Известия вузов. Математика
2024, № 3, с. 91–96

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Т.Х. РАСУЛОВ, Д.Э. ИСМОИЛОВА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ В ФЕРМИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Аннотация. Рассматривается матричная модель $\mathcal{A}$, связанная с системой, описывающей два одинаковых фермиона и одну частицу иной природы на решетке, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. Задача об изучении спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ приведена к исследованию спектра блочно-операторной матрицы третьего порядка с дискретным переменным и установлены соотношения для существенного и точечного спектров блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Выделены двухчастичные и трехчастичные ветви существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Ключевые слова: матричная модель, фермион, пространство Фока, спектр, существенный спектр, точечный спектр, оператор рождения, оператор уничтожения.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-91-96

Введение

В задачах физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физики [3] и квантовой механики [4] обычно возникают системы с несохраняющимся ограниченным или неограниченным числом квантовых частиц на целочисленной решетке. При этом исследование гамильтонианов системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц сводится к исследованию спектральных свойств самосопряженных операторов, действующих в обрезанном подпространстве пространства Фока. Следует заметить, что в данном случае такие гамильтонианы записываются как конечномерная блочно-операторная матрица, т. е. как конечномерная матрица, элементы которой являются линейными операторами в гильбертовых пространствах [5]. В случае неограниченного числа частиц соответствующий гамильтониан определяет бесконечную блочно-операторную матрицу.

Одним из важных вопросов в спектральном анализе блочно-операторных матриц является изучение его существенного спектра и определение их ветви, а также определение количества компонент. В работе [6] рассматривается модельный оператор, действующий в некотором подпространстве бозонного пространства Фока и описано местоположение существенного спектра (т. е. выделены "двухчастичные" и "трехчастичные" ветви существенного спектра). Местоположение и структура существенного спектра, а также число собственных значений решетчатых модельных гамильтонианов, соответствующих системе с сохраняющимся числом частиц, были изучены в работах [7]–[9].

Поступила в редакцию 11.11.2023, после доработки 11.11.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

В настоящей статье рассматривается блочно-операторная матрица $\mathcal{A}$ третьего порядка, которая связана с системой, описывающей два одинаковых фермиона и одну частицу иной природы на решетке, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. Устанавливаются соотношения для существенного и точечного спектров блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Выделены двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Показано, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ состоит из объединения не более, чем шести отрезков. Приведены схемы доказательств основных результатов.

1. Описание матричной модели в фермионном пространстве Фока и его спектр

Через $\mathbb{T}^{\rm d}:=(-\pi,\pi]^{\rm d}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0:=\mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1:=L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\rm d}$ и $\mathcal{H}_2:=L_2^{\rm as}((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ — гильбертово пространство (комплекснозначных) антисимметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$. Положим

$$\mathcal{F}_{\rm as}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d})):=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\quad \mathcal{F}_{\rm as}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d})):=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2.$$

Пространство $\mathcal{F}_{\rm as}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$ $(m=1,2)$ называется “$(m+1)$-частичным обрезанным” подпространством фермионного пространства Фока $\mathcal{F}_{\rm as}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$. Элементы пространства $\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}_{\rm as}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$ представляются как векторы

$$f=\left\{f_0^{(\rm s)},\ \ f_1^{(\rm s)},\ \ f_2^{(\rm s)},{\rm s}=\pm\right\},\ \text{где } f_\alpha\in\mathcal{H}_\alpha,\ \ \alpha=0,1,2.$$

Для двух элементов

$$f=\left\{f_0^{(\rm s)},f_1^{(\rm s)},f_2^{(\rm s)},{\rm s}=\pm\right\},\quad g=\left\{g_0^{(\rm s)},g_1^{(\rm s)},g_2^{(\rm s)},{\rm s}=\pm\right\}\in\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}_{\rm as}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$$

их скалярное произведение определяется как

$$\langle f,g\rangle:=\sum_{{\rm s}=\pm}\left(f_0^{(\rm s)}\overline{g_0^{(\rm s)}}+\int_{\mathbb{T}^{\rm d}}f_1^{(\rm s)}(k_1)\overline{g_1^{(\rm s)}(k_1)}dk_1+\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^{\rm d})^2}f_2^{(\rm s)}(k_1,k_2)\overline{g_2^{(\rm s)}(k_1,k_2)}dk_1dk_2\right).$$

В гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}_{\rm as}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0\\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{12}^* & A_{22}\end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00}f_0^{(\rm s)}={\rm s}\varepsilon f_0^{(\rm s)},\quad \mathcal{A}_{01}f_1^{(\rm s)}=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\rm d}}v(t)f_1^{(-\rm s)}(t)dt,$$

$$\left(\mathcal{A}_{11}f_1^{(\rm s)}\right)(k_1)=({\rm s}\varepsilon+w(k_1))f_1^{(\rm s)}(k_1),\quad \left(\mathcal{A}_{12}f_2^{(\rm s)}\right)(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\rm d}}v(t)f_2^{(-\rm s)}(k_1,t)dt,$$

$$\left(\mathcal{A}_{22}f_2^{(\rm s)}\right)(k_1,k_2)=({\rm s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2))f_2^{(\rm s)}(k_1,k_2).$$

Здесь $\left\{f_0^{(\rm s)},f_1^{(\rm s)},f_2^{(\rm s)},{\rm s}=\pm\right\}\in\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}_{\rm as}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\rm d}))$, ε — фиксированное вещественное число, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\rm d}$, а $\alpha>0$ — “параметр взаимодействия”.

С целью изучения спектральных свойств блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ наряду с этим оператором рассмотрим еще следующие два ограниченных самосопряженных оператора $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, которые действуют в $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как 3×3-блочно-операторные матрицы

$$\mathcal{A}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0 = \mathrm{s}\varepsilon f_0, \quad \widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)dt,$$

$$\Big(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1\Big)(k_1) = (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1), \quad \Big(\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2\Big)(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1,t)dt,$$

$$\Big(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2\Big)(k_1,k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2(k_1,k_2), \quad (f_0,f_1,f_2) \in \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Можно легко проверить, что

$$(A_{01}^{*} f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0,\ (A_{12}^{*} f_1)(k_1,k_2) = \alpha \left(v(k_1) f_1(k_2) - v(k_2) f_1(k_1)\right),$$

$$(f_0,f_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Для удобства через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{pp}}(\cdot)$ обозначим спектр, существенный спектр и точечный спектр ограниченного самосопряженного оператора соответственно.

Теперь установим связь между спектрами блочно-операторных матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$.

Теорема 1. *Для спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}^{(+)}) \cup \sigma(\mathcal{A}^{(-)})$. Кроме того, для существенного, точечного и дискретного спектров блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ имеем*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(+)}\big) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(-)}\big), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}\big(\mathcal{A}^{(+)}\big) \cup \sigma_{\mathrm{p}}\big(\mathcal{A}^{(-)}\big),$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}) = \Big\{\sigma_{\mathrm{disc}}\big(\mathcal{A}^{(+)}\big) \cup \sigma_{\mathrm{disc}}\big(\mathcal{A}^{(-)}\big)\Big\} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}).$$

Схема доказательства.

Шаг 1. Вводится оператор перестановки

$$\Phi : \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \to \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) \oplus \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),$$

$$\Phi : \Big(f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}\Big) \to \Big(f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_2^{(-)}\Big),$$

и показывается, что Φ — унитарный оператор.

Шаг 2. Доказывается, что

$$\Phi \mathcal{A} \Phi^{-1} = \mathrm{diag}\Big\{\mathcal{A}^{(+)}, \mathcal{A}^{(-)}\Big\}.$$

Шаг 3. Используется теорема о спектре унитарно эквивалентных операторов, а также о спектре диагональной блочно-операторной матрицы второго порядка.

Аналогичный результат получен в работах [10], [11] для решетчатой модели спин-бозонов с не более чем двумя фотонами (действующей в бозонном пространстве Фока).

2. Ветви существенного спектра матричной модели в фермионном пространстве Фока

Для описания существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ и для определения его ветви рассмотрим следующие два ограниченных самосопряженных операторов $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, которые действуют в $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как 2×2-блочно-операторные матрицы

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}.$$

Далее из известной теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ справедливо равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}\big) = [-\mathrm{s}\varepsilon + m, -\mathrm{s}\varepsilon + M],$$

где

$$m := \min_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k_1), \quad M := \max_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(k_1).$$

Введем регулярную в $\mathbb{C}\setminus[-\mathrm{s}\varepsilon + m, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$ функцию, так называемую определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$:

$$\Delta^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(t) - z}.$$

Можно легко проверить, что число $z^{(\mathrm{s})} \in \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}\big)$ является собственным значением блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ тогда и только тогда, когда $\Delta^{(\mathrm{s})}(z^{(\mathrm{s})}) = 0$. Следовательно,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}\big) = \Big\{ z \in \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) :\ \Delta^{(\mathrm{s})}(z) = 0 \Big\}.$$

Обозначим

$$\sigma^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \Big\{ w(p) + \sigma_{\mathrm{disc}}\big(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}\big) \Big\}, \quad \Sigma^{(\mathrm{s})} := \sigma^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon + 2m, \mathrm{s}\varepsilon + 2M].$$

Для $\alpha = 1, 2$ через $I^{(\alpha)}$ обозначим единичный оператор в $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(\alpha)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$.

Местоположение существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}_2$ описывает

Теорема 2. *Существенный спектр блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ совпадает с множеством $\Sigma^{(+)}\cup\Sigma^{(-)}$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \Sigma^{(+)}\cup\Sigma^{(-)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ представляет собой объединение не более чем шести отрезков.*

Схема доказательства.

Шаг 1. Доказывается включение $\Sigma^{(\mathrm{s})} \subset \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big)$. При доказательстве этого факта берется произвольная точка $z_0 \in \Sigma^{(\mathrm{s})}$ и пользуясь критерием Вейля [12] показывается, что $z_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big)$, т. е. строится последовательность ортонормированных вектор-функций $\big\{f^{(n)}\big\} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}\big(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\big)$, для которых $\big\|\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})} - z_0 I^{(2)}\big) f^{(n)}\big\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Шаг 2. Доказывается обратное включение, а именно, $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) \subset \Sigma^{(\mathrm{s})}$. Для этого при каждом $z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma^{(\mathrm{s})}$ вводится блочно-операторная матрица $T^{(\mathrm{s})}(z)$, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}\big(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\big)$ как

$$T^{(\mathrm{s})}(z) := \begin{pmatrix} T_{00}^{(\mathrm{s})}(z) & T_{01}^{(\mathrm{s})}(z) \\ T_{10}^{(\mathrm{s})}(z) & T_{11}^{(\mathrm{s})}(z) \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$T_{00}^{(\mathrm{s})}(z)g_0 = (1 + z - \mathrm{s}\varepsilon)g_0, \quad T_{01}^{(\mathrm{s})}(z)g_1 = -\alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)g_1(t)dt,$$

$$\big(T_{10}^{(\mathrm{s})}(z)g_0\big)(k_1) = -\frac{\alpha v(k_1)g_0}{\Delta^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))},$$

$$\big(T_{11}^{(\mathrm{s})}(z)g_1\big)(k_1) = -\frac{\alpha^2 v(k_1)}{\Delta^{(-\mathrm{s})}(z - w(k_1))} \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v(t)g_1(t)dt}{\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(t) - z}, \quad (g_0, g_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}\big(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\big).$$

Устанавливается, что число $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma^{(\mathrm{s})}$ является собственным значением блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$ тогда и только тогда, когда блочно-операторная матрица $T^{(\mathrm{s})}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают. Пользуясь аналитической теоремой Фредгольма ([12], теорема XIII.13) заключается, что операторнозначная функция $\big(I^{(1)} - T^{(\mathrm{s})}(z)\big)^{-1}$ существует на $\mathbb{C} \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})}$ всюду, за исключением дискретного множества $\mathcal{M}$, где она имеет вычеты конечного ранга. Это означает, что $\sigma\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})}$ состоит только из изолированных точек, которые могут иметь предельные точки только в граничных точках множества $\Sigma^{(\mathrm{s})}$. Следовательно, $\sigma\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})} \subset \sigma\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big)$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) \subset \Sigma^{(\mathrm{s})}$. В итоге получается равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big) = \Sigma^{(\mathrm{s})}$.

Шаг 3. Доказывается, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big)$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Сначала пользуясь свойством монотонности функции $\Delta^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ убедимся, что блочно-операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне отрезка $[\mathrm{s}\varepsilon + 2m, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$. Так как функция $w(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, множество $\sigma^{(\mathrm{s})} = \cup_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\big\{w(p) + \sigma_{\mathrm{disc}}\big(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}\big)\big\}$ состоит из объединения не более чем двух отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}\big)$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Далее, пользуясь утверждениями теоремы 1 можно завершить доказательство теоремы 2.

Теперь введем новые подмножества существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$: множества $\sigma^{(+)} \cup \sigma^{(-)}$ и $[-\varepsilon + 2m, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon + 2m, \varepsilon + 2M]$ называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ соответственно.

Заключение

В данной работе исследуются соотношения для существенного спектра и точечного спектра одной блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ третьего порядка. При этом блочно-операторная матрица $\mathcal{A}$ связана с системой, описывающей два одинаковых фермиона и одну частицу иной природы на решетке, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. Описаны двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Установлено, что существенный спектр блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ состоит из объединения не более, чем шести отрезков. Приведены схемы доказательств основных результатов, которые играют важную роль при дальнейших исследованиях спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Литература

[1] Mogil'ner A.I. *Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*, Adv. Soviet. Math. (5), 139–194 (1991).

[2] Friedrichs K.O. *Perturbation of spectra in Hilbert space,* Lect. Appl. Math. **3**, Amer Math. Soc. (Providence, R.I., 1965).

[3] Malyshev V.A., Minlos R.A. *Linear infinite-particle operators* **143** Amer. Math. Soc. (1995).
[4] Thaller B. *The Dirac equation.* Texts and Monographs in Physics (Springer–Verlag, Berlin, 1992).
[5] Tretter C. *Spectral theory of block operator matrices and applications* (Imperial College Press, London, 2008).
[6] Расулов Т.Х. *Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–69 (2008).
[7] Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. *Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана*, Изв. вузов. Матем. (7), 3–12 (2023).
[8] Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Расулов Т.Х. *Инвариантные подпространства и собственные значения трехчастичного оператора Шрёдингера*, Изв. вузов. Матем. (9), 3–19 (2023).
[9] Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. *Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Изв. вузов. Матем. (1), 61–70 (2014).
[10] Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case.*, J. Math. Phys. **56**, 053507 (2015).
[11] Расулов Т.Х. *О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами*, ТМФ **186** (2), 293–310 (2016).
[12] Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics.* IV: *Analysis of operators* (Acad. Press, New York, 1982).

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Дилдора Эркиновна Исмоилова

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: d.e.ismoilova@buxdu.uz

T.Kh. Rasulov and D.E. Ismoilova

Spectral relations for a matrix model in fermionic Fock space

Abstract. We consider a matrix model $\mathcal{A}$, related to a system describing two identical fermions and one particle of another nature on a lattice, interacting via annihilation and creation operators. The problem of the study of the spectrum of a block operator matrix $\mathcal{A}$ is reduced to the investigation of the spectrum of block operator matrices of order three with a discrete variable, and relations for the spectrum, essential spectrum and point spectrum are established. Two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of the block operator matrix $\mathcal{A}$ are singled out.

Keywords: matrix model, fermion, Fock space, spectrum, essential spectrum, point spectrum, creation operator, annihilation operator.

Tulkin Khusenovich Rasulov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Dildora Erkinovna Ismoilova

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: d.e.ismoilova@buxdu.uz