. [10]). Пусть $P(z)$ — многочлен степени $n \geq 1$, тогда для любого $R \geq 1$

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |P(z)| - (R^n - R^{n-2})|P(0)|, \quad n \geq 2, \quad (6)$$

и

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq R \max_{|z|=1} |P(z)| - (R - 1)|P(0)|, \quad n = 1. \quad (7)$$

Лемма 3. Если $P(z)$ — многочлен степени n , то для $|z| = 1$

$$|P'(z)| + |Q'(z)| \geq n|P(z)|,$$

где $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

Доказательство. Легко показать, что

$$|Q'(z)| = |nP(z) - zP'(z)| \quad \text{для} \quad |z| = 1.$$

Поэтому для $|z| = 1$ имеем

$$n|P(z)| = |nP(z) - zP'(z) + zP'(z)| \leq |nP(z) - zP'(z)| + |zP'(z)| = |Q'(z)| + |P'(z)|.$$

□

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Так как все нули многочлена $P(z)$ лежат в $|z| \leq k$, $k \geq 1$, то все нули многочлена $F(z) = P(kz)$ лежат в $|z| \leq 1$. Пусть $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ и $G(z) = z^n \overline{F(1/\bar{z})}$, тогда все нули $G(z) = z^n \overline{P(k/\bar{z})} = k^n Q(z/k)$ лежат в $|z| \geq 1$. Таким образом, функция $H(z) = \frac{zF(z)}{G(z)}$ удовлетворяет условиям леммы 1, причем $H'(0) = \frac{c_0}{k^n \bar{c}_n}$, и мы получаем для $|z| < 1$

$$|H(z)| \leq |z| \frac{|z| + \left| \frac{c_0}{k^n \bar{c}_n} \right|}{1 + \left| \frac{c_0}{k^n \bar{c}_n} \right| |z|}.$$

Отсюда

$$|zF(z)| \leq |z| \frac{k^n |c_n| |z| + |c_0|}{|c_0| |z| + k^n |c_n|} |G(z)|, \quad |z| < 1,$$

или

$$|P(kz)| \leq \frac{k^n |c_n| |z| + |c_0|}{|c_0| |z| + k^n |c_n|} \left| z^n \overline{P\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)} \right|, \quad |z| < 1. \quad (8)$$

Заметим, что неравенство (8) также верно для всех z на окружности $|z| = 1$, поэтому, взяв $z = \frac{e^{i\theta}}{k}$, где $0 \leq \theta < 2\pi$ и $k \geq 1$, получим

$$|P(e^{i\theta})| \leq \frac{k^n |c_n| \left| \frac{e^{i\theta}}{k} \right| + |c_0|}{|c_0| \left| \frac{e^{i\theta}}{k} \right| + k^n |c_n|} \left| \frac{e^{in\theta}}{k^n} \overline{P(k^2 e^{i\theta})} \right| = \frac{k^{n-1} |c_n| + |c_0|}{\frac{1}{k} (|c_0| + k^{n+1} |c_n|)} \frac{1}{k^n} |P(k^2 e^{i\theta})|.$$

Используя равенство $|P(z)| = |Q(z)|$ при $|z| = 1$, получаем

$$k^{n-1} |Q(z)| \leq \frac{k^{n-1} |c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1} |c_n|} |P(k^2 z)| \quad \text{для} \quad |z| = 1.$$

Поскольку все нули $P(k^2 z)$ лежат в $|z| \leq \frac{1}{k} \leq 1$, согласно теореме Руше все нули многочлена

$$T(z) = k^{n-1} Q(z) + \beta \frac{k^{n-1} |c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1} |c_n|} P(k^2 z)$$

лежат в $|z| < 1$ при любом $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| > 1$. По теореме Гаусса–Люка все нули многочлена

$$T'(z) = k^{n-1} Q'(z) + k^2 \beta \frac{k^{n-1} |c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1} |c_n|} P'(k^2 z)$$

лежат в $|z| < 1$, отсюда

$$k^{n-1}|Q'(z)| \leq k^2 \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} |P'(k^2 z)| \quad \text{для } |z| \geq 1.$$

В частности, получаем

$$k^{n-3} \max_{|z|=1} |Q'(z)| \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} \max_{|z|=k^2} |P'(z)|. \quad (9)$$

Объединяя неравенство (9) с неравенствами (6) и (7) при $R = k^2 \geq 1$, имеем

$$k^{n-3} \max_{|z|=1} |Q'(z)| \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{2n-2} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{2n-2} - k^{2n-2-4}) |P'(0)| \right), \quad n > 2,$$

и

$$k^{-1} \max_{|z|=1} |Q'(z)| \leq \frac{k|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^3|c_n|} \left(k^2 \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^2 - 1) |P'(0)| \right), \quad n = 2,$$

что эквивалентно

$$\max_{|z|=1} |Q'(z)| \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right), \quad (10)$$

$$\text{где } \phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2; \\ k, & n = 2. \end{cases}$$

В силу леммы 3

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| + \max_{|z|=1} |Q'(z)| \geq n \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (11)$$

Результаты (10) и (11) вместе дают

$$n \max_{|z|=1} |P(z)| \leq \max_{|z|=1} |P'(z)| + \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right),$$

или

$$\left(1 + \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} k^{n+1} \right) \max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \max_{|z|=1} |P(z)| + \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0|}{|c_0| + k^{n+1}|c_n|} (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)|,$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} |P'(z)| &\geq n \left(\frac{|c_0| + k^{n+1}|c_n|}{|c_0|(k^{n+1} + 1) + |c_n|(k^{2n} + k^{n+1})} \right) \max_{|z|=1} |P(z)| + \\ &\quad + \left(\frac{(|c_0| + k^{n-1}|c_n|)(k^{n+1} - \phi(k))}{|c_0|(k^{n+1} + 1) + |c_n|(k^{2n} + k^{n+1})} \right) |P'(0)|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2; \\ k, & n = 2. \end{cases} \quad \square$$

Доказательство теоремы 2. По условию все нули многочлена $P(z)$ лежат в $|z| \leq k$, $k \geq 1$. Если $P(z)$ имеет нуль на окружности $|z| = k$, то $m = \min_{|z|=k} |P(z)| = 0$, и результат в этом случае следует из теоремы 1. Предположим далее, что все нули $P(z)$ лежат в $|z| < k$, $k \geq 1$, тогда $m > 0$, и мы имеем

$$m \leq |P(kz)| = \left| z^n P\left(\frac{k}{z}\right) \right| \quad \text{для } |z| = 1.$$

Поскольку все нули $z^n P\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)$ лежат в $|z| > 1$, функция $m/z^n P\left(\frac{k}{\bar{z}}\right)$ является аналитической в $|z| \leq 1$. По принципу минимума модуля имеем

$$m < \left| z^n P\left(\frac{k}{\bar{z}}\right) \right| \quad \text{для} \quad |z| < 1.$$

Заменяя z на $\frac{1}{\bar{z}}$, получаем

$$m|z|^n < |P(kz)| \quad \text{для} \quad |z| > 1,$$

или

$$m \left| \frac{z}{k} \right|^n < |P(z)| \quad \text{для} \quad |z| > k. \quad (12)$$

Следовательно, что для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, все нули многочлена $H(z) = P(z) + \alpha m$ находятся в $|z| \leq k$. Так как если $H(z) = P(z) + \alpha m$ имеет нуль в $|z| > k$ при $z = z_0$, $|z_0| > k$, то

$$H(z_0) = P(z_0) + \alpha m = 0.$$

Отсюда

$$|P(z_0)| = |\alpha| m \leq m < m \left| \frac{z_0}{k} \right|^n,$$

что противоречит неравенству (12). Значит, мы можем заключить, что для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, все нули многочлена $H(z) = P(z) + \alpha m$ находятся в $|z| \leq k$, $k \geq 1$. Применяя неравенство (10) к многочлену $H(z) = P(z) + \alpha m$, получаем для любых $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, и $|z| = 1$ неравенство

$$\max_{|z|=1} |Q'(z) + n\alpha m| \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0 + \alpha m|}{|c_0 + \alpha m| + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right), \quad (13)$$

где $\phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2, \\ k, & n = 2, \end{cases}$ и $Q(z) = z^n P(\bar{z}/k)$.

Учтем, что для $\alpha \in \mathbb{C}$, удовлетворяющего неравенству

$$|c_0 + \alpha m| \leq |c_0| + |\alpha| m,$$

функция $f(x) = \frac{k^{n-1}|c_n| + x}{k^{n+1}|c_n| + x}$, $x \geq 0$, является неубывающей при $k \geq 1$. Тогда из неравенства (13) следует, что для любых $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, и $|z| = 1$

$$\max_{|z|=1} |Q'(z) + n\alpha m| \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0| + |\alpha m|}{|c_0| + |\alpha m| + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right).$$

Выбирая подходящим образом аргумент α в правой части этого неравенства, получаем

$$\max_{|z|=1} |Q'(z)| + n|\alpha| m \leq \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0| + |\alpha| m}{|c_0| + |\alpha| m + k^{n+1}|c_n|} \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right). \quad (14)$$

Также согласно лемме 3

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| + \max_{|z|=1} |Q'(z)| \geq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Используя это неравенство в (14), получаем

$$n \max_{|z|=1} |P(z)| \leq \max_{|z|=1} |P'(z)| + \frac{k^{n-1}|c_n| + |c_0| + |\alpha|m}{|c_0| + |\alpha|m + k^{n+1}|c_n|} \times \\ \times \left(k^{n+1} \max_{|z|=1} |P'(z)| - (k^{n+1} - \phi(k)) |P'(0)| \right) - n|\alpha|m,$$

что после упрощения, как и выше, приводит к

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \frac{|c_0| + lm + k^{n+1}|c_n|}{(|c_0| + lm)(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \left(\max_{|z|=1} |P(z)| + lm \right) + \\ + \left(\frac{(|c_0| + lm + k^{n-1}|c_n|)(k^{n+1} - \phi(k))}{(|c_0| + lm)(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) |P'(0)|,$$

где $\phi(k) = \begin{cases} k^{n-3}, & n > 2, \\ k, & n = 2, \end{cases} \quad \text{и} \quad l = |\alpha| \leq 1.$ □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bernstein S. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné*, Mem. Cl. Sci. Acad. Roy Belg. **4**, 1–103 (1912).
- [2] Turán P. *Über die Ableitung von Polynomen*, Compositio Math. **7**, 89–95 (1940).
- [3] Govil N.K. *On the derivative of a polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (2), 543–546 (1973).
- [4] Govil N.K. *Some inequalities for derivatives of polynomials*, J. Approx. Theory **66** (1), 29–35 (1991).
- [5] Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros* (World Scientific Publ. Co., Singapore, 1994).
- [6] Rahman Q.I., Schmeisser G. *Analytic Theory of Polynomials* (Oxford Univ. Press Inc., New York, 2002).
- [7] Jain V.K. *On the Derivative of a Polynomial*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome **59** (4), 339–347 (2016).
- [8] Mir A. *A Turán-type inequality for polynomials*, Indian J. Pure Appl. Math. **52**, 911–914 (2021).
- [9] Osserman R. *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (12), 3513–3517 (2000).
- [10] Frappier C., Rahman Q.I., Ruscheweyh St. *New inequalities for polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1), 69–99 (1985).

Нисар Ахмад Ратхер

Университет Кашмира,

Шринагар, 190006, Индия,

e-mail: dr.narather@gmail.com

Аяз Бхат

Университет Кашмира,

Шринагар, 190006, Индия,

e-mail: aijazb824@gmail.com

Мохмад Шафи

Университет Кашмира,

Шринагар, 190006, Индия,

e-mail: wanishafi1933@gmail.com

N.A. Rather, A. Bhat, and M. Shafi

Sharpening of Turán-type inequality for polynomials

Abstract. For the polynomial $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ of degree n having all its zeros in $|z| \leq k$, $k \geq 1$,

V. Jain in “On the derivative of a polynomial”, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome **59**, 339–347 (2016) proved that

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \left(\frac{|c_0| + |c_n| k^{n+1}}{|c_0|(1 + k^{n+1}) + |c_n|(k^{n+1} + k^{2n})} \right) \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

In this paper we strengthen the above inequality and other related results for the polynomials of degree $n \geq 2$.

Keywords: polynomial, inequality, complex domain.

Nisar Ahmad Rather

*University of Kashmir,
Srinagar, 190006 India,*

e-mail: dr.narather@gmail.com

Aijaz Bhat

*University of Kashmir,
Srinagar, 190006 India,*

e-mail: aijazb824@gmail.com

Mohmmad Shafi

*University of Kashmir,
Srinagar, 190006 India,*

e-mail: wanishafi1933@gmail.com