Известия вузов. Математика
2024, № 4, с. 31–38

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.И. МУМИНОВ, У.Р. ШАДИЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Аннотация. Рассматривается семейство ограниченных самосопряженных матричных операторов (обобщенных моделей Фридрихса), действующих на прямую сумму одночастичных и двухчастичных подпространств пространства Фока. Получены условия существования собственных значений матричных операторов.

Ключевые слова: модель Фридрихса, подпространства пространства Фока, собственное значение, существенный спектр.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-31-38

Введение

Спектральные исследования матрично-блочных операторов приведены в книге [1], где элементы матриц являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах. Одним из специальных классов матрично-блочных операторов являются гамильтонианы, связанные с системами, в которых не сохраняется число квазичастиц на решетке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозонов, или ограниченным, как в случае «усеченных» моделей спин-бозонов. Они возникают, например, в теории физики твердого тела [2], квантовой теории поля [3], статистической физике [4] и [5]. В известной модели радиационного рассеяния (так называемый спин-бозонный модели) предполагается, что атом, который может находиться в двух состояниях: основное состояние с энергией $-\varepsilon$ и возмушенное состояние с энергией ε, излучает и поглощает фотоны, переходя из одного состояния в другое (см. [5]–[8]). Спектральные свойства решеточной модели радиационного рассеяния (так называемого модель спин-бозона) двухуровневого атома и не более двух фотонов для одномерного случая были полностью изучены в [9]. Существенные и дискретные спектры решеточных моделей исследованы в работах [10]–[13].

Заметим, что пороговое собственное значение, виртуальный уровень (пороговый энергетический резонанс) и порог энергетического разложения для определителя Фредгольма, соответствующего обобщенной модели Фридрихса, были изучены в [14]–[16].

В настоящей работе рассматривается семейство ограниченных самосопряженных 2×2 операторных матриц $h(k),\ k \in \mathbb{T}^d$, связанных с решетчатыми системами, описывающие две одинаковые частицы, т. е. определенное семейство моделей Фридрихса действующих на прямое разложение одночастичных и двухчастичных подпространств пространства Фока.

Поступила в редакцию 11.02.2023, после доработки 25.03.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

Благодарности. Автор частично поддержан грантом № ФЗ-20200929224 Фонда фундаментальной науки Республики Узбекистан.

Устанавливаются условия существования отрицательного собственного значения рассматриваемых операторов.

1. Семейство ограниченных самосопряженных операторов и основные результаты

Обозначим через $\mathbb{T}^d$ d-мерный тор, куб $(-\pi,\pi]^d$ с идентифицированными сторонами и мерой Хаара. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — пространства комплексных чисел, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^d)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплексных) функций, определенных на $\mathbb{T}^d$.

Рассмотрим семейство ограниченных самосопряженных операторов (модели Фридрихса) $h(k), k \in \mathbb{T}^d$, действующих в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по формуле

$$h(k) = \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где

$$h_{00}(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}^d} v_1(s)f_1(s)ds,$$
$$h_{11}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}, \qquad (h_0(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q),$$

$E_k(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p-k)$, $\mathbf{v}$ — интегральный оператор с ядром $v(p-s)$ и $\varepsilon(k)$ — вещественное число.

Предположение. *Пусть $\varepsilon_j(p)$, $j=1,2$, — непрерывные (периодические) вещественные функции на $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, с единственной невырожденной точкой минимума в начале координат, и*

$$\liminf_{|p|\to 0} \frac{\varepsilon_j(p)-\varepsilon_j(0)}{|p|^2} > 0. \tag{1}$$

Также пусть $v(\cdot)$ — непрерывная функция на $\mathbb{T}^d$, и она удовлетворяет условию

$$v(p) = \overline{v(-p)}, \quad p \in \mathbb{T}^d,\ d \geq 3.$$

Заметим, что из теоремы Вейля для существенного спектра [17] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ оператора $h(k)$ остается неизменным при компактном возмущении v и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. Здесь $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ совпадает с образом функции $E_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [E_{\min}(k), E_{\max}(k)],$$

где $E_{\min}(k) = \min_p E_k(p)$ и $E_{\max}(k) = \max_p E_k(p)$. Поскольку функция $\varepsilon_j(p)$, $j=1,2$, является непрерывной (периодической) действительной на $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, и $\mathbf{0} \in \mathbb{T}^d$ является единственной невырожденной точкой минимума функции $\varepsilon_j(p)$, $j=1,2$, то $E_{\min}(k) > E_{\min}(0) = 0$ для $k \in \mathbb{T}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Например, для функции

$$\varepsilon_j(p) = l_j \sum_{n=1}^{3}(1-\cos p_n), \quad j=1,2, \quad l_j > 0,$$

имеем

$$E_k(p) = 3l_1 + 3l_2 + \sum_{n=1}^{3}\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_2\cos k_n + l_2^2}\cos(\varphi_n - p_n),$$

где

$$\cos\varphi_n = \frac{l_1 + l_2\cos k_n}{\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_2\cos k_n + l_2^2}}.$$

В этом случае

$$E_{\min}(k) = 3l_1+3l_2-\sum_{n=1}^{3}\sqrt{l_1^2+2l_1l_2\cos k_n+l_2^2}, \quad E_{\max}(k) = 3l_1+3l_2+\sum_{n=1}^{3}\sqrt{l_1^2+2l_1l_2\cos k_n+l_2^2}.$$

Пусть $C(\mathbb{T}^d)$ — банахово пространство непрерывных (периодических) функций на $\mathbb{T}^d$ и $G(\lambda), \lambda < E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$, — интегральный оператор с ядром (Бирмана–Швингера)

$$G(p,q;\lambda) = (2\pi)^{-d/2}v(p-q)(E_{\mathbf{0}}(p)-\lambda)^{-1}, \ p,q \in \mathbb{T}^d.$$

Для собственного значения оператора $G(\lambda)$ при $\lambda = E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})$ возможны следующие случаи (см. [18]).

Случай 1. Число -1 является простым собственным значением оператора $G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$, и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяют условию

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{E_{\mathbf{0}}(p)-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})} \notin L_2(\mathbb{T}^d),$$

т. е.

$$\dim\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) = 0, \quad \dim\operatorname{Ker}(G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I) = 1.$$

Случай 2. Число -1 является кратным собственным значением оператора $G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$ и одна из соответствующих собственных функций ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(\mathbf{0})}{E_{\mathbf{0}}(p)-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})} \notin L_2(\mathbb{T}^d),$$

т. е.

$$\dim\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) \geq 2, \quad \dim\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I) \geq \dim\operatorname{Ker}(G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I)+1.$$

Случай 3. Число -1 является кратным собственным значением оператора $G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))$, и

$$\dim\operatorname{Ker}(h(\mathbf{0})-E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0})I)+2 \leq \dim\operatorname{Ker}(G(E_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}))+I).$$

Определение. Пусть $d = 3, 4$. Если имеет место один из случаев $1-3$, то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в нуле (в левом крае существенного спектра).

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. а) *Пусть $d \geqslant 1$ и $\varepsilon(k) < E_{\min}(k)$ $\big(\varepsilon(k) > E_{\max}(k)\big)$. Тогда для любых v и v_1 из $L_2(\mathbb{T}^d)$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение в $(-\infty, \varepsilon(k)]$ $\Big([\varepsilon(k), \infty)\Big)$.*

б) *Пусть $d = 3, 4$, выполняется предположение, и $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ — условно отрицательно определенные функции, дифференцируемые до второго порядка.*
Тогда, если $h_{11}(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень (на левом крае существенного спектра), для любого вещественного $\varepsilon(k)$ и каждого $k \in \mathbb{T}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащего левее $E_{\min}(k)$, является непустым множеством.

Теорема 2. *Предположим, что $v(x) = \mu$.*

а) *Пусть $d \geqslant 1$ и $\varepsilon(k) \leq E_{\min}(k)$. Тогда для любого $\mu > 0$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение, лежащее левее $\varepsilon(k)$.*

б) *Пусть $d = 1, 2$, $v(\mathbf{0}) \neq 0$ и $\varepsilon(k) > E_{\min}(k)$. Тогда для любого $\mu > 0$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение, лежащее левее $\varepsilon(k)$. Более того, если $\varepsilon(k) > E_{\max}(k)$, то существуют два собственных значения оператора $h(k)$, лежащие левее $E_{\min}(k)$ и правее $E_{\max}(k)$.*

Заметим, что если $\varepsilon(k) < 0$ и $h_{11}(k) \geq 0$ для $z \in (\varepsilon(k), 0)$, то $-h_{01}^* h_{01}+(\varepsilon(k)-z))h_{11}(k) \leq 0$. Следовательно, согласно лемме 1 (см. ниже) $h(k)$ не имеет собственного значения в $(\varepsilon(k), 0)$.

2. Доказательство основных результатов

Нам понадобится

Теорема 3 ([18]). *Пусть $d = 3,4$, выполняется предположение, $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ — условно отрицательно определенные функции, дифференцируемые до второго порядка. Мы предположим, что $h_{11}(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень (внизу его существенный спектр). Тогда для каждого $k \in \mathbb{T}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ дискретный спектр оператора $h_{11}(k)$, лежащего левее $E_{\min}(k)$, является непустым множеством.*

Доказательство теоремы 1. а) Пусть $\varepsilon(k) < E_{\min}(k)$ и $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$(h(k)\varphi, \varphi) = \varepsilon(k) = \varepsilon(k)(\varphi, \varphi).$$

Поскольку $\varepsilon(k) < E_{\min}(k)$ и $E_{\min}(k) = \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(h(k))$, имеем $\sigma_{\mathrm{diss}}(h(k)) \cap (-\infty, E_{\min}(k)] \neq \varnothing$. Доказательство для случая $\varepsilon(k) > E_{\max}(k)$ аналогично.

б) Пусть $h_{11}(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень (на левом крае существенного спектра). Тогда по теореме 3 для каждого $k \in \mathbb{T}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ оператор $h_{11}(k)$ имеет собственное значение $\lambda_k < E_{\min}(k)$. Пусть $h_{11}(k)\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, $\varphi_k \in L_2(\mathbb{T}^d)$. Тогда вектор $\phi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Поскольку

$$h(k)\phi_k = \begin{pmatrix} h_{01}\varphi_k \\ \lambda_k \varphi_k \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (\varphi_k, \varphi_k) = (\phi_k, \phi_k),$$

скалярное произведение $\big(h(k)\phi, \phi\big)$ имеет вид

$$\big(h(k)\phi_k, \phi_k\big) = \lambda_k(\phi_k, \phi_k).$$

Отсюда и из $\lambda_k < E_{\min}(k) = \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(h(k))$ вытекает, что $\sigma_{\mathrm{diss}}(h(k)) \cap (-\infty, E_{\min}(k)) \neq \varnothing$. □

Для доказательства теоремы 2 понадобится

Лемма 1. *Число $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$ является собственным значением $h(k)$ тогда и только тогда, когда число $(\varepsilon(k) - z)z$ является собственным значением оператора $-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k) - z))h_{11}(k)$.*

Доказательство. Пусть число $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)]$, $\varepsilon(k) \neq z$, — собственное значение $h(k)$, т. е.

$$\begin{array}{l} h_{00}(k) f_0 + h_{01} f_1 = z f_0; \\ h_{01}^* f_0 + h_{11}(k) f_1 = z f_1, \end{array} \tag{2}$$

где $(f_0, f_1) \neq (0,0)$. Поскольку $\varepsilon(k) \neq z$, из первого уравнения (2) вытекает

$$f_0 = -\frac{1}{\varepsilon(k) - z} h_{01} f_1.$$

Тогда второе уравнение (2) имеет вид

$$-h_{01}^* (\varepsilon(k) - z)^{-1} h_{01} f_1 + h_{11}(k) f_1 = z f_1.$$

Умножив последнее уравнение на $\varepsilon(k) - z$, получим

$$-h_{01}^* h_{01} f_1 + (\varepsilon(k) - z) h_{11}(k) f_1 = (\varepsilon(k) - z) z f_1,$$

т. е. число $(\varepsilon(k) - z)z$ является собственным значением $-h_{01}^* h_{01} + h_{11}(k)$. Обратно, пусть $(\varepsilon(k) - z)z$ — собственное значение $-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k) - z) h_{11}(k)$, т. е.

$$(-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k) - z) h_{11}(k))\varphi = (\varepsilon(k) - z) z \varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

Отсюда следует

$$-\frac{h_{01}^* h_{01}}{\varepsilon(k)-z}\varphi + h_{11}(k)\varphi = z\varphi. \tag{3}$$

Обозначим $f_0 = -\dfrac{h_{01}}{\varepsilon(k)-z}\varphi \in \mathbb{C}$. Тогда (3) имеет вид

$$h_{01}^* f_0 + h_{11}(k)\varphi = z\varphi.$$

Очевидно, $\phi = (f_0, \varphi) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ и $h(k)\phi = z\phi$, т. е. вектор ϕ является собственным вектором $h(k)$, соответствующим собственному значению z. □

Для любого $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$ определим функцию

$$\Delta(z) = \left(1 - \mu \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{ds}{[E_k(s)-z]}\right)\left[1 - \frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{E_k(s)-z}\right] - \frac{\mu}{\varepsilon(k)-z}\left[\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v(s)ds}{E_k(s)-z}\right]^2.$$

Лемма 2. *Число $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$ является собственным значением $h(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(z) = 0$.*

Доказательство. Пусть число $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$ является собственным значением оператора $h(k)$. Тогда по лемме 1 число $(\varepsilon(k)-z)z$ является собственным значением оператора $-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k)-z))h_{11}(k)$, т. е.

$$(-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k)-z)h_{11}(k))\varphi = (\varepsilon(k)-z)z\varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

Получим

$$(\varepsilon(k)-z)[h_{11}(k) - zI]\varphi = h_{01}^* h_{01}\varphi,$$

т. е.

$$(\varepsilon(k)-z)\big(E_k(p)-z\big)\varphi(p) = (\varepsilon(k)-z)\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(s)ds + v_1(p)\int\limits_{\mathbb{T}^d} v_1(s)\varphi(s)ds.$$

Отсюда

$$\varphi(p) = \frac{1}{(\varepsilon(k)-z)[E_k(p)-z]}\left((\varepsilon(k)-z)\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(s)ds + v_1(p)\int\limits_{\mathbb{T}^d} v_1(s)\varphi(s)ds\right).$$

Пусть

$$\begin{aligned} c &= \int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(s)ds, \\ d &= \int\limits_{\mathbb{T}^d} v(s)\varphi(s)ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда

$$\varphi(p) = \frac{1}{(\varepsilon(k)-z)(E_k(p)-z)}\big((\varepsilon(k)-z)\mu c + v(p)d\big). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), относительно c и d получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &c\left(1 - \mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{[E_k(s)-z]}\right) - d\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{(\varepsilon(k)-z)[E_k(s)-z]} = 0, \\ &-\mu c\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{[E_k(s)-z]} + d\left(1 - \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(s)ds}{(\varepsilon(k)-z)[E_k(s)-z]}\right) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Ясно, что система уравнений (6) имеет ненулевое решение (c, d) тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 1-\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{[E_k(s)-z]} & -\frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{[E_k(s)-z]} \\ -\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{[E_k(s)-z]} & 1-\frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(s)ds}{[E_k(s)-z]} \end{vmatrix} = 0.$$

Легко проверить, что

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1-\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{[E_k(s)-z]} & -\frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{[E_k(s)-z]} \\ -\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{[E_k(s)-z]} & 1-\frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(s)ds}{[E_k(s)-z]} \end{vmatrix}.$$

Обратно, пусть $\Delta(z) = 0$ для $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$. Тогда система уравнений (6) имеет ненулевое решение (c, d). Положим

$$\varphi(p) = \frac{1}{(\varepsilon(k)-z)(E_k(p)-z)}\big((\varepsilon(k)-z)\mu c + v(p)d\big).$$

Тогда $\varphi \in L_2(\mathbb{T}^d)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что число $(\varepsilon(k)-z)z$ является собственным значением оператора $-h_{01}^* h_{01} + (\varepsilon(k)-z))h_{11}(k)$. Значит, по лемме 1 число $z \notin [E_{\min}(k), E_{\max}(k)] \cup \{\varepsilon(k)\}$ является собственным значением $h(k)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. a) Покажем, что существует $z_0 \in (-\infty, \varepsilon(k))$ с $\Delta(z_0) = 0$. Поскольку $\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(s)ds}{E_k(s)-z} > 0$, получим

$$\lim_{z\to\varepsilon(k)-0}\Phi(z) = -\infty,$$

где

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\varepsilon(k)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(s)ds}{E_k(s)-z}.$$

Отметим, что

$$\lim_{z\to-\infty}\Phi(z) = 1.$$

Поэтому из непрерывности $\Phi(\cdot)$ на $(-\infty, \varepsilon(k))$ следует $\Phi(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (-\infty, \varepsilon(k))$. Следовательно,

$$\Delta(\xi) = \Bigg(1-\mu\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{[E_k(s)-\xi]}\Bigg)\Phi(\xi) - \frac{\mu}{\varepsilon(k)-\xi}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{E_k(s)-\xi}\Bigg]^2 = -\frac{\mu}{\varepsilon(k)-\xi}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)ds}{E_k(s)-\xi}\Bigg]^2 \le 0.$$

Отсюда и согласно равенству

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta(z) = 1$$

существует $z_0 \in (-\infty, \xi]$ такое, что $\Delta(z_0) = 0$. Таким образом, в силу леммы 2 получим доказательство теоремы 2.

б) Пусть $\varepsilon(k) > E_{\min}(k)$. Тогда $\varepsilon(k) - z > 0$ для $z < E_{\min}(k)$. Поскольку $d = 1, 2$ и $v(\mathbf{0}) \neq 0$, согласно (1) имеем

$$\lim_{z\to E_{\min}(k)-0}\Phi(z) = -\infty.$$

Далее, анализируя как выше, доказывается, что оператор $h(k)$ имеет собственное значение, лежащее слева $E_{\min}(k)$. При $\varepsilon(k) > E_{\max}(k)$ существование собственного значения $h(k)$, лежащего справа от $E_{\max}(k)$, следует из п. а) теоремы 1.

Литература

[1] Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications* (Imperial College Press, 2008).

[2] Mogilner A.I. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*, Advances in Societ Math. **5**, 139–194 (1991).

[3] Friedrichs K.O. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, Lectures in Applied Mathematics (Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1960) V. III, edited by M. Kac (AMS, Providence, R.I., 1965).

[4] Malishev V.A. and Minlos R.A. *Linear Infinite-Particle Operators* (Translations of Mathematical Monographs, **143**) (AMS, Providence, RI, 1995).

[5] Minlos R.A. and Spohn H. *The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons*, 159–193 (AMS, Providence, RI, 1996).

[6] Hübner M. and Spohn H. *Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **62** (3), 289–323 (1995).

[7] Spohn H. *Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian*, Comm. Math. Phys. **123** (2), 277–304 (1989).

[8] Жуков Ю.В., Минлос Р.А. *Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами*, ТМФ **103** (1), 63–81 (1995).

[9] Muminov M., Neidhardt H., and Rasulov T. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case*, J. Math. Phys. **56**, 053507 (2015); doi: 10.1063/1.4921169

[10] Muminov M.I., Rasulov T.H. *On the eigenvalues of a* 2×2 *block operator matrix*, Opuscula Math. **35** (3), 371–395 (2015).

[11] Muminov M.I., Rasulov T.H. *Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a* 2×2 *operator matrix*, Eurasian Math. J. **5** (2), 60–77 (2014).

[12] Muminov M.I., Rasulov T.H. *Universality of the discrete spectrum asymptotics of the three-particle Schrödinger operator on a lattice* Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, **6** (2), 280–293 (2015).

[13] Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. *Analysis of the discrete spectrum of the family spectrum of* 3×3 *operator matrices*, Comm. Math. Anal. **23** (1), 17–37 (2020).

[14] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Eigenvalues and virtual levels of a family of* 2×2 *operator matrices*, Methods Funct. Anal. Topology **25** (3), 273–281 (2019).

[15] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Analysis of the spectrum of a* 2×2 *operator matrix*, Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics **11** (2), 138–144 (2020).

[16] Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. *Бесконечность числа собственных значений операторных* 2×2-*матриц. Асимптотика дискретного спектра*, ТМФ **205** (3), 368–390 (2020).

[17] Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* IV: *Analysis of Operators* (Acad. Press, New York, 1978).

[18] Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. *The Threshold Effects for the Two-Particle Hamiltonians on Lattices*, Comm. Math. Phys. **262**, 91–115 (2006).

Мухиддин Эшкобилович Муминов

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: mmuminov@mail.ru

Усмон Рамазанович Шадиев

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: usmon555@mail.ru

M.I. Muminov and U.R. Shadiev

On the existence of an eigenvalue of the generalized Friedrichs model

Abstract. We consider a family of bounded self-adjoint matrix operators (generalized Friedrichs models) acting on the direct sum of one-particle and two-particle subspaces of the Fock space. Conditions for the existence of eigenvalues of the matrix operators are obtained.

Keywords: Friedrichs model, subspace of the Fock space, eigenvalue, essential spectrum.

Mukhiddin Ishkobilovich Muminov

Samarkand State University,
15 University blvd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: mmuminov@mail.ru

Usmon Ramazanovich Shadiev

Samarkand State University,
15 University blvd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: usmon555@mail.ru