

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

О РАЗЛОЖЕНИЯХ И ТРАНЗИТИВНЫХ ДЕЙСТВИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ

Аннотация. В статье рассматриваются разложения для нильпотентных алгебр Ли и нильпотентных групп Ли и связи между ними. Также даны описания несократимых транзитивных действий нильпотентных групп Ли на плоскости и на трехмерном пространстве.

Ключевые слова: нильпотентность, группа Ли, алгебра Ли, разложение, точное разложение.

УДК: 512.813

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-3-14

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена изучению разложений и транзитивных действий связных (и обычно односвязных) нильпотентных групп Ли.

Изучение нильпотентных групп Ли и алгебр Ли, как и их транзитивных действий, с первого взгляда не представляет особых трудностей. Известно немало свойств нильпотентных групп Ли и их подгрупп Ли. В свое время нильпотентные группы (в том числе и нильпотентные группы Ли), а также нильпотентные алгебры Ли рассматривались как простейшие объекты в своих классах алгебраических структур. Но на деле оказывается, что нильпотентные группы Ли (как и алгебры Ли) en masse представляют собой очень сложное явление. Рассмотрение отдельной нильпотентной группы Ли обычно несложно, но вот когда возникает желание изучить все нильпотентные группы Ли (даже только односвязные) или все нильпотентные алгебры Ли, то на пути этого изучения встают почти непреодолимые (в настоящее время) препятствия. Именно поэтому при классификациях транзитивных действий групп Ли случай нильпотентных групп Ли обычно не детализируется (например, при рассмотрении всех трехмерных однородных пространств в [1]). Данная статья посвящена некоторым шагам в описании транзитивных нильпотентных групп Ли, выделяя среди них несократимые (что тесно связано с изучением разложений групп Ли). Отметим, что транзитивные действия групп Ли на многообразиях в данной статье обычно предполагаются локально-эффективными (т. е. предполагается, что элементы группы Ли, тривиально действующие на многообразии, образуют дискретную подгруппу).

В разделе 1 рассматриваются разложения нильпотентных групп Ли и алгебр Ли и связь между ними. В разделе 2 изучаются транзитивные действия нильпотентных групп Ли на многообразиях малой размерности. В частности, рассмотрены несократимые транзитивные действия на $\mathbf{R}^3$, что дополняет известные описания транзитивных действий групп Ли на трехмерных многообразиях.

Основные используемые в этой статье сведения из теории алгебр Ли и групп Ли можно найти в [2].

1. О РАЗЛОЖЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ

Определение 1. Разложением алгебры Ли L называется представление ее в виде суммы (не обязательно прямой) $L = L_1 + L_2$ двух нетривиальных подалгебр Ли L_1, L_2 . Разложение называется точным, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Разложением группы Ли G называется представление ее в виде произведения $G = G_1 \cdot G_2$ двух нетривиальных подгрупп Ли G_1, G_2 . Разложение здесь называется точным, если пересечение $G_1 \cap G_2$ тривиально (иногда ограничиваются требованием дискретности этого пересечения).

Проиллюстрируем эти определения на простейших примерах. Алгебра Ли $n_3(\mathbf{R})$ нильпотентных вещественных матриц порядка 3 нильпотентна и может, как легко понять, быть представлена в виде суммы двух двумерных подалгебр Ли (точнее, идеалов), а также в виде суммы одной одномерной и одной двумерной подалгебр Ли (это последнее разложение будет точным в смысле, определенном выше). Аналогичное имеем и для группы Ли $N_3(\mathbf{R})$ вещественных унитарных матриц порядка 3.

Разложения произвольных групп Ли и алгебр Ли тесно связаны между собой. Но часто пролегающая между ними дорога с односторонним движением. Любое разложение $G = G_1 \cdot G_2$ группы Ли G порождает разложение $g = g_1 + g_2$ соответствующей алгебры Ли g (это доказывается несложным дифференцированием, см., например, [3]). Однако обратное утверждение (т.е. глобализация разложения алгебры Ли) в полной мере справедливо не всегда. Разложению алгебры Ли соответствует, вообще говоря, только локальное (в некоторой окрестности единичного элемента) разложение соответствующей группы Ли. И только в некоторых случаях здесь имеет место глобальное разложение группы Ли в произведение двух ее подгрупп Ли. Так будет, например, для компактных групп Ли. Для полупростых же и для произвольных разрешимых алгебр Ли разложение алгебры Ли не всегда глобализуемо (т.е. ему иногда соответствует лишь только локальное разложение группы Ли — примеры такого рода будут приведены ниже). А вот для класса нильпотентных групп и алгебр Ли связь между разложениями групп Ли и алгебр Ли взаимная (подробнее об этом см. ниже). Более того, для любой комплексной группы Ли глобализация любого разложения ее алгебры Ли возможна, только если эта группа Ли нильпотентна (подробнее и об этом будет сказано ниже).

Отметим, что любая односвязная нильпотентная группа Ли N имеет естественную структуру вещественной алгебраической группы. Эта структура индуцируется полиномиальным законом умножения относительно подходящей системы координат — координат Мальцева, введенных в [4]. Напомним определение этих координат. В нильпотентной алгебре Ли L всегда можно выбрать (причем многими способами) такой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ (где $n = \dim L$), что векторы $e_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ порождают идеалы в N (здесь $i = 1, 2, \dots, n$). Обозначим через $x_i(t)$ однопараметрические подгруппы в односвязной нильпотентной группе Ли N , соответствующей алгебре Ли L , порожденные векторами e_i . Тогда имеет место однозначное разложение любого элемента g группы Ли N в произведение $g = x_1(t_1) \cdot x_2(t_2) \cdots x_n(t_n)$. Тем самым параметры t_i образуют на N глобальную систему координат. При этом умножение в группе Ли N относительно этих координат будет полиномиальным, что вводит на N структуру вещественной алгебраической группы.

Кроме того, односвязная нильпотентная группа Ли N всегда диффеоморфна $\mathbf{R}^n$ ($n = \dim N$) и как многообразие с указанной выше на ней структурой алгебраического многообразия изоморфна $\mathbf{R}^n$. Этот изоморфизм реализуется, например, экспоненциальным отображением алгебры Ли на односвязную нильпотентную группу Ли, которое в подходящих координатах (например, в координатах Мальцева) задается полиномами (как и обратное к

нему логарифмическое отображение).

Разложения групп Ли тесно связаны с изучением транзитивных действий групп Ли, их расширений и сужений. Из $G = G_1 \cdot G_2$ следует, что естественное действие подгруппы Ли G_2 на G/G_1 , которое называется сужением исходного транзитивного действия, транзитивно (здесь мы предполагаем, что подгруппа Ли G_1 замкнута в G — это нужно, чтобы фактор-пространство G/G_1 имело структуру гладкого многообразия). На самом деле эта транзитивность, как легко понять, даже эквивалентна равенству $G = G_1 \cdot G_2$.

Определение 2. Дополнением собственной подалгебры Ли U в алгебре Ли L называется такая собственная подалгебра Ли $V \subset L$, которая вместе с U образует разложение алгебры Ли L , т. е. $L = U + V$.

Дополнением собственной подгруппы Ли H в группе Ли G называется такая собственная подгруппа Ли $F \subset G$, которая вместе с H образует разложение группы Ли G , т. е. $G = H \cdot F$.

Например, любая одномерная подалгебра Ли в $n_3(\mathbf{R})$, не лежащая в центре этой алгебры Ли, имеет двумерное дополнение. Центр (одномерный) же алгебры Ли $n_3(\mathbf{R})$ нетривиального дополнения не имеет.

Описание всех дополнений к заданной подалгебре Ли, можно найти в [5]. Однако там описание дополнений весьма абстрактно и опирается на понятие *bicrossed product*, которое использовать для исследования конкретных нетривиальных примеров очень непросто.

Задача описания всех разложений нильпотентных алгебр Ли или даже одной конкретной нильпотентной алгебры Ли достаточно большой размерности не имеет, видимо, обозримого решения. Например, для произвольной нильпотентной алгебры Ли неясно, как ответить на вопрос о существовании для нее точного разложения, при котором размерности подалгебр будут ≥ 2 . Поэтому приходится выделять и изучать специальные классы разложений и/или специальные классы нильпотентных алгебр Ли.

Следующий результат касается взаимосвязей разложений нильпотентных алгебр Ли и нильпотентных групп Ли.

Теорема 1. Пусть N — нильпотентная группа Ли, а N_1, N_2 — две ее связные подгруппы Ли. Тогда имеет место разложение $N = N_1 \cdot N_2$, если и только если имеет место разложение $n = n_1 + n_2$ для соответствующих алгебр Ли.

Разложение алгебры Ли n будет точным, если точно разложение соответствующей группы Ли. Обратное утверждение верно, если группа Ли N односвязна.

Доказательство. Утверждение о том, что из существования разложения группы Ли следует существование разложения ее алгебры Ли, хорошо известно для произвольных групп Ли. Оно доказывается дифференцированием. Обратное утверждение для произвольных групп Ли, как известно, неверно.

Отметим, что свойство глобализуемости разложение алгебр Ли n выполняется (или не выполняется) одновременно для всех связных групп Ли с алгеброй Ли n (см. [6]). Поэтому мы можем группу Ли N считать односвязной.

Для нильпотентных групп Ли обратное утверждение было впервые доказано в [7]. Однако приведенное там доказательство опирается на нетривиальный результат из теории действий алгебраических групп и вначале проводится для комплексных групп Ли, а только потом — для вещественных. На самом деле можно получить таким способом доказательство и прямо для вещественного случая (см. предложение 1 ниже). Но так как этот результат для данной статьи весьма важен, то ниже будет приведено новое, прямое и не выходящее за пределы классической вещественной теории групп Ли и алгебр Ли доказательство этого результата.

Более общее утверждение (но уже с использованием техники алгебраических групп) будет доказано ниже в предложении 1.

Итак, пусть имеется разложение $n = n_1 + n_2$ нильпотентной алгебры Ли n . Докажем, что для соответствующих подалгебр Ли n_i связных подгрупп Ли N_i в N имеем разложение $N = N_1 \cdot N_2$. При этом отметим известный факт — связные подгруппы Ли в односвязной нильпотентной группе Ли замкнуты.

Доказательство будем вести индукцией по $\dim n$. При $\dim n = 1$ нужное нам утверждение практически бессодержательно (и его можно считать верным). При $\dim n = 2$ алгебра Ли n будет абелева и для нее существования разложения абелевой группы Ли $N = \mathbf{R}^2$ очевидно. Теперь рассуждаем по индукции.

Для осуществления шага индукции нам потребуется хорошо известное утверждение: произвольная нетривиальная подалгебра U нильпотентной алгебры Ли n содержится в некотором идеале W коразмерности 1 этой алгебры Ли n . В качестве такого идеала W можно взять, например, максимальную подалгебру алгебры Ли n , содержащую подалгебру Ли U . Из нильпотентности n с помощью теоремы Энгеля мгновенно выводится, что такая максимальная подалгебра W будет в n идеалом коразмерности 1.

Применим это утверждение к подалгебре Ли n_2 и соответствующий ей идеал коразмерности 1 обозначим W . Рассмотрим подалгебру $n_1 \cap W$. Так как $n_2 \subset W$ и $n = n_1 + n_2$, то легко понять, что $W = (n_1 \cap W) + n_2$ и в n_1 существует такой элемент X (лежащий вне W), что $n = \text{span}(X) + W$ (здесь $\text{span}(X)$ — одномерная подалгебра Ли, натянутая на X). При этом имеем, очевидно, разложение $N = A \cdot N'$, где A — одномерная группа Ли (подгруппа Ли в N , соответствующая $X \in n$), а N' — связная подгруппа Ли в N , соответствующая идеалу Ли W (подгруппа Ли N' замкнута в N и нормальна).

Разложение $W = (n_1 \cap W) + n_2$ в силу предположения индукции порождает разложение группы Ли N' , соответствующей алгебре Ли W : $N' = N'_1 \cdot N_2$, где N'_1 — связная подгруппа Ли в N , соответствующая подалгебре Ли $n_1 \cap W$ (N'_1 замкнута в N). Так как X нормализует W , то подгруппа Ли A нормализует N' . Также A нормализует N'_1 . Поэтому, в частности, $A \cdot N'_1$ — подгруппа Ли в N (связная и замкнутая в N). Получаем $N_1 \cdot N_2 = A \cdot N'_1 \cdot N_2 = A \cdot N' = N$. Тем самым разложение $L = L_1 + L_2$ глобализуемо.

Как известно, пересечение связных подгрупп Ли в нильпотентной односвязной группе Ли — связная группа Ли. Отсюда легко вытекает утверждение о точности разложения (в смысле тривиальности в односвязном случае пересечения подгрупп Ли, образующих разложение). $\square$

Утверждение теоремы 1 означает, в частности, что разложения нильпотентных алгебр Ли всегда глобализуемы. Более того, мы сейчас покажем, что произведение любых двух связных подгрупп Ли в односвязной нильпотентной группе Ли всегда будет замкнуто (даже алгебраически замкнуто). Здесь мы уже используем естественную структуру алгебраической группы на односвязной нильпотентной группе Ли (можно было бы и здесь дать независимое от теории алгебраических групп доказательство).

Предложение 1. *Произведение двух произвольных связных подгрупп Ли в односвязной нильпотентной группе Ли будет замкнуто (в топологии Зарисского).*

Доказательство. Пусть N_1, N_2 — две связные подгруппы Ли в односвязной нильпотентной группе Ли N . С помощью координат Мальцева (см. выше) на N естественным образом вводится структура алгебраической унитарной группы, при этом N_1, N_2 — замкнутые (в топологии Зарисского) подгруппы в N . Рассмотрим фактор-пространство N/N_2 (оно изоморфно аффинному пространству) и естественное действие подгруппы N_1 на нем. Пусть

$p : N \rightarrow N/N_2$ — естественная проекция. Орбиты действия унипотентной группы на аффинном пространстве замкнуты, поэтому замкнуты и орбиты группы N_1 на N/N_2 . Прообраз при отображении p орбиты, проходящей через точку $eN_2 \in N/N_2$, замкнут и совпадает с $N_1 \cdot N_2$. Получаем, что произведение $N_1 \cdot N_2$ как орбита нильпотентной алгебраической группы — замкнутое алгебраическое подмногообразие в N . $\square$

Отметим, что для неодносвязных нильпотентных групп Ли их связные подгруппы могут оказаться незамкнутыми, каковым может получиться и их произведение.

В частности, в силу предложения 1 произведение двух однопараметрических подгрупп Ли в односвязной нильпотентной группе Ли замкнуто (не всегда будет подгруппой Ли). А вот произведение двух произвольных замкнутых подмножеств односвязной нильпотентной группы Ли может и не быть замкнутым. Пример такого рода, где даже один из сомножителей — связная подгруппа Ли. Рассмотрим абелеву двумерную группу Ли $\mathbf{R}^2$ с координатами (x, y) , а в ней два подмножества A, B , где A — ось x (т. е. здесь $y = 0$; это замкнутая одномерная подгруппа Ли), а B — гипербола $xy = 1$ (замкнутое подмножество, но не подгруппа в $\mathbf{R}^2$). Тогда, как нетрудно понять, произведение $X + Y$ (в аддитивной записи) совпадает с $\mathbf{R}^2 \setminus A$ и не будет замкнуто. Здесь, в частности, используется тот факт, что подмножество B не содержит начала координат (т. е. единичный элемент группы $\mathbf{R}^2$). Но, сдвинув гиперболу, получаем ситуацию, когда произведение $A + B$ уже содержит начало координат и тоже не будет замкнуто.

После рассмотрения разложений алгебр Ли в сумму двух подалгебр Ли естественно возникает задача изучения разложений алгебр Ли в сумму трех и даже большего числа подалгебр. Но уже в случае, когда рассматриваются разложения нильпотентных алгебр Ли в сумму трех подалгебр, глобализация этого разложения (т. е. представление соответствующей группы Ли в виде произведения трех соответствующих подалгебрам Ли подгрупп Ли) имеет место не всегда. Если алгебра Ли абелева, то любое ее кратное разложение, конечно, глобализуемо. Но уже для простейшей неабелевой (трехмерной) нильпотентной алгебры Ли глобализация не всегда имеет место. Приведем пример такого рода для случая именно трех слагаемых.

Снова рассмотрим трехмерную нильпотентную алгебру Ли $n = n_3(\mathbf{R})$, состоящую из нильпотентных вещественных матриц порядка 3. В ней рассмотрим три одномерных подалгебры, в сумме дающие всю алгебру Ли N :

$$n_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad n_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad n_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & w & w \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

где $u, v, w \in \mathbf{R}$ принимают все вещественные значения. То, что это подалгебры Ли, легко проверяется прямым вычислением коммутатора.

Соответствующие им однопараметрические подгруппы в группе Ли $N_3(\mathbf{R})$ унипотентных вещественных матриц порядка 3 таковы:

$$N_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad N_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad N_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & w & w + \frac{1}{2}w^2 \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Произведение $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ этих трех подгрупп состоит из матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & u + w & w + \frac{1}{2}w^2 + uv + uw \\ 0 & 1 & v + w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что представление произвольных элементов группы Ли $N_3(\mathbf{R})$ в виде произведения элементов указанных трех однопараметрических подгрупп не всегда возможно и не всегда однозначно. Для этого рассмотрим произвольную точку $g = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N$ и попытаемся найти такие значения величин u, v, w , чтобы получить элемент группы с координатами a, b, c . Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} a &= u + w, \\ b &= v + w, \\ c &= w + \frac{1}{2}w^2 + uv + uw. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений выразим u и v через w и подставим их значения в третье уравнение. Имеем

$$c = -\frac{5}{2}w^2 + w(1 - 3a - b) + a^2 + ab.$$

Выделив полный квадрат, получим выражение

$$c = \frac{5}{2}\left(w + \frac{1}{5}(3a - b)\right)^2 - \frac{1}{25}(1 + 9a^2 + b^2 - 6a - 2b + 6ab) + a^2 + ab.$$

Так как это соотношение квадратично относительно w , то оно имеет, вообще говоря, для значений параметра c два различных решения w . Также указанное отображение не является сюръективным. Его образ — замкнутая область в $\mathbf{R}^3$, ограниченная гиперболическим (так как дискриминант квадратичной части здесь < 0) параболоидом, довольно сложно расположенном в пространстве:

$$z = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{19}{25}xy - \frac{1}{25}y^2 + \frac{6}{25}x + \frac{2}{25}y - \frac{1}{25}.$$

(в соответствующих координатах $x = a, y = b, z = c$).

Тем самым отображение $(u, v, w) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & u + w & w + \frac{1}{2}w^2 + uv + uw \\ 0 & 1 & v + w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in N$ не является

взаимно однозначным. Потому разложение алгебры Ли в точную сумму трех одномерных подалгебр Ли не порождает разложение соответствующей группы Ли в произведение соответствующих одномерных подгрупп Ли, т. е. указанное выше разложение трехмерной нильпотентной алгебры Ли $n_3(\mathbf{R})$ не будет глобализуемо. Отметим, что так как указанное отображение является регулярным отображением, то его образ — это всегда конструктивное множество (которое, как мы показали, может оказаться в наших рассуждениях собственным подмножеством).

Построенный пример можно в некоторой степени использовать при рассмотрении возможностей управления системами в терминах групп Ли. Если имеются три “руля” (однопараметрических), то, если их использовать в строго определенном порядке и только по одному разу каждый, оказывается, что не обязательно можно будет достичь произвольного допустимого для данной группы Ли управления. При этом три указанные выше однопараметрические подгруппы все же алгебраически порождают всю группу $N_3(\mathbf{R})$, описывающую все возможные управления.

Хотя разложение нильпотентной алгебры Ли в сумму трех и более подалгебр Ли (т. е. кратных или полиразложений) не всегда глобализуемо, однако для некоторых кратных разложений глобализация все же имеет место. Например, так будет для разложений в прямую

сумму одномерных подалгебр, которые образуют систему координат 2-го рода (координат Мальцева) на нильпотентной алгебре Ли.

В общем случае разложению алгебр Ли не всегда соответствуют разложения соответствующих групп Ли. Например, для произвольной комплексной полупростой алгебры Ли L имеется разложение $L = n_- + b$ (порожденное корневым разложением $L = n_- + c + n_+$; здесь c — картановская, а $b = c + n_+$ — борелевская подалгебры Ли). Известно, что такое разложение никогда не может быть глобализовано, т. е. не имеется разложения соответствующих подгрупп Ли (хотя имеется локальное разложение). Для разрешимых групп Ли тоже иногда возникает такого рода ситуация. Например, для группы Ли $\text{Aff}(\mathbf{R}^1)$ аффинных преобразований прямой (являющейся двумерной разрешимой группой Ли) существуют неглобализуемые разложения соответствующей алгебры Ли (подробнее см. ниже). В [7] доказано, что если любому разложению комплексной алгебры Ли соответствует разложение соответствующей связной группы Ли, то такие алгебра Ли и группа Ли обязательно нильпотентны. В вещественном же случае существуют, кроме нильпотентных, другие такие алгебры Ли, для которых каждое разложение глобализуемо. Например, таковы компактные алгебры Ли (другие примеры такого рода приведены в [7], где в том числе в неявной форме фигурирует $E(2)$ — группа Ли движений евклидовой плоскости).

Немного выйдя за пределы исследуемых в данной статье объектов, рассмотрим треугольные (и потому разрешимые) группы Ли и алгебры Ли. Такие группы и алгебры Ли по своим свойствам очень близки к нильпотентным группам и алгебрам Ли соответственно. Поэтому полезно выяснить, не переносится ли на них свойство глобализации разложений алгебр Ли.

Напомним, что алгебра Ли называется треугольной (иногда вполне разрешимой), если все собственные значения операторов ее присоединенного представления вещественны. Название “треугольная” связано, в частности, с тем, что алгебра Ли $T_n(\mathbf{R})$ треугольных вещественных матриц является треугольной и любая треугольная алгебра Ли изоморфна некоторой подалгебре в $T_n(\mathbf{R})$ при некотором достаточно большом n . Группа Ли называется треугольной, если ее алгебра Ли треугольна (можно дать и более прямое определение, потребовав вещественность всех собственных значений присоединенного представления такой группы Ли). Один классический пример треугольной неабелевой алгебры Ли — это $T_2(\mathbf{R})$. Еще один пример такого рода — двумерная алгебра Ли группы Ли $\text{Aff}(\mathbf{R})$ (несвязной!) аффинных преобразований вещественной прямой. И уже для этой двумерной алгебры Ли не любое ее разложение будет глобализуемо. Для доказательства этого применимо рассуждение из [7] (где рассмотрена группа аффинных преобразований комплексной прямой). А именно, рассмотрим две подгруппы Ли G_0, G_1 в $\text{Aff}(\mathbf{R})$ — стационарные подгруппы точек $0, 1 \in \mathbf{R}$ соответственно. Геометрически очевидно, что эти две подгруппы Ли между собой сопряжены. Так как обе они одномерны, то их алгебры Ли в сумме дают всю алгебру Ли $\text{aff}(\mathbf{R})$ группы Ли $\text{Aff}(\mathbf{R})$. Поэтому мы получаем разложение (причем точное) алгебры Ли $\text{aff}(\mathbf{R})$. Но оно не глобализуемо, т. е. $G_0 \cdot G_1 \neq G$. Дело в том, что подгруппы Ли G_0, G_1 сопряжены. Но, как нетрудно понять, такие подгруппы не могут в произведении давать всю объемлющую их группу. В результате мы видим, что свойство глобализации разложений на треугольные алгебры Ли не переносится (в отличие от комплексного случая оно выполняется для некоторых других классов групп и алгебр Ли).

2. ТРАНЗИТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ НА МНОГООБРАЗИЯХ РАЗМЕРНОСТЕЙ 2 И 3

Здесь мы будем рассматривать транзитивные действия связных нильпотентных групп Ли на $\mathbf{R}^n$ при $n = 2, 3$. Отметим, что любое односвязное однородное пространство нильпотентной группы Ли диффеоморфно некоторому $\mathbf{R}^n$, поэтому можно сказать, что мы изучаем

односвязные однородные пространства нильпотентных групп Ли, имеющие размерность 2 или 3. Отметим также, что для любого однородного пространства многообразие, его универсально накрывающее, тоже всегда будет однородно (относительно группы Ли, универсально накрывающей исходную транзитивную группу Ли). Действия групп Ли мы будем предполагать локально эффективными. При этом мы выделим несократимые транзитивные действия, которые тесно связаны с разложениями (с отсутствиями таковых) нильпотентных групп Ли, которые были рассмотрены выше.

Впервые некоторое описание групп Ли, транзитивных на $\mathbf{R}^n$ при $n = 2, 3$, дал еще сам Софус Ли. Он описывал локальные действия и делал это в терминах алгебр Ли векторных полей (которые, как и сами действия, он предполагал аналитическими). Для $\mathbf{R}^2$ он дал полную (даже немного избыточную) классификацию локальных действий. Для трехмерного случая им были опубликованы только частичные результаты. В [8] было дано описание всех транзитивных действий на $\mathbf{C}^3$ неразрешимых групп Ли (тоже локально и тоже в терминах алгебр Ли векторных полей). Мы же здесь рассмотрим ту часть классификации действий групп Ли на $\mathbf{R}^3$, которая не была затронута до сих пор. Речь пойдет об описании транзитивных действий нильпотентных групп Ли. При этом придется ограничиться несократимыми действиями — минимальными среди транзитивных. Причина такого ограничения проста — задача описания всех транзитивных действий нильпотентных групп Ли на $\mathbf{R}^3$ является “дикий” задачей (в известном смысле этого слова).

Отметим, что если группа Ли, действующая на некотором многообразии M , разрешима, а некоторая ее орбита односвязна, то эта орбита обязательно диффеоморфна $\mathbf{R}^n$. При этом само многообразие не обязательно диффеоморфно евклидову пространству, даже если действие локально транзитивно (односвязная орбита может оказаться открытой областью в M). Однако если на односвязном многообразии M транзитивна разрешимая (например, как у нас ниже, нильпотентная) группа Ли, то M диффеоморфно евклидову пространству. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать транзитивные действия нильпотентных групп Ли на $\mathbf{R}^n$.

Начнем с одного утверждения о нильпотентных группах Ли, транзитивных на $\mathbf{R}^2$. В принципе его можно вывести из классификации таких действий, полученной Г. Мостовым ([9]) на основе классификации групп Ли, локально транзитивных на $\mathbf{R}^2$, данной еще С. Ли. Однако такое доказательство необходимого нам результата будет очень громоздко. Поэтому ниже приводится очень несложное прямое доказательство нужного нам результата (то же касается и доказанной ниже теоремы 2).

Напомним, что группа Ли называется почти абелевой, если она имеет абелев нормальный делитель коразмерности 1 (аналогично определение и почти абелевых алгебр Ли). Почти абелевы группы Ли всегда разрешимы. Односвязная почти абелева группа Ли G может быть представлена в виде полупрямого произведения $G = A \cdot B$ одномерной подгруппы Ли A (изоморфной $\mathbf{R}$) и абелева нормального делителя B коразмерности 1 (изоморфного $\mathbf{R}^k$, где $k = \dim G - 1$).

Предложение 2. Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, транзитивная и локально эффективная на двумерном многообразии. Тогда группа Ли N почти абелева.

Доказательство. Пусть $M = N/H$ — двумерное однородное пространство нашей нильпотентной группы Ли G .

Рассмотрим алгебры Ли n, h групп Ли N, H соответственно. Подалгебра Ли h имеет коразмерность 2 в n . Положим $f = N_n(h)$ — нормализатор (точнее идеализатор) подалгебры Ли h в n . Так как n нильпотентна, то $f \neq h$ (это мгновенно вытекает из теоремы Энгеля). Поэтому $f = n$ или же $\text{codim}_n f = 1$. Если $f = n$, то h — идеал в n . В силу локальной

эффективности действия N из этого следует $h = \{0\}$ и n — двумерная абелева алгебра Ли. Поэтому односвязная группа Ли N изоморфна $\mathbf{R}^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда f — подалгебра коразмерности 1 в n (и h — идеал коразмерности 1 в f).

В данном случае f — идеал в n (поскольку ее нормализатор совпадает с n). При этом $[f, f] \subset h$ (поскольку алгебра Ли f/h абелева). Так как f — идеал в n , а $[f, f]$ — характеристический идеал в f , то $[f, f]$ — идеал в n . Но $[f, f]$ содержится в h , и поэтому в силу локальной эффективности действия N на N/H будет $[f, f] = \{0\}$, т. е. идеал f абелев. Тем самым доказано, что n почти абелева. $\square$

Переходим к рассмотрению особого класса транзитивных действий, состоящих из минимальных (в некотором смысле) транзитивных действий.

Определение 3. Транзитивное действие группы Ли G на многообразии M называется несократимым, если в группе Ли G нет собственных подгрупп Ли (т. е. подгрупп Ли меньшей размерности), транзитивных на M .

Ясно, что описание несократимых действий полезно при попытках описания всевозможных транзитивных действий. При этом если $M = G/H$ — однородное пространство группы Ли G , то подгруппа Ли $G_1 \subset G$ транзитивна на M тогда и только тогда, когда $G = G_1 \cdot H$.

Условие несократимости транзитивного действия группы Ли нильпотентной группы Ли N на однородном пространстве N/H эквивалентно (как было отмечено выше) тому, что стационарная подалгебра h не имеет в алгебре Ли n группы Ли N дополнения или, что то же, не входит в виде слагаемого ни в какое разложение алгебры Ли n группы Ли N . Этим вопрос о транзитивных подгруппах Ли оказывается тесно связанным с рассматриваемым выше в данной статье вопросом о разложениях (нильпотентных) групп Ли.

В [1] были указаны группы Ли, которые могут несократимо действовать на многообразиях размерностей 2 и 3. При этом для двумерных многообразий имеется и более точное описание — в [9] указаны все группы Ли, транзитивные на двумерных многообразиях (поверхностях). В [1] рассмотрены трехмерные однородные многообразия, однако для разрешимых транзитивных групп Ли нет конкретизации. Здесь мы немного исправим этот недостаток.

Утверждение следующей теоремы 2 можно извлечь из содержания работы [9], но мы предпочтем не использовать классификации, а получать результаты прямыми рассуждениями.

Теорема 2. Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, транзитивная и локально эффективная на $\mathbf{R}^2$. Это транзитивное действие несократимо тогда и только тогда, когда группа Ли N изоморфна абелевой группе Ли $\mathbf{R}^2$.

Доказательство. Несократимость транзитивного действия группы Ли $\mathbf{R}^2$ на двумерном многообразии очевидна.

Покажем обратное утверждение. Пусть N/H — некоторое двумерное многообразие.

Подалгебра Ли h стационарной подгруппы Ли H в силу нашего предположения о локальной эффективности действия N имеет тривиальное пересечение с центром $Z(n)$ алгебры Ли n (который в силу нильпотентности алгебры Ли n нетривиален).

Предположим, что алгебра Ли n неабелева и подалгебра Ли h нетривиальна. Тогда, в частности, алгебра Ли n не совпадает со своим центром, который в силу сказанного выше в этом случае имеет размерность ≤ 2 .

Рассмотрим некоторый ненулевой элемент $Z \in Z(n)$ и подпространство $f = h + \mathbf{R}Z$. Ясно из соображений размерности, что $f \neq n$, и поэтому существует элемент $X \in n$, не

лежащий в f . Положим $u = \mathbf{R}X + \mathbf{R}Z$. Из центральности элемента Z вытекает, что u — подалгебра Ли. При этом в силу нашего выбора элемента X ясно, что имеем нетривиальное разложение $n = u + h$, наличие которого противоречит несократимости рассматриваемого нами транзитивного действия группы Ли N .

Полученное противоречие доказывает, что алгебра Ли n абелева, $h = \{0\}$, а односвязная односвязная Ли N изоморфна $\mathbf{R}^2$. $\square$

Из доказанного в теореме 2 следует, что в любой нильпотентной группе Ли, транзитивной и локально эффективной на двумерном многообразии M , существует абелева двумерная подгруппа Ли, транзитивная на M .

Рассмотрим теперь случай несократимых транзитивных действий нильпотентных групп Ли на $\mathbf{R}^3$. Здесь мы оказываемся в области, которую до сих пор не удалось исчерпать ни С. Ли, ни его последователям (вплоть до самых современных). Дело в том, что ситуация здесь оказывается “дикой” (в известном смысле этого слова, что отмечено и в [8]), хотя и допускает некоторое прояснение.

Теорема 3. Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, транзитивная и локально эффективная на $\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^3 = N/H$). Если это транзитивное действие несократимо, то имеют место следующие утверждения:

- 1) подгруппа $[N, N]$ абелева и коразмерности 2 в N или же $N = \mathbf{R}^3$,
- 2) $H_0 \subset [N, N]$ (в частности, связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы Ли H абелева),
- 3) если группа Ли N неабелева, то $H_0 \cdot Z(N) = [N, N]$ и $\dim Z(N) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi : n \rightarrow n/[n, n]$ с ядром $[n, n]$ на абелеву алгебру Ли $n_{ab} = n/[n, n]$ (абелианизацию алгебры Ли n). Как известно, для нильпотентной алгебры Ли n всегда $\dim n/[n, n] \geq 2$ (или, что то же, $\text{codim}_n[n, n] \geq 2$). Покажем, что для рассматриваемого нами транзитивного действия группы Ли N либо N абелева (и тогда она изоморфна $\mathbf{R}^3$), либо $\text{codim}_n[n, n] = 2$.

Предположим, что $\text{codim}_n[n, n] \geq 3$. Рассмотрим абелеву подалгебру $\pi(h)$ в n_{ab} . Так как $\dim N/H = 3$, то $\text{codim}_{n_{ab}}\pi(h) \leq 3$. Если $\text{codim}_{n_{ab}}\pi(h) = 3$, то должно быть $h = [n, n]$, и поэтому в силу локальной эффективности рассматриваемого транзитивного действия $h = \{0\}$ и N изоморфна $\mathbf{R}^3$. Поэтому $\text{codim}_n[n, n] = 2$.

Если $\pi(h) = n_{ab}$, то $h = n$ (поскольку нильпотентная алгебра Ли, как известно, порождается подпространством, дополнительным к коммутанту). Этот случай нам, конечно, не подходит. Если же $\pi(h) \neq n_{ab}$, то либо $n = n_{ab}$ абелева (и тогда N изоморфна $\mathbf{R}^3$), либо $h \subset [n, n]$, либо рассматриваемое нами транзитивное действие группы N можно сократить. Докажем последнюю часть этого утверждения (о возможности сокращения).

Пусть $\pi(h) \neq n_{ab}$ и $\pi(h) \neq \{0\}$ (т.е. h не содержится в $[n, n]$). Рассмотрим собственное подпространство $f \subset n_{ab}$ (подалгебра Ли в n_{ab}), дополнительное к $\pi(h)$ в n_{ab} . Тогда имеем разложение $n_{ab} = f + \pi(h)$ в прямую сумму двух нетривиальных подпространств (подалгебр абелевой алгебры Ли). Положим $n' = \pi^{-1}(f)$ — подалгебра Ли в n . Ясно, что $n = n' + h$, причем $n' \neq n$ (так как $\pi(n') \neq \pi(n) = n_{ab}$). Тем самым исходное транзитивное действие оказывается возможным сократить, что противоречит сделанному нами предположению о несократимости этого действия.

В результате получаем, что алгебра Ли n будет абелева (и тогда $n = \mathbf{R}^3$) или же $\text{codim}_n[n, n] = 2$ и $h \subset [n, n]$, чем доказано часть утверждения 1) (доказательство оставшейся части см. ниже) и часть утверждения 2). В частности, отметим, что если алгебра Ли n неабелева, то она имеет ровно две образующие.

Далее нам, как уже доказано выше, достаточно рассмотреть только случай, когда $h \subset [n, n]$.

Так как $\text{codim}_n[n, n] = 2$ и $\text{codim}_n h = 3$, то $\text{codim}_{[n, n]} h = 1$, и поэтому h — идеал коразмерности 1 в $[n, n]$. Но тогда $[[n, n], [n, n]]$ является идеалом алгебры Ли n , который содержится в h . В силу локальной эффективности действия N на N/H коммутант подалгебры $[n, n]$ должен быть тривиален, и поэтому $[n, n]$ — абелева алгебра Ли. В частности, стационарная подалгебра Ли h абелева. Этим завершено доказательство п. 2) и оставшейся части п. 1).

Переходим к рассмотрению п. 3).

Рассмотрим центр $Z(n)$ алгебры Ли n . Может оказаться, что $Z(n)$ не содержится в $[n, n]$. Но тогда n можно представить в виде прямой суммы $n_1 \oplus a$ некоторой нильпотентной алгебры Ли n_1 и нетривиальной абелевой алгебры Ли a . Однако в этом случае $\text{codim}_n[n, n]$ не может равняться 2, что противоречит для неабелевой n доказанному выше. Поэтому в дальнейшем мы будем считать (исключив тривиальный случай, когда $n = \mathbf{R}^3$), что $Z(n) \subset [n, n]$.

Так как действие N на N/H локально эффективно, то h имеет тривиальное пересечение с центром $Z(n)$. Центр нильпотентной алгебры Ли всегда нетривиален, поэтому получаем $h + Z(n) = [n, n]$, а также $\dim Z(n) = 1$. $\square$

Подробное описание фигурирующих в теореме 3 групп Ли (и соответствующих алгебр Ли) представляет собой возможным, но весьма громоздким. Оно должно быть связано, как в частности показано ниже, с изучением пар коммутирующих нильпотентных матриц.

Рассмотрим некоторые детали строения нильпотентных групп Ли, несократимо транзитивных на $\mathbf{R}^3$. Как доказано выше, неабелева алгебра Ли такой группы Ли имеет две образующие и абелев коммутант $[n, n]$. Поэтому $n = \text{span}(X, Y) + [n, n]$, где $\text{span}(X, Y)$ обозначает двумерное подпространство в n , порожденное двумя элементами $X, Y \in n \setminus [n, n]$. Через A, B обозначим линейные операторы (нильпотентные в силу нильпотентности n) на абелевой алгебре Ли $[n, n]$, которые являются ограничениями на $[n, n]$ линейных операторов ad_X, ad_Y . Положим также $Z = [X, Y]$. Ясно, что задание линейных операторов $A, B \in \text{gl}([n, n])$ и элемента $Z \in [n, n]$ полностью определяет структуру алгебры Ли на n . Покажем, что A и B перестановочны.

Имеем в силу тождества Якоби $[[A, B], U] = [[B, U], A] + [[U, A], B] = 0 + 0$ (так как коммутант $[n, n]$ — абелев идеал в n). Это и означает, что линейный оператор $[A, B]$ на $[n, n]$ тривиален. Поэтому описание алгебр Ли нашего класса должно включать в себя описание пар коммутирующих нильпотентных матриц. Но такого рода задача является, как известно, “дикий” (как видно из [10], где рассматриваются произвольные матрицы, но конструкция проходит и для нильпотентных). Конкретно для пар нильпотентных матриц см. [11].

До сих пор мы рассматривали транзитивные действия нильпотентных групп Ли на $\mathbf{R}^n$ при $n = 2, 3$. Вкратце рассмотрим теперь и более общий случай.

Рассмотрим ряд коммутантов

$$n = D^0(n) \supset D^1(n) = [n, n] \supset D^2(n) = [D^1(n), D^1(n)] \supset \dots$$

Классом разрешимости $r(n)$ алгебры Ли n называется такое наименьшее число r , что $D^r(n) = \{0\}$. Например, для абелевой алгебры Ли $r = 1$.

Теорема 4. Пусть $M = N/H$ — однородное пространство нильпотентной группы Ли N , причем ее действие на M несократимо. Тогда класс разрешимости $r(N)$ этой группы Ли не превосходит числа $t = \dim M$.

Доказательство. Рассмотрим следующие числа:

$$d_k = \dim D^k(n)/D^{k+1}(n) \text{ и } e_k = \dim D^k(n) \cap h/D^{k+1} \cap h.$$

Если для некоторого k_0 имеем $e_{k_0} = d_{k_0}$, то $D^{k_0} \cap h$ порождает нильпотентную алгебру Ли $D^{k_0}(n)$, и поэтому $h \supset D^{k_0}(n)$. Значит, в силу локальной эффективности действия N на N/H должно быть $D^{k_0}(n) = \{0\}$ и $k_0 \geq r(n)$. Итак, для нескольких первых значений индекса k будут иметь место неравенства $d_k > e_k$, но это может быть не более чем m раз, и поэтому $k_0 \leq m$. Получаем $r(n) \leq m$. $\square$

В силу этого результата класс разрешимости транзитивной несократимой нильпотентной группы Ли N ограничен. Но вот класс нильпотентности транзитивной группы N , начиная с $\dim M = 3$, может быть сколь угодно велик.

Автор благодарен рецензенту за указание способов улучшения и уточнения изложения результатов в статье.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горбацевич В.В. *О трехмерных однородных пространствах*, Сиб. матем. журн. **18** (2), 280–293 (1977).
- [2] Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищик А.Л. *Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления **41**, 5–253 (ВИНИТИ, М., 1990).
- [3] Онищик А.Л. *Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований*, Тр. Моск. матем. о-ва **11**, 199–242 (1962).
- [4] Мальцев А.И. *Об одном классе однородных пространств*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **13** (1), 9–32 (1949).
- [5] Agore A.L., Militaru G. *Classifying complements for Hopf algebras and Lie algebras*, J. Algebra (391), 193–208 (2013).
- [6] Онищик А.Л. *Разложения редуктивных групп Ли*, Матем. сб. **80** (4), 553–599 (1969).
- [7] Малышев Ф.М. *О разложениях нильпотентных алгебр Ли*, Матем. заметки **23** (1), 27–30 (1978).
- [8] Doubrov V. *Three-dimensional homogeneous spaces with non-solvable transformation groups*, ArXiv 1704.04393v1.
- [9] Mostow G. *The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces*, Ann. Math. **52**, 606–636 (1950).
- [10] Гельфанд И.М., Пономарев В.А. *Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве*, Функц. анализ и его прил. **3** (4), 81–82 (1969).
- [11] Belitskii G.R., Sergeichuk V.V. *Complexity of matrix problems*, Linear Algebra Appl. **361**, 203–222 (2003).

Владимир Витальевич Горбацевич

Москва, Россия,

e-mail: vgorvich@yandex.ru

V.V. Gorbatsевич

On decompositions and transitive actions of nilpotent Lie groups

Abstract. The article considers decompositions of nilpotent Lie algebras and nilpotent Lie groups, and connections between them. Also, descriptions of irreducible transitive actions of nilpotent Lie groups on the plane and on three-dimensional space are given.

Keywords: nilpotency, Lie group, Lie algebra, decomposition, exact decomposition.

Vladimir Vitalyevich Gorbatsевич

Moscow, Russia,

e-mail: vgorvich@yandex.ru