

С. ДЕМИР

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА λ -СКАЧКА В H^p -ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. Пусть $\phi \in \mathcal{S}$, $\int \phi(x) dx = 1$, определим

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

и обозначим семейство функций $\{\phi_t * f(x)\}_{t>0}$ через $\Phi * f(x)$. Пусть также $\mathcal{J}$ — подмножество $\mathbb{R}$ (или, более общо, упорядоченное множество индексов) и существует константа C_1 такая, что

$$\sum_{t \in \mathcal{J}} |\hat{\phi}_t(x)|^2 < C_1$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

i) существует константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{V}_2(\Phi * f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

для всех $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$;

ii) оператор λ -скачка $N_\lambda(\Phi * f)$ удовлетворяет условию

$$\|\lambda[N_\lambda(\Phi * f)]^{1/2}\|_{L^p} \leq C_3 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

равномерно по $\lambda > 0$ при некоторой постоянной $C_3 > 0$.

Ключевые слова: пространство Харди, вариационный оператор, оператор λ -скачка.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-15-19

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные и осцилляционные неравенства, а также неравенства λ -скачка на L^p -пространствах давно являются предметом изучения многих математиков в теории вероятности, гармоническом анализе и эргодической теории (см., например, [1]–[6]). При $0 < p \leq 1$ пространство Харди H^p уже не введет себя как L^p , поэтому доказательство вариационных и осцилляционных неравенств на H^p -пространствах при $0 < p \leq 1$ требует совершенно другого подхода, чем тот, который используется при работе с L^p -пространствами.

Пусть $\phi \in \mathcal{S}$, $\int \phi(x) dx = 1$, определим

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

и обозначим семейство функций $\{\phi_t * f(x)\}_{t>0}$ через $\Phi * f(x)$. Пусть $0 < p < \infty$. Распределение f принадлежит $H^p(\mathbb{R}^n)$, если максимальная функция

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |(\phi_t * f(x))|$$

принадлежит L^p .

Определение 1. Пусть $\mathcal{J}$ — подмножество $\mathbb{R}$ (или, более общо, упорядоченное множество индексов). Рассмотрим вещественно- или комплекснозначные функции $t \mapsto a_t$, заданные на $\mathcal{J}$, и определим их ρ -вариацию как

$$\|a\|_{v_\rho} = \sup \left(\sum_{i \geq 1} |a_{t_{i+1}} - a_{t_i}|^\rho \right)^{1/\rho},$$

где супремум берется по всем конечным убывающим последовательностям (t_i) в $\mathcal{J}$.

Мы можем положить

$$\mathcal{V}_\rho(\Phi * f)(x) = \|\{\phi_t * f(x)\}_{t>0}\|_{v_\rho} = \sup \left(\sum_{i \geq 1} |\phi_{t_{i+1}} * f(x) - \phi_{t_i} * f(x)|^\rho \right)^{1/\rho}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $F = \{F_t : t \in \mathcal{J}\}$ — семейство измеримых по Лебегу функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция λ -скачка $N_\lambda(F)$ определяется как супремум всех таких целых чисел N , для которых существует возрастающая последовательность $0 < s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 < \dots \leq s_N < t_N$ такая, что

$$|F_{t_k}(x) - F_{s_k}(x)| > \lambda$$

для каждого $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

Х. Лиу [7] изучал вариационные неравенства и неравенства λ -скачка для семейства функций $\Phi * f$ при $\rho > 2$, он получил следующие результаты.

Теорема 1. Для любого $\rho > 2$ существует константа $C_\rho > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{V}_\rho(\Phi * f)\|_{L^p} \leq C_\rho \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

для всех $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. Если $\rho > 2$, то оператор λ -скачка $N_\lambda(\Phi * f)$ удовлетворяет условию

$$\left\| \lambda [N_\lambda(\Phi * f)]^{1/\rho} \right\|_{L^p} \leq C_\rho \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

равномерно по $\lambda > 0$ для всех $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

В данной статье мы доказываем вышеприведенные результаты для случая $\rho = 2$ с дополнительным условием на преобразование Фурье от ϕ_t . Для доказательства наших результатов будем использовать следующее атомарное разложение $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2. Пусть $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$. Скажем, что функция $a \in L^q(\mathbb{R}^n)$ является (p, q) -атомом с центром в s , если выполнены следующие условия:

- i) $\text{supp } a \subset B(c, r)$,
- ii) $\|a\|_q \leq |B(c, r)|^{1/q-1/p}$,
- iii) $\int a(x) dx = 0$.

Теорема 3. *Распределение f принадлежит $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$, тогда и только тогда, когда существует последовательность (p, q) -атомов $\{a_j\}$, $1 \leq q \leq \infty$, $q \neq p$, и последовательность скаляров $\{\lambda_j\}$ такие, что*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$$

в смысле распределений и

$$C_1 \|f\|_{H^p}^p \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^p \leq C_2 \|f\|_{H^p}^p,$$

где C_1 и C_2 — константы, зависящие только от n и p .

Доказательство. См. Р.Х. Лэттер [8]. □

1. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства нашего главного результата понадобится

Лемма. *При $\rho \geq 2$ имеем следующие неравенства:*

$$\|a\|_{v_\rho} \leq \|a\|_{v_2} \leq 2 \cdot \mathcal{S}(a),$$

где

$$\mathcal{S}(a) = \left(\sum_{t \in \mathcal{J}} |a_t|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\|a\|_{v_\rho} \leq \|a\|_{v_2},$$

так как $\rho \geq 2$. Поскольку в определении $\|a\|_{v_2}$ супремум берется по всем конечным убывающим последовательностям $(t_j) \in \mathcal{J}$ и $|x - y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$, то $2\mathcal{S}(a)$ является мажорантой последовательности

$$\left\{ \left(\sum_{i \geq 1} |a_{t_{i+1}} - a_{t_i}|^2 \right)^{1/2} \right\},$$

откуда и следует результат. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать наш главный результат.

Теорема 4. *Пусть существует константа C_1 такая, что*

$$\sum_{t \in \mathcal{J}} |\hat{\phi}_t(x)|^2 < C_1$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{V}_2(\Phi * f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

для всех $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для начала имеем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{V}_2(\Phi * f)\|_{L^2}^2 &\leq 4 \int \sum_{t \in \mathcal{J}} |\phi_t * f|^2 dx \quad (\text{по лемме 1}) = \\
&= 4 \int \sum_{t \in \mathcal{J}} |\widehat{\phi_t * f}(x)|^2 dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) = \\
&= 4 \int \sum_{t \in \mathcal{J}} |\widehat{\phi_t}(x) \hat{f}(x)|^2 dx = 4 \int \sum_{t \in \mathcal{J}} |\widehat{\phi_t}(x)|^2 |\hat{f}(x)|^2 dx \leq \\
&\leq 4C_1 \int |\hat{f}(x)|^2 dx \quad (\text{по предположению теоремы}) = \\
&= 4C_1 \int |f(x)|^2 dx \quad (\text{по теореме Планшереля}) = 4C_1 \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Пусть теперь a — $(p, 2)$ -атом и $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$. Предположим, что a имеет носитель в кубе Q и c — центр этого куба. Используя неравенство Гёльдера и наши предыдущие наблюдения, получаем

$$\int_{4Q} \mathcal{V}_2(\Phi * a)^p(x) dx \leq |4Q|^{1-p/2} \|\mathcal{V}_2(f)\|_{L^2}^p \leq 2\sqrt{C_1} |4Q|^{1-p/2} \|a\|_{L^2}^p \leq 2\sqrt{C_1}.$$

Ввиду неравенства Минковского и теоремы о среднем значении для $y, \xi \in Q$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus 4Q$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|\{\phi_t(x-y) - \phi_t(x-\xi)\}_{t>0}\|_{\mathcal{V}_2} \leq \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} (\phi_t(x-y) - \phi_t(x-\xi)) \right| dt \leq \\
&\leq C_2 |y-\xi| \int_0^\infty \frac{1}{t^{n+2}} \left(1 + \frac{|x-\xi|}{t}\right)^{-n-2} dt \leq C_2 \frac{|y-\xi|}{|x-\xi|^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n}{(1+t)^{n+2}} dt \leq C_2 \frac{|y-\xi|}{|x-\xi|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Поскольку также верно

$$\mathcal{V}_2(\Phi * a)(x) \leq \int_Q |a(y)| \|\{\phi_t(x-y) - \phi_t(x-c)\}_{t>0}\|_{\mathcal{V}_2} dy,$$

мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 4Q} \mathcal{V}_2(\Phi * a)^p(x) dx \leq C_2 \int_{|x-c| \geq 4|Q|} \frac{|Q|^p}{|x-c|^{(n+1)p}} dx \left(\int_Q |a(y)| dy \right)^p \leq C_2.$$

□

Следствие. Пусть существует константа C_1 такая, что

$$\sum_{t \in \mathcal{J}} |\hat{\phi}_t(x)|^2 < C_1$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда оператор λ -скачка $N_\lambda(\Phi * f)$ удовлетворяет условию

$$\|\lambda[N_\lambda(\Phi * f)]^{1/2}\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

равномерно по $\lambda > 0$ для всех $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В [5] было показано, и это легко увидеть, что

$$\lambda[N_\lambda(\Phi * f)]^{1/\rho} \leq \mathcal{V}_\rho(\Phi * f)$$

выполняется для любого ρ равномерно по λ . Таким образом, доказательство следует из теоремы 2. □

Замечание. Заметим, что следствие 1 отвечает положительно на гипотезу Х. Лиу [7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bourgain J. *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **69**, 5–41 (1989).
- [2] Demir S. *H^p Spaces and Inequalities in Ergodic Theory*, Ph.D Thesis (Univ. Illinois at Urbana-Champaign, Usa, May 1999).
- [3] Demir S. *Inequalities for the variation operator*, Bull. Hellenic Math. Soc. **64**, 92–97 (2020).
- [4] Demir S. *Variational inequalities for the differences of averages over lacunary sequences*, New York J. Math. **28**, 1099–1111 (2022).
- [5] Jones R.L., Seeger A., Wright J. *Strong variational and jump inequalities in harmonic analysis*, Trans. AMS **360** (12), 6711–6742 (2008).
- [6] Lépingle D. *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verw. Gebiete **36** (4), 295–316 (1976).
- [7] Liu H. *Variational characterization of H^p* , Proc. Royal Soc. Edinburgh **149** (5), 1123–1134 (2019).
- [8] Latter R.H. *A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms*, Studia Math. **62** (1), 93–101 (1978).

Сакин Демир

Университет Агры Ибрагима Чечена,
г. Агры, 04100, Турция,

e-mail: sakin.demir@gmail.com

S. Demir

Variation and λ -jump inequalities on H^p spaces

Abstract. Let $\phi \in \mathcal{S}$ with $\int \phi(x) dx = 1$, and define

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x}{t}\right),$$

and denote the function family $\{\phi_t * f(x)\}_{t>0}$ by $\Phi * f(x)$. Let $\mathcal{J}$ be a subset of $\mathbb{R}$ (or more generally an ordered index set), and suppose that there exists a constant C_1 such that

$$\sum_{t \in \mathcal{J}} |\hat{\phi}_t(x)|^2 < C_1$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$. Then

i) There exists a constant $C_2 > 0$ such that

$$\|\mathcal{V}_2(\Phi * f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1$$

for all $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$.

ii) The λ -jump operator $N_\lambda(\Phi * f)$ satisfies

$$\|\lambda[N_\lambda(\Phi * f)]^{1/2}\|_{L^p} \leq C_3 \|f\|_{H^p}, \quad \frac{n}{n+1} < p \leq 1,$$

uniformly in $\lambda > 0$ for some constant $C_3 > 0$.

Keywords: Hardy space, variation operator, λ -jump operator.

Sakin Demir

Agri Ibrahim Cecen University,
Ağrı, 04100 Turkey,

e-mail: sakin.demir@gmail.com