Известия вузов. Математика
2024, № 3, с. 84–90

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

С.К. ВОДОПЬЯНОВ, Д.А. СБОЕВ

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТЬ СНИЗУ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСКАЖЕНИЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ $(1, \sigma)$-ВЕСОВЫМ (Q, P)-ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ КАРНО

Аннотация. В данной работе изучается локально равномерная сходимость гомеоморфизмов с ограниченным $(1, \sigma)$-весовым (q, p)-искажением к предельному гомеоморфизму. При некоторых дополнительных условиях доказано, что предельный гомеоморфизм — отображение с ограниченным $(1, \sigma)$-весовым (q, p)-искажением. Более того, получено свойство полунепрерывности снизу характеристик искажения гомеоморфизмов.

Ключевые слова: полунепрерывность снизу, гомеоморфизм с ограниченным $(1, \sigma)$-весовым (q, p)-искажением, группа Карно.

УДК: 517.518: 517.548

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-84-90

Основы теории *отображений с ограниченным искажением* были заложены в 60-ые гг. прошлого века в работах Ю.Г. Решетняка. Он исследовал отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяющие условию

$$|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x, \varphi)$$

для некоторого числа $1 \leq K < \infty$, где $D\varphi(x)$ — матрица Якоби, а $J(x, \varphi)$ — ее определитель. Наименьшая константа K в неравенстве выше называется *коэффициентом внешнего искажения* и обозначается символом $K_O(\varphi)$. Описание свойств этого класса и детальную библиографию можно найти в монографии [1] (см. также [2], [3]). Отображения с ограниченным искажением являются естественным обобщением аналитических функций. В частности, справедлив аналог классического результата теории функций о том, что предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций также будет аналитической функцией. А именно, справедлива

Теорема 1 ([1], § 9.2)**.** *Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится локально в $L_n(\Omega)$ к отображению φ_0. Предположим также, что последовательность коэффициентов внешнего искажения $\{K_O(\varphi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда φ_0 является отображением с ограниченным искажением и*

$$K_O(\varphi_0) \leq \varliminf_{j\to\infty} K_O(\varphi_j).$$

Поступила в редакцию 18.12.2023, после доработки 18.12.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Благодарности. Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РНФ, проект № 23-21-00359.

В ([3], гл. VI, § 8) теорема 1 доказана при более сильном предположении: вместо сходимости в $L_{n,\mathrm{loc}}$ рассматривается локально равномерная сходимость. В статье [4] установлено обобщение теоремы 1 на группах Карно.

Теорема 2 ([4], теорема 1)**.** *Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\varphi_k\colon \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, сходится локально равномерно к непостоянному отображению $\varphi_0\colon \Omega \to \mathbb{G}$ при $k \to \infty$ и последовательность $K_O(\varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, коэффициентов искажения ограничена сверху. Тогда предел φ_0 является отображением с ограниченным искажением и справедливы неравенства*

$$K_O(\varphi_0) \le \varliminf_{k\to\infty} K_O(\varphi_k), \quad K_I(\varphi_0) \le \varliminf_{k\to\infty} K_I(\varphi_k).$$

Здесь *коэффициент внутреннего искажения* $K_I(\varphi)$ — наименьшая постоянная K', удовлетворяющая неравенству

$$J(x,\varphi) \le K'\Big(\inf_{\xi\in V_1,\,\rho(\xi)=1} \rho(D_h\varphi(x)(\xi))\Big)^{\nu} \quad \text{для п. в. } x \in \Omega.$$

Обзор разного рода обобщений сформулированных теорем в евклидовом пространстве приведен в работе [5].

В настоящей статье мы распространяем сформулированные выше результаты на более широкий класс отображений и впервые вовлекаем в рассмотрение отображения, ассоциированные с весовыми классами Соболева на группах Карно.

1. Предварительные сведения

Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной нильпотентной группой Ли* или *группой Карно* (см., например, [6]–[8]) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ нетривиальных подпространств $\mathfrak{g}_i$, удовлетворяющих условиям

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \text{ и } [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}.$$

Фиксируем левоинвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1 = H\mathbb{G}$ — *горизонтальное пространство* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальные векторные поля.* Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Мы будем писать n вместо n_1. Зафиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение $g = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}X_{ij}\right)(e)$ (где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм, мы можем отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ, заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, +\infty)$ такая, что

a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

b) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda\rho(x)$.

Свойства однородных норм см., например, в [7], [8].

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i\, n_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Символом $|E|$ обозначается мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$.

Пример. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$ с групповой операцией

$$(x,y,t)*(x',y',t') = \left(x+x', y+y', t+t' + \frac{x\cdot y' - x'\cdot y}{2}\right), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^n,\ t,t' \in \mathbb{R},$$

— классический пример неабелевой группы Карно. Ее алгебра Ли $\mathfrak{h}^n$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1,\dots,n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^n = \operatorname{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1,\dots,n\}$, $\mathfrak{h}_2^n = \operatorname{span}\{T\}$, а нетривиальными скобками Ли являются $[X_i, Y_i] = T$, $i = 1,\dots,n$. Однородная размерность $\mathbb{H}^n$ равна $\nu = 2n+2$.

Отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ — область: связное открытое множество в $\mathbb{G}$. Пространство $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, состоит из измеримых функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-й степени. Норма $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ в $L_p(\Omega)$ определяется стандартным образом. Говорим, что $u \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1,\dots,X_n$ образуют базис горизонтального пространства $H\mathbb{G}$, и пусть Π_j — гиперплоскость $x_j = 0$, $j = 1,\dots,n$. Мера $\mu_j = \imath(X_j)\,dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\gamma_j(y,t) = \exp(tX_j)(y)$. Говорим, что отображение $\varphi\colon \Omega \to M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M *абсолютно непрерывно на линиях*, $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; M)$, если для каждого $j = 1,\dots,n$ оно абсолютно непрерывно на $\gamma_j(y) \cap \Omega$ для μ_j-п. в. $y \in \Pi_j$. Отображение φ *абсолютно непрерывно на линии* $\gamma_j(y)\cap\Omega$, если кривая $t \mapsto \varphi\circ\gamma_j(y,t) \in M$ абсолютно непрерывна на области определения.

Пространство Соболева $L_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, состоит из функций $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{R})$ таких, что $X_j u \in L_p(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$. Здесь $X_j u$ — *горизонтальная производная*

$$X_j u(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(x\exp(tX_j)).$$

Если горизонтальные производные существуют и непрерывны для всех $j = 1,\dots,n$, то функция u принадлежит классу C_h^1. Полунорма функции $u \in L_p^1$ равна $\|u \mid L_p^1(\Omega)\| = \big\| |\nabla_h u| \big\|_{p,\Omega}$, где $\nabla_h u = (X_1 u,\dots,X_n u)$ — *горизонтальный градиент* u. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j\varphi(x) \in H\widetilde{\mathbb{G}}$ для п. в. $x \in \Omega$ ([9], предложение 4.1). Матрица $D_h\varphi(x) = (X_i\varphi_j)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,\widetilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h\varphi(x) : H\mathbb{G} \to H\widetilde{\mathbb{G}}$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ. Известно ([10], теорема 1.2), что для п. в. $x \in \Omega$ отображение $D_h\varphi(x)$ может быть продолжено до гомоморфизма алгебр Ли $\widehat{D}\varphi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\widehat{D}\varphi : T_x\mathbb{G} \to T_{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$\big|D_h\varphi(x)\big| \leq \big|\widehat{D}\varphi(x)\big| \leq C\big|D_h\varphi(x)\big|,$$

где C зависит только от структур групп. Последнему гомоморфизму также соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathcal{P}}\varphi = \widetilde{\exp}\circ\widehat{D}\varphi\circ\exp^{-1} : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [10]. Для отображений $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ класса ACL верна формула замены переменной в интеграле Лебега (см. детали в [10], теоремы 1.1, 5.3). Для п. в. $x \in \Omega$ якобиан в точке равен величине $|\det D_{\mathcal{P}}\varphi(x)| = \lim\limits_{B(y,r)\ni x,\, r\to 0} \dfrac{|\varphi(B(y,r))|}{|B(y,r)|}$. Более того, существует множество

$\Sigma_\varphi \subset \mathbb{G}$ нулевой меры такое, что вне этого множества отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, т. е. образ множества нулевой меры Лебега есть множество нулевой меры.

Класс Соболева $W^1_p(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$ состоит из отображений $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$ таких, что величина

$$\|\varphi \mid W^1_p(\Omega)\| = \|\widetilde{\rho}\circ\varphi\|_{p,\Omega} + \big\|\,|D_h\varphi|\,\big\|_{p,\Omega}$$

конечна. Здесь $|D_h\varphi|$ — норма оператора $D_h\varphi\colon H\mathbb{G}\to H\widetilde{\mathbb{G}}$, $\widetilde{\rho}$ — однородная норма на $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Говорим, что $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W^1_p(U;\widetilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$. Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в ([10], предложение 4.2).

Гомеоморфизмы с ограниченным искажением. Локально суммируемая функция $\sigma\colon\Omega\to\mathbb{R}$ называется *весовой функцией*, если соотношение $0<\sigma(x)<\infty$ выполнено для п. в. $x\in\Omega$. Для измеримого множества $U\subset\Omega$ положим $\sigma(U)=\int\limits_U \sigma(x)\,dx$.

Напомним, что функция $u\colon\Omega'\to\mathbb{R}$ принадлежит *весовому классу Соболева* $L^1_p(\Omega',\sigma)$, $p\in[1,\infty)$, если $u\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и обобщенные производные вдоль горизонтальных векторных полей (определение обобщенных производных предполагает, что $X_ju\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$) X_ju принадлежат $L_p(\Omega',\sigma)$ для любого $j=1,\dots,n$, где X_j — базис горизонтального пространства $H\mathbb{G}$. Полунорма функции $u\in L^1_p(\Omega',\sigma)$ определяется следующим образом:

$$\|u \mid L^1_p(\Omega',\sigma)\| = \Bigg(\int\limits_{\Omega'} |\nabla_h u|^p\sigma\,dx\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. Отображение $\varphi\colon\Omega\to\mathbb{G}$ в группе Карно называется *гомеоморфизмом с ограниченным* $(1,\sigma)$*-весовым* (q,p)*-искажением,* $1<q\le p<\infty$, если

1) φ — гомеоморфизм;
2) $\varphi\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$;
3) гомеоморфизм φ имеет *конечное искажение*: $D_h\varphi(x)=0$ почти всюду на множестве нулей якобиана $Z=\{x\in\Omega\mid \det_{\mathcal{P}} D\varphi(x)=0\}$;
4) операторная функция искажения

$$\Omega\ni x\mapsto K^{1,\sigma}_{q,p}(x,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{|D_h\varphi(x)|}{\sigma(\varphi(x))^{\frac{1}{p}}|\det_{\mathcal{P}} D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D_{\mathcal{P}}\varphi(x)\neq 0;\\ 0, & \text{если } \det D_{\mathcal{P}}\varphi(x)=0,\end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, $\dfrac{1}{\varkappa}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$ $\quad(\varkappa=\infty$ при $p=q)$.

Обозначим $K^{1,\sigma}_{q,p}(\varphi;\Omega)=\|K^{1,\sigma}_{q,p}(\cdot,\varphi)\mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

Отметим, что множество $Z_\sigma=\{x\in\Omega\mid \sigma(\varphi(x))\det D_{\mathcal{P}}\varphi(x)=0\}$ отличается от Z на множество меры нуль, поэтому определение операторной функции искажения корректно.

Класс гомеоморфизмов с ограниченным $(1,\sigma)$-весовым (p,q)-искажением тесно связан с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева [11].

Теорема 3 ([11], теорема 2)**.** *Гомеоморфизм* $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$ *областей в произвольной группе Карно* $\mathbb{G}\supset\Omega,\Omega'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*\colon L^1_p(\Omega',\sigma)\cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega')\to L^1_q(\Omega),\quad 1<q\le p<\infty,$$

однородных весовых пространств Соболева по правилу $\varphi^*(g) = g\circ\varphi$ тогда и только тогда, когда φ — гомеоморфизм с ограниченным $(1,\sigma)$-весовым (q,p)-искажением.

При этом норма $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $K^{1,\sigma}_{q,p}(\varphi;\Omega)$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{q,p}\|K^{1,\sigma}_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|K^{1,\sigma}_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\|.$$

Замечание. Отметим, что теорема 3 верна в случае, когда рассматривается оператор композиции пространств

$$\varphi^*\colon L^1_p(\Omega',\sigma)\cap C^1_h(\Omega') \to L^1_q(\Omega).$$

В работе мы применяем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть Ω — область в группе Карно $\mathbb{G}$ и $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная в $L_1(\Omega)$ последовательность функций. Тогда существует счетный набор измеримых множеств E_n такой, что $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, подпоследовательность $\{f_{k_j}\}$ и функция $f \in L_1(\Omega)$ такие, что*

$$\int\limits_{E_n} f_{k_j} h\,dx \to \int\limits_{E_n} f h\,dx \tag{1}$$

для всех $h \in L_\infty(E_n)$ с компактным носителем в Ω.

Лемма 1 — следствие основного свойства кусочной сходимости [12]–[14]. Лемма 1 содержит также определение кусочной сходимости на компактно вложенных подобластях.

Также нам понадобится

Лемма 2. *Пусть ограниченная в $L^1_q(\Omega)$ последовательность непрерывных функций $u_k \in L^1_q(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$, сходится локально равномерно к u_0. Тогда $u_0 \in L^1_q(\Omega)$ и существует подпоследовательность последовательности u_k, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся слабо в $L^1_q(\Omega)$ к u_0.*

Сформулируем свойство полунепрерывности интеграла энергии из работы [4] в случае, когда отображения действуют в группу Карно $\mathbb{G}$.

Теорема 4 ([4], § 4, теорема 9)**.** *Пусть $1 < q < \infty$ и φ_k — произвольная последовательность отображений класса $W^1_q(\Omega;\mathbb{G})$, сходящаяся в $L_1(\Omega;\mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{G}$. Если последовательность $\int\limits_{\Omega} |D_h\varphi_k|^q\,dx$ ограничена, то $\varphi \in W^1_q(\Omega;\mathbb{G})$. Более того, для некоторой подпоследовательности φ_{k_j} соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} \alpha(x)|D_h\varphi(x)|^q\,dx \leq \varliminf_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} \alpha(x)|D_h\varphi_{k_j}(x)|^q\,dx$$

выполняется для любой неотрицательной ограниченной измеримой функции $\alpha\colon \Omega\to\mathbb{R}$.

Используя данную теорему, нетрудно получить

Следствие. Пусть $1 < q < \infty$ и φ_k — произвольная последовательность отображений класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, сходящаяся локально равномерно к отображению $\varphi_0 \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$. Если последовательность $\int\limits_{E} |D_h\varphi_k|^q\,dx$ ограничена для каждого измеримого множества $E \Subset$

Ω, то для некоторой подпоследовательности φ_{k_j} выполнено

$$\int\limits_E |D_h\varphi(x)|^q\,dx \le \varliminf_{j\to\infty} \int\limits_E |D_h\varphi_{k_j}(x)|^q\,dx$$

для произвольного измеримого множества $E \Subset \Omega$.

2. Полунепрерывность снизу коэффициентов искажения $K_{q,p}^{1,\sigma}$

Ниже, в теореме 5 Ω, Ω' — области в группе Карно $\mathbb{G}$.

Теорема 5. *Пусть последовательность гомеоморфизмов $\varphi_k\colon \Omega \to \Omega'$ с ограниченным $(1,\sigma)$-весовым (q,p)-искажением, $1 < q \le p < \infty$, локально равномерно сходится к гомеоморфизму $\varphi_0\colon \Omega \to \Omega'$. Предположим также, что*

1) *существует ограниченная в $L_\varkappa(\Omega)$ последовательность функций $M_k \in L_\varkappa(\Omega)$, $\dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, такая, что $K_{q,p}^{1,\sigma}(x,\varphi_k) \le M_k(x)$ для п. в. $x \in \Omega$, если $q < p$;*
2) *существует ограниченная последовательность $M_k > 0$ такая, что $K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k;\Omega) \le M_k$, если $q = p$.*

Тогда существует функция $M \in L_\varkappa(\Omega)$ такая, что некоторая подпоследовательность функций $M_k^\varkappa$ сходится в смысле (1) к $M^\varkappa$, если $q < p$. Более того, предельный гомеоморфизм φ_0 является отображением с ограниченным $(1,\sigma)$-весовым (q,p)-искажением, причем

1) *$K_{q,p}^{1,\sigma}(x,\varphi_0) \le M(x)$ для п. в. $x \in \Omega$, если $q < p$;*
   и, кроме того,
2) *$K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_0;\Omega) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k;\Omega)$, если $q = p$.*

Литература

[1] Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением* (Наука, Н., 1982).
[2] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations* (Oxford Univ. Press, New York, 1993).
[3] Rickman S. *Quasiregular mappings* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
[4] Водопьянов С.К. *О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно*, Матем. тр. **5** (2), 92–137 (2002).
[5] Водопьянов С.К., Молчанова А.О. *Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением*, Сиб. матем. журн. **57** (5), 999–1011 (2016).
[6] Rotschild L.P., Stein E.M. *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137**, 247–320 (1976).
[7] Folland G.B., Stein E.M. *Hardy spaces on homogeneous groups* **28** (Princeton Univ. Press., Princeton, 1982).
[8] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzonni F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007).
[9] Pansu P. *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Annal. Math. **129** (1), 1–60 (1989).
[10] Vodop′yanov S.K. *$\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics*, Proc. Anal. Geom., 603–670 (Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000).
[11] Водопьянов С.К., Евсеев Н.А. *Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно*, Сиб. матем. журн. **63** (2), 283–315 (2022).
[12] Brooks J.K., Chacon R.V. *Continuity and compactness of measures*, Adv. Math. **37**, 16–26 (1980).
[13] Brooks J.K., Chacon R.V. *Convergence theorems in the theory of diffusions*, Measure Theory Appl. **1033**, Lect. Notes Math., 79–93 (Springer, Berlin, 1983).
[14] Ball J.M., Murat F. *Remarks on Chacon's biting lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (3), 655–663 (1989).

Сергей Констатинович Водопьянов
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: vodopis@mail.ru

Данил Алексеевич Сбоев
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: dnlsboev@gmail.com

S.K. Vodopyanov and D.A. Sboev

Lower semicontinuity of distortion coefficients for homeomorphisms of bounded $(1, \sigma)$-weighted (q, p)-distortion on Carnot groups

Abstract. In this paper we study the locally uniform convergence of homeomorphisms with bounded $(1, \sigma)$-weighted (q, p)-distortion to a limit homeomorphism. Under some additional conditions we prove that the limit homeomorphism is a mapping with bounded $(1, \sigma)$-weighted (q, p)-distortion. Moreover, we obtain the property of lower semicontinuity of distortion characteristics of homeomorphisms.

Keywords: semicontinuity from below, homeomorphism with bounded $(1, \sigma)$-weighted (q, p)-distortion, Carnot group.

Sergey Konstantinovich Vodopyanov
Novosibirsk State University,
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: vodopis@mail.ru

Danil Alekseevich Sboev
Novosibirsk State University,
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: dnlsboev@gmail.com