

В.Е. КРУТЛОВ

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТЕПЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Используя формулу общего решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами, показано, что во множестве решений этого уравнения содержатся классические решения типа $k^m \lambda^k$. Найдены необходимые и достаточные условия, налагаемые на коэффициенты уравнения и начальные параметры, при которых получаются такие решения.

Ключевые слова: разностное уравнение, условия на коэффициенты уравнения.

УДК: 517.962

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-20-30

Введение. В работе [1] в явном виде построена фундаментальная система решений следующего разностного (рекуррентного) уравнения:

$$l_{n+k} = a_{1k}l_{n+k-1} + a_{2k}l_{n+k-2} + \dots + a_{nk}l_k, \quad k = 0, 1, \dots; \quad a_{nk} \neq 0.$$

На базе этой работы в ([2], с. 42) получена формула общего решения разностного (рекуррентного) уравнения

$$l_{n+k} = a_1 l_{n+k-1} + a_2 l_{n+k-2} + \dots + a_n l_k, \quad k = 0, 1, \dots; \quad a_n \neq 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные вещественные числа. Именно

$$l_{n+k} = \sum_{i=1}^n (a_i Q_k + a_{i+1} Q_{k-1} + \dots + a_n Q_{k-n+i}) l_{n-i}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где

$$Q_k = \sum_{x_1+2x_2+\dots+nx_n=k} \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)!}{x_1!x_2!\dots x_n!} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}. \quad (3)$$

При этом для вычисления сумм Q_k справедливы рекуррентные формулы

$$Q_k = a_1 Q_{k-1} + a_2 Q_{k-2} + \dots + a_n Q_{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots; \quad (4)$$

$$Q_k = a_1 Q_{k-1} + a_2 Q_{k-2} + \dots + a_{k-1} Q_1 + a_k Q_0, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

$$Q_0 = 1, Q_1 = a_1, Q_k = 0 \quad \text{при } k < 0.$$

Также из (1) следует начальное равенство

$$l_n = a_1 l_{n-1} + a_2 l_{n-2} + \dots + a_n l_0,$$

и поэтому l_0, l_1, l_{n-1} — это произвольные начальные параметры.

Из формул (2)–(3) имеем, что множество решений уравнения (1) зависит только от набора чисел a_1, a_2, a_n и выбора значений начальных параметров, и никак не связано с решениями так называемого характеристического уравнения

$$D(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \dots - a_{n-1}\lambda - a_n = 0. \quad (6)$$

Исключение составляет только тот случай, когда при специальном задании коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ и специальных значениях начальных параметров $l_0, \dots, l_{n-1}$ из множества решений уравнения (1) по формулам (2)–(3) выделяются классические решения [3] вида $k^m\lambda^k$.

В данной работе найдены те условия, при которых среди множества решений уравнения (1) имеются решения вида $k^m\lambda^k$.

В работе [4] сделана попытка получить общее решение уравнения (1). Однако авторы предполагают известными простые корни характеристического уравнения и с помощью их строят общее решение. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, что полностью исключить в принципе невозможно, авторы формулу решения не записали и, естественно, должны были бы в этом случае получить классические решения вида $k^m\lambda^k$. Авторы работы [4], по-видимому, не знакомы с результатами работы [2].

1. Среди произвольных ненулевых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ нет равных. Пусть λ_0 — фиксированное число, $\lambda_0 \neq 0$. Зададим начальные параметры следующим образом:

$$l_{n-i} = \lambda_0^{n-i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Тогда

$$l_n = a_1\lambda_0^{n-1} + a_2\lambda_0^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda_0 + a_n.$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ выберем так, чтобы $l_n = \lambda_0^n$ (ниже будет показано, что это возможно).

Таким образом, по заданному числу λ_0 заданными начальными параметрами (7) и выбранными коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$ получено равенство

$$\lambda_0^n = a_1\lambda_0^{n-1} + a_2\lambda_0^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda_0 + a_n \quad (8)$$

(т. е. число λ_0 — простой корень характеристического уравнения (6)).

Покажем, что формулы (2)–(5) приводят к известной формуле

$$l_{n+k} = \lambda_0^{n+k}.$$

Итак,

$$l_{n+k} = \sum_{i=1}^n (a_i Q_k + a_{i+1} Q_{k-1} + \dots + a_n Q_{k-n+i}) \lambda_0^{n-i}. \quad (9)$$

Рассмотрим подробно случаи а) $k = \overline{1, n-1}$ и б) $k = n, n+1, \dots$.

а) Учитывая (5), представим (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \sum_{i=1}^{n-k} (a_i Q_k + a_{i+1} Q_{k-1} + \dots + a_{i+k} Q_0) \lambda_0^{n-i} + \\ &+ \sum_{i=1}^k (a_{n-k+i} Q_k + a_{n-k+i+1} Q_{k-1} + \dots + a_n Q_i) \lambda_0^{k-i}. \end{aligned}$$

В дальнейшем используются равенства (8) и (5).

Шаг 1. Соберем слагаемые при Q_k

$$Q_k (a_1 \lambda_0^{n-1} + a_2 \lambda_0^{n-2} + \dots + a_{n-k} \lambda_0^k + a_{n-k+1} \lambda_0^{k-1} + \dots + a_n) = \lambda_0^n Q_k.$$

Учтем, что $Q_k = a_1 Q_{k-1} + a_2 Q_{k-2} + \dots + a_k Q_0$.

Шаг 2. Соберем слагаемые при Q_{k-1}

$$Q_{k-1}(a_1\lambda_0^n + a_2\lambda_0^{n-1} + \dots + a_{n-k+1}\lambda_0^k + a_{n-k+2}\lambda_0^{k-1} + \dots + a_n\lambda_0) = \lambda_0^{k+1}Q_{k-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^{n+1}Q_{k-1} + \lambda_0^n(a_2Q_{k-2} + \dots + a_kQ_0) + \sum_{i=1}^{n-k}(a_{i+2}Q_{k-2} + \dots + a_{i+k}Q_0)\lambda_0^{n-i} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-2}(a_{n-k+i+2}Q_{k-2} + \dots + a_nQ_i)\lambda_0^{k-i}, \\ Q_{k-1} &= a_1Q_{k-2} + a_2Q_{k-3} + \dots + a_{k-1}Q_0. \end{aligned}$$

Шаг 3. Соберем слагаемые при Q_{k-2} , и т. д. Продолжив этот процесс, получим Шаг (s+1).

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^{n+s}Q_{k-s} + \lambda_0^{n+s-1}(a_2Q_{k-s-1} + \dots + a_{k-s+1}Q_0) + \\ &\quad + \lambda_0^{n+s-2}(a_3Q_{k-s-1} + \dots + a_{k-s+2}Q_0) + \dots + \lambda_0^n(a_{s+1}Q_{k-s-1} + \dots + a_kQ_0) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-k}(a_{s+i+1}Q_{k-s-1} + \dots + a_{i+k}Q_0)\lambda_0^{n-i} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-s-1}(a_{n-k+i+1}Q_{k-s-1} + \dots + a_nQ_i)\lambda_0^{k-i}, \quad s = 0, 1, \dots, k-2. \end{aligned}$$

Отсюда при $s = k-2$ следует

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^{n+k-2}Q_2 + \lambda_0^{n+k-3}(a_2Q_1 + a_3Q_0) + \lambda_0^{n+k-4}(a_3Q_1 + a_4Q_0) + \dots + \lambda_0^n(a_{k-1}Q_1 + a_kQ_0) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-k}(a_{k+i-1}Q_1 + a_{k+i}Q_0)\lambda_0^{n-i} + \sum_{i=1}^1(a_{n+i-1}Q_1 + a_nQ_i)\lambda_0^{k-i} = \\ &= \lambda_0^{n+k-2}Q_2 + \sum_{i=1}^{n-2}(a_{i+1}Q_1 + a_{i+2}Q_0)\lambda_0^{n+k-i-2} + a_n\lambda_0^{k-1}Q_1. \end{aligned}$$

Так как $Q_2 = a_1Q_1 + a_2Q_0$, то сумма слагаемых при Q_1 равна

$$Q_1(\lambda_0^{n+k-2}a_1 + \lambda_0^{n+k-3}a_2 + \dots + \lambda_0^ka_n) = \lambda_0^{n+k-1}Q_1,$$

поскольку $Q_1 = a_1Q_0$, $Q_0 = 1$, получим

$$l_{n+k} = Q_0(a_1\lambda_0^{n+k-1} + a_2\lambda_0^{n+k-2} + \dots + a_n\lambda_0^k) = \lambda_0^{n+k}Q_0 = \lambda_0^{n+k}.$$

б) Пусть $k \geq n$, и k фиксировано. Формула (9) имеет структуру

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= (a_1Q_k + a_2Q_{k-1} + \dots + a_nQ_{k-n+1})\lambda_0^{n-1} + (a_2Q_k + a_3Q_{k-1} + \dots + a_nQ_{k-n+2})\lambda_0^{n-2} + \dots + \\ &\quad + (a_iQ_k + a_{i+1}Q_{k-1} + \dots + a_nQ_{k-n+i})\lambda_0^{n-i} + \dots + (a_{n-2}Q_k + a_{n-1}Q_{k-1} + \dots + a_nQ_{k-2})\lambda_0^2 + \\ &\quad + (a_{n-1}Q_k + a_nQ_{k-1})\lambda_0 + a_nQ_k. \end{aligned}$$

Используем тот же алгоритм, что и в предыдущем случае а). Собираем слагаемые при Q_k и используем равенство (8)

$$Q_k(a_1\lambda_0^{n-1} + a_2\lambda_0^{n-2} + \dots + a_n) = \lambda_0^nQ_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^n Q_k + \lambda_0^{n-1} (a_2 Q_{k-1} + \dots + a_n Q_{k-n+1}) + \dots + \\ &+ \lambda_0^{n-i} (a_{i+1} Q_{k-1} + \dots + a_n Q_{k-n+i}) + \dots + \lambda_0^2 (a_{n-1} Q_{k-1} + a_n Q_{k-2}) + \lambda_0 a_n Q_{k-1}, \\ Q_k &= a_1 Q_{k-1} + \dots + a_n Q_{k-n}. \end{aligned}$$

Собирая слагаемые при Q_{k-1} , получим

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^{n+1} Q_{k-1} + \lambda_0^n (a_2 Q_{k-2} + \dots + a_n Q_{k-n}) + \dots + \\ &+ \lambda_0^{n-i} (a_{i+2} Q_{k-2} + \dots + a_n Q_{k-n+i}) + \dots + \lambda_0^2 a_n Q_{k-2}, \\ Q_{k-1} &= a_1 Q_{k-2} + a_2 Q_{k-3} + \dots + a_n Q_{k-n-1}, \end{aligned}$$

и т. д. Продолжив этот процесс, на s -м шаге алгоритма, $s = \overline{0, k}$, получим

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= \lambda_0^{n+s-1} Q_{k-s+1} + \lambda_0^{n+s-2} (a_2 Q_{k-s} + \dots + a_n Q_{k-s-n+2}) + \dots + \\ &+ \lambda_0^{n-i} (a_{s+i} Q_{k-s} + \dots + a_n Q_{k-n+i}) + \dots + a_n \lambda_0^s Q_{k-s}. \end{aligned}$$

Тогда при $s = k$

$$l_{n+k} = \lambda_0^{n+k-1} Q_1 + \lambda_0^{n+k-2} a_2 Q_0 + \dots + \lambda_0^{n-i} a_{k+i} Q_0 + \dots + a_n \lambda_0^k Q_0 = \lambda_0^{n+k} Q_0 = \lambda_0^{n+k}.$$

Объединяя полученную формулу $l_{n+k} = \lambda_0^{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$, с заданными значениями начальных параметров $l_i = \lambda_0^i$, $i = \overline{0, n-1}$, получаем

$$l_m = \lambda_0^m, \quad m = 0, 1, \dots$$

Теорема 1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольный набор чисел, среди которых нет равных и нет нуля. Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида λ_j^k , $j = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ этого уравнения были элементарными симметрическими многочленами переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и каждому числу λ_j отвечал набор $l_i = \lambda_j^i$, $i = \overline{0, n-1}$, значений начальных параметров.

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых нет равных и нет нулей. Для каждого числа λ_j проделаем ту же процедуру, что и для числа λ_0 . В результате получим n равенств

$$\lambda_j^n = a_1 \lambda_j^{n-1} + a_2 \lambda_j^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda_j + a_n, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Эти равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Определитель этой системы отличен от нуля, а значит, коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся однозначно и являются элементарными симметрическими многочленами n переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \\ a_2 &= -(\lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n), \\ &\dots \\ a_n &= (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (10), числа λ_j являются простыми нулями характеристического уравнения (6)

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n = 0, \quad (12)$$

что приводит также к формулам (11).

Обратно, пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — элементарные симметрические многочлены (11). Тогда характеристический многочлен $D(\lambda)$ имеет простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, и из (12) следуют

равенства (10), которые приводят к решениям уравнения (1) вида λ_j^k , $k = 0, 1, \dots; j = \overline{1, n}$. $\square$

Замечание. Условия для значений $l_i = \lambda_i^j$, $i = \overline{0, n-1}$, начальных параметров существенны, так как если они нарушены, то формулы (2)–(3) приведут к решению уравнения (1), но оно не будет вида λ^k , $k = n, n+1, \dots$.

2. Вспомогательные сведения. Пусть в равенствах (11) или в наборе $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ число λ_1 встречается $p+1$ раз, $p = \overline{0, n-1}$. Тогда из (12)

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p+1} F(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_n,$$

где $F(\lambda_1) \neq 0$, а коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ содержат, каждый, $p+1$ раз число λ_1 . Следовательно,

$$D(\lambda_1) = D'(\lambda_1) = \dots = D^{(p)}(\lambda_1) = 0. \quad (13)$$

Из этих равенств получим

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_1^n - a_1 \lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda_1, \\ a_{n-1} &= C_n^1 \lambda_1^{n-1} - a_1 C_{n-1}^1 \lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-3} C_3^1 \lambda_1^2 - C_2^1 a_{n-2} \lambda_1, \\ &\quad \dots \\ a_{n-p} &= C_n^p \lambda_1^{n-p} - a_1 C_{n-1}^p \lambda_1^{n-p-1} - \dots - a_{n-p-1} C_{p+1}^p \lambda_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Для каждого фиксированного $p = \overline{1, n-1}$ выберем следующий набор значений начальных параметров:

$$l_0 = 0, l_1 = \lambda_1, l_2 = 2^p \lambda_1^2, \dots, l_{n-2} = (n-2)^p \lambda_1^{n-2}, l_{n-1} = (n-1)^p \lambda_1^{n-1}. \quad (15)$$

(Случай $p = 0$ подробно изучен в п. 1.)

Такой выбор значений начальных параметров обусловлен тем, что согласно [3] решениями уравнения (1) будут функции $k\lambda_1^k, k^2\lambda_1^k, \dots, k^p\lambda_1^k$, $k = 0, 1, \dots$.

В формуле (2) последняя сумма при $i = n$ состоит только из одного слагаемого $a_n Q_n l_0$, и при $l_0 = 0$ она исчезает.

Найдем теперь, как изменится равенство

$$l_n = a_1 l_{n-1} + a_2 l_{n-2} + \dots + a_{n-1} l_1$$

с учетом того, что l_i , $i = \overline{0, n-1}$, должны принять значения из (15).

Запишем очевидные равенства, учитывая условия (13):

$$(\lambda D') \Big|_{\lambda=\lambda_1} = n\lambda_1^n - a_1(n-1)\lambda_1^{n-1} - a_2(n-2)\lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-1}\lambda_1 = 0.$$

Обозначим $\lambda D' = D_1$, тогда

$$(\lambda D_1)' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = n^2 \lambda_1^n - a_1(n-1)^2 \lambda_1^{n-1} - a_2(n-2)^2 \lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda_1 = 0.$$

Обозначим $\lambda D_1' = D_2$, тогда

$$(\lambda D_2)' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = n^3 \lambda_1^n - a_1(n-1)^3 \lambda_1^{n-1} - a_2(n-2)^3 \lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda_1 = 0,$$

и т. д. Обозначим $\lambda D_{m-2}' = D_{m-1}$, тогда

$$(\lambda D_{m-1})' \Big|_{\lambda=\lambda_1} = n^m \lambda_1^n - a_1(n-1)^m \lambda_1^{n-1} - a_2(n-2)^m \lambda_1^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda_1 = 0.$$

Полагая $m = p$, получаем

$$n^p \lambda_1^n = a_1(n-1)^p \lambda_1^{n-1} + a_2(n-2)^p \lambda_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda_1, \quad p = \overline{1, n-1}. \quad (16)$$

Далее, потребуется

Лемма. Пусть заданы многочлены целочисленного аргумента n одной и той же степени

$$G_s(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{s-1} n^{s-1} + n^s,$$

$$R_s(n) = \beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_{s-1} n^{s-1} + n^s,$$

и пусть существуют s различных значений аргумента $n : n_1, n_2, \dots, n_s$, для которых

$$G_s(n_i) = R_s(n_i), \quad i = \overline{1, s}.$$

Тогда

$$G_s(n) \equiv R_s(n).$$

Доказательство.

$$G_s(n_i) = \alpha_0 + \alpha_1 n_i + \dots + \alpha_{s-1} n_i^{s-1} + n_i^s,$$

$$R_s(n_i) = \beta_0 + \beta_1 n_i + \dots + \beta_{s-1} n_i^{s-1} + n_i^s.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1) n_i + \dots + (\alpha_{s-1} - \beta_{s-1}) n_i^{s-1} = 0, \quad i = \overline{1, s},$$

— система s линейных однородных уравнений относительно s неизвестных: $\alpha_0 - \beta_0, \dots, \alpha_{s-1} - \beta_{s-1}$. Так как определитель этой системы отличен от нуля, то $\alpha_i - \beta_i = 0, i = \overline{0, s-1}$, т. е.

$$G_s(n) = R_s(n).$$

□

3. Число λ_1 имеет кратность $p+1$. Покажем, что решение уравнения (1) при значениях начальных параметров (15) определяется формулой

$$l_{n+k} = (a_1 Q_k + a_2 Q_{k-1} + \dots)(n-1)^p \lambda_1^{n-1} + (a_2 Q_k + a_3 Q_{k-1} + \dots)(n-2)^p \lambda_1^{n-2} + \dots + (a_{n-2} Q_k + a_{n-1} Q_{k-1} + a_n Q_{k-2}) 2^p \lambda_1^2 + (a_{n-1} Q_k + a_n Q_{k-1}) \lambda_1 = (n+k)^p \lambda_1^{n+k}.$$

Алгоритм построения этого решения такой же, как в п. 1.

Шаг 1. Собираем слагаемые при Q_k и учитываем (16)

$$Q_k (a_1 (n-1)^p \lambda_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_1) = n^p \lambda_1^n Q_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= n^p \lambda_1^n Q_k + (n-1)^p \lambda_1^{n-1} (a_2 Q_{k-1} + a_3 Q_{k-2} + \dots) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} Q_{k-1} + a_n Q_{k-2}) 2^p \lambda_1^2 + a_n Q_{k-1} \lambda_1, \\ Q_k &= a_1 Q_{k-1} + a_2 Q_{k-2} + \dots \end{aligned}$$

Шаг 2. Собираем слагаемые при Q_{k-1} . Воспользовавшись формулами (14), в полученной сумме удаляем последовательно коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-p}$

$$\begin{aligned} Q_{k-1} [n^p \lambda_1^n a_1 + a_2 (n-1)^p \lambda_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} 2^p \lambda_1^2 + \lambda_1 (\lambda_1^n - a_1 \lambda_1^{n-1} - \dots - a_{n-1} \lambda_1)] = \\ = Q_{k-1} \left(\lambda_1^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-3} a_{i+1} \lambda_1^{n-i} \gamma_{2,n-i-1}^{(1)} + a_{n-1} \lambda_1^2 \gamma_{21}^{(1)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{2i}^{(1)} = (i+1)^p - 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \gamma_{21}^{(1)} = 2^p - 1.$$

Теперь, удаляя a_{n-1} , имеем

$$\begin{aligned} Q_{k-1} \left[\lambda_1^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-3} a_{i+1} \lambda_1^{n-i} \gamma_{2,n-i-1}^{(1)} + \lambda_1^2 \gamma_{21}^{(1)} \left(C_n^1 \lambda_1^{n-1} - C_{n-1}^1 a_1 \lambda_1^{n-2} - \dots - C_2^1 a_{n-2} \lambda_1 \right) \right] = \\ = Q_{k-1} \left[\lambda_1^{n+1} \left(1 + C_n^1 \gamma_{21}^{(1)} \right) + \sum_{i=0}^{n-3} a_{i+1} \lambda_1^{n-i} \gamma_{3,n-i-2}^{(1)} \right], \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{3i}^{(1)} = \gamma_{2i+1}^{(1)} - C_{i+1}^1 \gamma_{21}^{(1)}, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \gamma_{31}^{(1)} = 3^p - 1 - 2(2^p - 1).$$

Устраняем a_{n-2} . Тогда

$$Q_{k-1} \left[\lambda_1^{n+1} \left(1 + C_n^1 \gamma_{21}^{(1)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(1)} \right) + \sum_{i=0}^{n-4} a_{i+1} \lambda_1^{n-i} \gamma_{4,n-i-3}^{(1)} \right],$$

где

$$\gamma_{4i}^{(1)} = \gamma_{3i+1}^{(1)} - C_{i+2}^2 \gamma_{31}^{(1)}, \quad i = \overline{1, n-3}; \quad \gamma_{41}^{(1)} = 4^p - 1 - C_3^1 \gamma_{21}^{(1)} - C_3^2 \gamma_{31}^{(1)}.$$

Завершает шаг 2 алгоритма удаление коэффициента a_{n-p} . В результате получим

$$Q_{k-1} \left[\left(1 + C_n^1 \gamma_{21}^{(1)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(1)} + \dots + C_n^p \gamma_{p+1,1}^{(1)} \right) \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-p-2} a_{i+1} \lambda_1^{n-i} \gamma_{p+2,n-i-p-1}^{(1)} \right].$$

В процессе получения этой формулы возникли и были использованы следующие рекуррентные соотношения:

$$\gamma_{s+1,i}^{(1)} = \gamma_{s,i+1}^{(1)} - C_{s+i-1}^{s-1} \gamma_{s1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, n-s}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{s1}^{(1)} &= \gamma_{2,s-1}^{(1)} - C_{s-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} - C_{s-1}^2 \gamma_{31}^{(1)} - \dots - C_{s-1}^{s-2} \gamma_{s-1,1}^{(1)} = \\ &= s^p - 1 - C_{s-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} - \dots - C_{s-1}^{s-2} \gamma_{s-1,1}^{(1)}, \quad s = \overline{2, p+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определим теперь значения полинома степени p

$$R_p^{(1)}(n) = 1 + C_n^1 \gamma_{21}^{(1)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(1)} + \dots + C_n^{p-1} \gamma_{p,1}^{(1)} + C_n^p \gamma_{p+1,1}^{(1)}$$

при $n = 0, 1, \dots, p-1$. Воспользуемся формулой (18)

$$\begin{aligned} R_p^{(1)}(0) &= 1, R_p^{(1)}(1) = 1 + C_1^1 \gamma_{21}^{(1)} = 2^p, \\ R_p^{(1)}(2) &= 1 + C_2^1 \gamma_{21}^{(1)} + C_2^2 \gamma_{31}^{(1)} = 1 + C_2^1 \gamma_{21}^{(1)} + 3^p - 1 - C_2^1 \gamma_{21}^{(1)} = 3^p, \\ R_p^{(1)}(p-1) &= 1 + C_{p-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} + C_{p-1}^2 \gamma_{31}^{(1)} + \dots + C_{p-1}^{p-1} \gamma_{p,1}^{(1)} = 1 + C_{p-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} + \dots + C_{p-1}^{p-2} \gamma_{p-1,1}^{(1)} + \\ &+ p^p - 1 - C_{p-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} - \dots - C_{p-1}^{p-2} \gamma_{p-1,1}^{(1)} = p^p. \end{aligned}$$

Но те же значения при $n = 0, 1, \dots, p-1$ принимает многочлен $G_p^{(1)} = (n+1)^p$. Согласно лемме

$$R_p^{(1)}(n) = (n+1)^p.$$

Воспользуемся формулой (17) для определения значения $\gamma_{p+2,n-p-i-1}^{(1)}$ в оставшейся сумме при Q_{k-1}

$$\begin{aligned} \gamma_{p+2,n-p-i-1}^{(1)} &= \gamma_{2,n-i-1}^{(1)} - C_{n-i-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} - C_{n-i-1}^2 \gamma_{31}^{(1)} - \dots - C_{n-i-1}^p \gamma_{p+1,1}^{(1)} = \\ &= (n-i)^p - \left(1 + C_{n-i-1}^1 \gamma_{21}^{(1)} + \dots + C_{n-i-1}^p \gamma_{p+1,1}^{(1)} \right) = (n-i)^p - R_p^{(1)}(n-i-1) = 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= (n+1)^p Q_{k-1} \lambda_1^{n+1} + n^p \lambda_1^n (a_2 Q_{k-2} + a_3 Q_{k-3} + \dots) + \\ &+ (n-1)^p \lambda_1^{n-1} (a_3 Q_{k-2} + a_4 Q_{k-3} + \dots) + \dots + 3^p \lambda_1^3 (a_{n-1} Q_{k-2} + a_n Q_{k-3}) + 2^p \lambda_1^2 Q_{k-2}, \\ Q_{k-1} &= a_1 Q_{k-2} + a_2 Q_{k-3} + \dots \end{aligned}$$

Шаг 3. Собираем слагаемые при Q_{k-2} и исключаем в полученной сумме при Q_{k-2} последовательно коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-p}$

$$\begin{aligned} Q_{k-2} [a_1(n+1)^p \lambda_1^{n+1} + a_2 n^p \lambda_1^n + \dots + a_n 3^p \lambda_1^3 + 2^p \lambda_1^2 (\lambda_1^n - a_1 \lambda_1^{n-1} - \dots - a_{n-1} \lambda_1)] = \\ = Q_{k-2} \left(2^p \lambda_1^{n+2} + \sum_{i=0}^{n-3} a_{i+1} \lambda_1^{n-i+1} \gamma_{2,n-i-1}^{(2)} + a_{n-1} \lambda_1^3 \gamma_{21}^{(2)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{2i}^{(2)} = (i+2)^p - 2^p, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \gamma_{21}^{(2)} = 3^p - 2^p.$$

Исключаем a_{n-1} . Тогда

$$Q_{k-2} \left[\lambda_1^{n+2} (2^p + C_n^1 \gamma_{21}^{(2)}) + \sum_{i=0}^{n-4} a_{i+1} \lambda_1^{n-i+1} \gamma_{3,n-i-2}^{(2)} + a_{n-2} \lambda_1^4 \gamma_{31}^{(2)} \right],$$

где

$$\gamma_{3i}^{(2)} = \gamma_{2,i+1}^{(2)} - C_{i+1}^1 \gamma_{21}^{(2)}, \quad i = \overline{1, n-2}; \quad \gamma_{31}^{(2)} = \gamma_{22}^{(2)} - C_2^1 \gamma_{21}^{(2)} = 4^p - 2^p - C_2^1 (3^p - 2^p).$$

Устраняя коэффициент a_{n-2} , получим

$$Q_{k-2} \left[\lambda_1^{n+2} \left(2^p + C_n^1 \gamma_{21}^{(2)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(2)} \right) + \sum_{i=0}^{n-5} a_{i+1} \lambda_1^{n-i+1} \gamma_{4,n-i-3}^{(2)} + a_{n-3} \lambda_1^5 \gamma_{41}^{(2)} \right],$$

где

$$\gamma_{4i}^{(2)} = \gamma_{3,i+1}^{(2)} - C_{i+1}^2 \gamma_{31}^{(2)}, \quad i = \overline{1, n-3}; \quad \gamma_{41}^{(2)} = 5^p - 2^p - C_3^1 \gamma_{21}^{(2)} - C_3^2 \gamma_{31}^{(2)}.$$

Заканчивая шаг 3 алгоритма устранением коэффициента a_{n-p} , получаем

$$Q_{k-2} \left[\left(2^p + C_n^1 \gamma_{21}^{(2)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(2)} + \dots + C_n^p \gamma_{p+1,1}^{(2)} \right) \lambda_1^{n+2} + \sum_{i=0}^{n-p-2} a_{i+1} \lambda_1^{n-i+1} \gamma_{p+2,n-p-i-1}^{(2)} \right].$$

Здесь были использованы рекуррентные формулы

$$\gamma_{s+1,i}^{(2)} = \gamma_{s,i+1}^{(2)} - C_{s+i-1}^{s-1} \gamma_{s1}^{(2)}, \quad i = \overline{1, n-s}, \quad (19)$$

$$\gamma_{s1}^{(2)} = (s+1)^p - 2^p - C_{s-1}^1 \gamma_{21}^{(2)} - C_{s-1}^2 \gamma_{31}^{(2)} - \dots - C_{s-1}^{s-2} \gamma_{s-1,1}^{(2)}, \quad s = \overline{2, p+1}. \quad (20)$$

Полином

$$R_p^{(2)}(n) = 2^p + C_n^1 \gamma_{21}^{(2)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(2)} + \dots + C_n^p \gamma_{p+1,1}^{(2)}$$

имеет следующие значения:

$$R_p^{(2)}(0) = 2^p, \quad R_p^{(2)}(1) = 2^p + \gamma_{21}^{(2)} = 3^p.$$

При $j \leq p-1$

$$R_p^{(2)}(j) = 2^p + C_j^1 \gamma_{21}^{(2)} + \dots + C_j^{j-1} \gamma_{j1}^{(2)} + C_j^j \gamma_{j+1,1}^{(2)}.$$

Но согласно (20)

$$\gamma_{j+1,1}^{(2)} = (j+2)^p - 2^p - C_j^1 \gamma_{21}^{(2)} - \dots - C_j^{j-1} \gamma_{j1}^{(2)}.$$

Следовательно, $R_p^{(2)}(j) = (j+2)^p$, $j = \overline{0, p-1}$. В силу леммы

$$R_p^{(2)}(n) = (n+2)^p.$$

Значит,

$$Q_{k-2} \left[(n+2)^p \lambda_1^{n+2} + \sum_{i=0}^{n-p-2} a_{i+1} \lambda_1^{n-i+1} \gamma_{p+2, n-p-i-1}^{(2)} \right].$$

Используя рекуррентную формулу (19), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{p+2, n-i-p-1}^{(2)} &= (n-i+1)^p - \left(2^p + C_{n-i-1}^1 \gamma_{21}^{(2)} + C_{n-i-1}^2 \gamma_{31}^{(2)} + \dots + C_{n-i-1}^p \gamma_{p+1,1}^{(2)} \right) = \\ &= (n-i+1)^p - R_p^{(2)}(n-i-1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= (n+2)^p \lambda_1^{n+2} Q_{k-2} + (n+1)^p \lambda_1^{n+1} (a_2 Q_{k-3} + a_3 Q_{k-4} + \dots) + \\ &+ n^p \lambda_1^n (a_3 Q_{k-3} + a_4 Q_{k-4} + \dots) + (n-1)^p \lambda_1^{n-1} (a_4 Q_{k-3} + a_5 Q_{k-4} + \dots) + \dots + \\ &+ 4^p \lambda_1^4 (a_{n-2} Q_{k-3} + a_{n-1} Q_{k-4} + a_n Q_{k-5}) + 3^p \lambda_1^3 a_n Q_{k-3}, \\ Q_{k-2} &= a_1 Q_{k-3} + a_2 Q_{k-4} + \dots, \end{aligned}$$

и т. д. Зафиксируем произвольное положительное целое число m , и пусть $k \geq m$. На $(m+1)$ -м шаге алгоритма получим

$$\begin{aligned} l_{n+k} &= (n+m)^p \lambda_1^{n+m} Q_{k-m} + (n+m-1)^p \lambda_1^{n+m-1} (a_2 Q_{k-m-1} + \dots) + \\ &+ (n+m-2)^p \lambda_1^{n+m-2} (a_3 Q_{k-m-1} + \dots) + \dots + \\ &+ n^p \lambda_1^n (a_{m+1} Q_{k-m-1} + \dots) + \dots + (m+1)^p \lambda_1^{m+1} a_n Q_{k-m-1}. \end{aligned}$$

Здесь использовались следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{2i}^{(m)} &= (i+m)^p - m^p, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \gamma_{21}^{(m)} = (m+1)^p - m^p; \\ \gamma_{3i}^{(m)} &= \gamma_{2, i+1}^{(m)} - C_{i+1}^1 \gamma_{31}^{(m)}, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \gamma_{31}^{(m)} &= \gamma_{22}^{(m)} - C_2^1 \gamma_{21}^{(m)} = (2+m)^p - m^p - C_2^1 [(m+1)^p - m^p]; \\ \gamma_{4i}^{(m)} &= \gamma_{3, i+1}^{(m)} - C_{i+2}^2 \gamma_{31}^{(m)}, \quad i = \overline{1, n-3}, \quad \gamma_{41}^{(m)} = (m+3)^p - m^p - C_3^1 \gamma_{21}^{(m)} - C_3^2 \gamma_{31}^{(m)}; \\ \gamma_{s+1, i}^{(m)} &= \gamma_{s, i+1}^{(m)} - C_{s+i-1}^{s-1} \gamma_{s1}^{(m)}, \quad i = \overline{1, n-s}, \quad s = \overline{2, p+1}; \\ \gamma_{s1}^{(m)} &= \gamma_{2, s-1}^{(m)} - C_{s-1}^1 \gamma_{21}^{(m)} - C_{s-1}^2 \gamma_{31}^{(m)} - \dots - C_{s-1}^{s-2} \gamma_{s-1, 1}^{(m)} = \\ &= (s+m-1)^p - \left(m^p + C_{s-1}^1 \gamma_{21}^{(m)} + C_{s-1}^2 \gamma_{31}^{(m)} + \dots + C_{s-1}^{s-2} \gamma_{s-1, 1}^{(m)} \right). \end{aligned}$$

В сумме слагаемых при Q_{k-m} есть полином

$$R_p^{(m)}(n) = m^p + C_n^1 \gamma_{21}^{(m)} + C_n^2 \gamma_{31}^{(m)} + \dots + C_n^p \gamma_{p+1, 1}^{(m)},$$

который при $n = j$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, равен

$$R_p^{(m)}(j) = (j+m)^p,$$

т. е. по лемме $R_p^{(m)}(n) = (n+m)^p$.

При $k = m$ получаем

$$l_{n+m} = (n+m)^p \lambda_1^{n+m},$$

где m — произвольное положительное целое число.

4. Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеются равные.

Теорема 2. Для того чтобы среди решений уравнения (1) были решения вида $k^m \lambda^k$, $k = 0, 1, \dots$, $0 \leq m \leq n-1$, необходимо и достаточно, чтобы элементарные симметрические многочлены $a_1, a_2, \dots, a_n$, составленные из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, содержали группы равных чисел. При этом решения $\lambda^k, k\lambda^k, \dots, k^{m-1}\lambda^k$, $k = 0, 1, \dots$, уравнения (1) существуют только при таком выборе следующих начальных параметров $l_k = k^s \lambda^k$, $s = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{0, n-1}$, где число λ принадлежит группе равных чисел порядка m .

Доказательство. Пусть элементарные симметрические многочлены (11) m_1 раз содержат число λ_1 , m_2 раз — число λ_2 , $\dots$, m_r раз — число λ_r , $1 \leq m_i \leq n$, $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$; $a_1 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_r \lambda_r, \dots, a_n = (-1)^{n-1} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_r^{m_r}$.

Восстанавливая алгебраический многочлен по этим данным, получим характеристический многочлен

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = D(\lambda),$$

имеющий корни λ_i степеней m_i соответственно.

Обратно, характеристический многочлен $D(\lambda)$, имеющий корни λ_i кратности m_i , имеет также коэффициенты при степенях λ^{n-i} в виде элементарных симметрических многочленов, каждый из которых содержит r групп равных чисел: число λ_i принадлежит группе из m_i равных чисел, m_i назовем порядком группы.

Таким образом, согласно общей теории [3] наличие у характеристического многочлена корня λ_i кратности m_i , или, что тоже самое, наличие у элементарных симметрических многочленов группы порядка m_i , состоящей из равных чисел λ_i , $1 \leq m_i \leq n$, приводит к решениям уравнения (1) вида $\lambda_i^k, k\lambda_i^k, \dots, k^{m_i-1}\lambda_i^k$, $k = 0, 1, \dots$. $\square$

Отметим, что при нахождении решений l_{n+k} уравнения (1) учитываются следующие обстоятельства.

Пусть λ — корень кратности p характеристического уравнения.

- 1) $p = 1$. Решение строится в п. 1. Начальные параметры: $l_{n-i} = \lambda^{n-i}$, $i = \overline{1, n}$.
- 2) $p = 2$. В формулах, которые приводят к решениям l_{n+k} , надо удалить коэффициент a_n . Начальные параметры: $l_{n-i} = (n-i)\lambda^{n-i}$, $i = \overline{1, n}$.
- 3) $p = m \leq n-1$. В формулах, которые приводят к решениям l_{n+k} , надо удалить коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m}$. Начальные параметры: $l_{n-i} = (n-i)^{m-1} \lambda^{n-i}$, $i = \overline{1, n}$.

Выделим случай, когда число, например, λ_1 встречается в элементарных симметрических многочленах n раз. Тогда

$$a_1 = C_n^1 \lambda_1, a_2 = -C_n^2 \lambda_1^2, \dots, a_s = (-1)^{s-1} C_n^s \lambda_1^s, \dots, a_{n-1} = (-1)^{n-2} C_n^{n-1} \lambda_1^{n-1}, a_n = (-1)^{n-1} \lambda_1^n. \quad (21)$$

Характеристическое уравнение $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$ и условия

$$D(\lambda_1) = D'(\lambda_1) = \dots = D^{(n-1)}(\lambda_1) = 0$$

приводят к формулам (14), из которых при $p = n-1$ также получаются формулы (21). Заметим, что в п. 3 рассматривается случай, где число λ_1 кратности $p+1$. Поэтому при $p = n-1$ получена кратность n .

Представляет самостоятельный интерес равенства (16) при условии, что λ_1 — корень кратности n . Тогда числа a_i находятся по формулам (21), и после сокращения на степень λ_1^n равенство (16) приводится к следующему, верному для всех $n \geq p+1$, равенству:

$$C_n^1 (n-1)^p - C_n^2 (n-2)^p + C_n^3 (n-3)^p + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-2} 2^p + (-1)^n C_n^{n-1} = n^p, \quad p = \overline{1, n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Круглов В.Е. *Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения конечного порядка*, Укр. матем. журн. **61** (6), 777–794 (2009).
- [2] Круглов В.Е. *Об n -арифметических треугольниках, построенных для полиномиальных коэффициентов*, Изв. вузов. Матем. (8), 35–48 (2016).
- [3] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей* (Наука, М., 1967).
- [4] Балоев А.А., Лазарева П.А. *Об общем решении разностного уравнения с постоянными коэффициентами*, Изв. вузов. Матем. (4), 11–24 (2021).

Виктор Евгеньевич Круглов

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
ул. Дворянская, д. 2, г. Одесса, 65082, Украина,

e-mail: viktorkruglov935@gmail.com

V.E. Kruglov

Conditions for the existence of power solutions to a linear difference equation with constant coefficients

Abstract. With the help of the formula for the general solution of a difference equation with constant coefficients, it is shown that the set of solutions to this equation contains classical solutions of the type $k^m \lambda^k$. We present necessary and sufficient conditions on the coefficients of the equation and the initial parameters under which such solutions are obtained.

Keywords: difference equation, conditions on the coefficients of an equation.

Viktor Evgen'evich Kruglov

Odesa I.I. Mechnikov National University,
2 Dvoryanskaya str., Odessa, 65082 Ukraine,

e-mail: viktorkruglov935@gmail.com