Известия вузов. Математика
2024, № 3, с. 70–83

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Б. ХАСАНОВ, Х.Н. НОРМУРОДОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНУС-ГОРДОНА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, удовлетворяет уравнению типа синус-Гордона с дополнительным членом.

Ключевые слова: уравнение типа синус-Гордона, оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формула следа.

УДК: 517.957

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-70-83

Введение

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона (chG) с дополнительными членами вида

$$q_{xt} = chq - a(t)q_{xx}, \quad q = q(x,t), \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R), \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(t>0)\bigcap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t) \in C\left([0,\infty)\right)$ — заданная непрерывная ограниченная функция. Нетрудно убедиться, что условия совместности линейных уравнений

$$y_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_x & -\lambda \\ \lambda & -\frac{1}{2}q_x \end{pmatrix} y, \quad y_t = \left\{ \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e^{q} \\ \frac{1}{2}e^{-q} & 0 \end{pmatrix} + a(t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_x & \lambda \\ -\lambda & \frac{1}{2}q_x \end{pmatrix} \right\} y,$$

эквивалентны уравнению (1) для функции $q = q(x,t), \ x \in R, \ t > 0$.

Поступила в редакцию 27.01.2023, после доработки 07.10.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Отметим, что если в уравнении (1) коэффициент $a(t)=0$, то уравнение (1) принимает вид уравнения ch-Gordon (chG) ([1], с. 16)

$$q_{xt}=\operatorname{ch} q.$$

Нетрудно заметить, что основные результаты настоящей работы (см. теоремы 1, 2) справедливы и в случае уравнения ch-Gordon (chG).

Уравнение синус-Гордон (sG) вида

$$u_{xt}=\sin u,\quad u=u\,(x,t)\,,\quad x\in R,\quad t>0,$$

было проинтегрировано в работах [2], [3] (см. также [4]–[7]) в классе быстроубывающих и конечнозонных функций. Кроме того, для конечнозонных решений была выведена явная формула через тета-функции Римана. Таким образом, была установлена [4]–[7] разрешимость задачи Коши для уравнения синус-Гордона при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [8], [9], а также в [10]–[12].

Известно [13], что если $q(x)=2a\cos 2x, a\neq 0$, то в спектре оператора Штурма–Лиувилля $Ly\equiv -y''+q(x)y, x\in R$, открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$-периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [14]. Отметим, что задача Коши в классе периодических и почтипериодических бесконечнозонных функций для нелинейных эволюционных уравнений без источника и с источником, а также с дополнительным членом, в различных постановках изучались в работах [15]–[28].

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t), x\in R, t>0$, задачи (1)–(3) сведением ее к обратной спеткральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\quad x\in R,\quad t>0,\quad \tau\in R, \tag{4}$$

где

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \Omega(x,t)=\begin{pmatrix}P(x,t)&Q(x,t)\\Q(x,t)&-P(x,t)\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

$$P(x,t)=0,\quad Q(x,t)=\frac{1}{2}q'_x(x,t).$$

1. Эволюция спектральных данных

Обозначим через

$$c(x,\lambda,\tau,t)=(c_1(x,\lambda,\tau,t),c_2(x,\lambda,\tau,t))^T,\ s(x,\lambda,\tau,t)=(s_1(x,\lambda,\tau,t),s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$$

решения уравнения (4) с начальными условиями

$$c(0,\lambda,\tau,t)=(1,0)^T,\ s(0,\lambda,\tau,t)=(0,1)^T.$$

Функция

$$\Delta(\lambda,\tau,t)=c_1(\pi,\lambda,\tau,t)+s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$$

называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Кроме того, для решений $c(x,\lambda,\tau,t)$ и $s(x,\lambda,\tau,t)$ при больших $|\lambda|$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$c(x,\lambda,\tau,t)=\begin{pmatrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{pmatrix}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{\lambda}\right),\ |\lambda|\to\infty,$$

$$s(x,\lambda,\tau,t)=\begin{pmatrix}-\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{pmatrix}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}}{\lambda}\right),\ |\lambda|\to\infty.$$

Из этих асимптотик при действительных λ получим оценку

$$\Delta(\lambda,\tau,t)=2\cos\lambda\pi+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ |\lambda|\to\infty.$$

Вектор-функции

$$\psi^{\pm}(x,\lambda,\tau,t)=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,\tau,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,\tau,t))^T=c(x,\lambda,\tau,t)+m^{\pm}(\lambda,\tau,t)s(x,\lambda,\tau,t)$$

называются решениями Флоке уравнения (4). Здесь функции Вейля–Титчмарша определяются следующими формулами [29]:

$$m^{\pm}(\lambda,\tau,t)=\frac{s_2(\pi,\lambda,\tau,t)-c_1(\pi,\lambda,\tau,t)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4}}{2s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}.$$

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma\left(L\right)=\{\lambda\in R:|\Delta(\lambda)|\leq 2\}=R\backslash\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}),n\in Z\backslash\{0\}$, называются лакунами, где λ_n — корни уравнения

$$\Delta(\lambda)\mp 2=0.$$

Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической ($y(0)=\pm y(\pi)$) задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1}=\lambda_0=0$, т. е. $\lambda=0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t),n\in Z\backslash\{0\}$, при этом $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],n\in Z\backslash\{0\}$. Так как коэффициент в уравнения (4) имеет вид $P(x,t)\equiv 0,Q(x,t)=\dfrac{1}{2}q_x'(x,t)$, то справедливо $\lambda_{-1}=\lambda_0=\xi_0=0$, т. е. $\xi=0$ является собственным значением задачи Дирихле.

Числа $\xi_n(\tau,t),\ n\in Z\backslash\{0\}$, и знаки

$$\sigma_n(\tau,t)=\mathrm{sign}\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\},\quad n\in Z\backslash\{0\},$$

называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,n\in Z\backslash\{0\}$, и границы спектра $\lambda_n(\tau,t),n\in Z\backslash\{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$. Задача восстановления коэффициента $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

С помощью начальной функции $q_0(x+\tau),\tau\in R$, построим оператор Дирака вида

$$L(\tau,0)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in R,\quad \tau\in R,$$

$$\Omega_0(x+\tau)=\left(\begin{array}{cc}0 & \frac{1}{2}q_0'(x+\tau)\\ \frac{1}{2}q_0'(x+\tau) & 0\end{array}\right),\ y=\left(\begin{array}{c}y_1\\ y_2\end{array}\right).$$

Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau),n\in Z\backslash\{0\}\right\}$ оператора $L(\tau,0)$. Нетрудно доказать, что спектральные параметры $\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau)=\pm1,n\in Z\backslash\{0\}$, являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau),\quad n\in Z\backslash\{0\},\quad \tau\in R.$$

Обратная задача для оператора Дирака вида

$$Ly\equiv\left(\begin{array}{cc}0 & 1\\ -1 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}y_1'\\ y_2'\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}y_1\\ y_2\end{array}\right)=\lambda y,\quad x\in R,$$

с периодическими коэффициентами $p(x) = p(x+\pi)$, $q(x) = q(x+\pi)$ в различных постановках изучена в работах [30]–[37].

2. Основной результат

Основной результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* $q(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$, *— решение задачи Коши* (1)–(3). *Тогда спектральные данные* $\{\lambda_n(\tau,t),\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t) = \pm 1\}$, $n \in Z\setminus\{0\}$, *оператора* $L(\tau,t)$ *удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина*

$$\frac{\partial \lambda_n(\tau,t)}{\partial t} = 0, \quad n \in Z\setminus\{0\};$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)), \quad n \in Z\setminus\{0\}. \tag{5}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in Z\setminus\{0\}$, *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z\setminus\{0\}$, *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия*:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z\setminus\{0\}, \tag{6}$$

где $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z\setminus\{0\}$ *— спектральные параметры оператора Дирака* $L(\tau,0)$. *Последовательности* $h_n(\xi)$ *и* $g_n(\xi), n \in Z\setminus\{0\}$, *из уравнения* (5) *определяются по формулам*

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))}\, f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{4\xi_n(\tau,t)} \exp\{q(\tau,t)\} + a(t)\xi_n,$$

здесь

$$\xi = \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots), \quad \sigma = \sigma(\tau,t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), \ldots).$$

Уравнения Дубровина (5) являются бесконечномерным аналогом таких уравнений для конечнозонного случая. Несмотря на вхождение в каждую из правых частей уравнения (5) бесконечного числа компонент бесконечномерного вектора, эти уравнения все же допускают решение в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций, эти решения вырождаются в конечнозонном случае.

Доказательство. Пусть π-периодическая по x функция $q(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через $y_n = (y_{n,1}(x,\tau,t), y_{n,2}(x,\tau,t))^T$, $n \in Z\setminus\{0\}$, ортонормированные собственные вектор-функции оператора $L(\tau,t)$, рассматриваемого на отрезке $[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле

$$y_1(0,\tau,t) = 0, \quad y_1(\pi,\tau,t) = 0,$$

соответствующими собственным значениям $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z\setminus\{0\}$. Дифференцируя по t тождество

$$\xi_n(\tau,t) = (L(\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in Z\setminus\{0\},$$

и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = (\dot{\Omega}(x+\tau,t)y_n, y_n), \quad n \in Z\setminus\{0\}. \tag{7}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z)=\int_0^\pi \left[y_1(x)\overline{z_1(x)}+y_2(x)\overline{z_2(x)}\right]dx,\quad y=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\end{pmatrix},$$

равенство (7) перепишем в виде

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_{xt}dx. \tag{8}$$

Подставляя (1) в (8), получаем равенство

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\int_0^\pi \left[y_{n,1}y_{n,2}\{chq(x+\tau,t)-a(t)q_{xx}\}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}+y_{n,1}y_{n,2}e^{-q(x+\tau,t)}\right]dx-a(t)\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_{xx}(x+\tau,t)dx=$$

$$=I_1(\tau,t)+a(t)I_2(\tau,t), \tag{9}$$

где

$$I_1(\tau,t)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}+y_{n,1}y_{n,2}e^{-q(x+\tau,t)}\right]dx,$$

$$I_2(\tau,t)=-\int_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_{xx}(x+\tau,t)dx.$$

Применяя тождества

$$y_{n,1}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\left(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\right),$$

$$y_{n,2}(x,\tau,t)=\frac{1}{\xi_n(\tau,t)}\left(-y'_{n,1}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,1}(x,\tau,t)\right),$$

вычислим

$$I_1(\tau,t)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[y_{n,1}y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}+y_{n,1}y_{n,2}e^{-q(x+\tau,t)}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}\int_0^\pi\left[y_{n,2}e^{q(x+\tau,t)}\left(y'_{n,2}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,2}(x,\tau,t)\right)\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\xi_n(\tau,t)}\int_0^\pi\left[y_{n,1}e^{-q(x+\tau,t)}\left(-y'_{n,1}(x,\tau,t)+\frac{1}{2}q'_x(x+\tau,t)y_{n,1}(x,\tau,t)\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{4\xi_n(\tau,t)}\left(\int_0^\pi\left[y^2_{n,2}(x,\tau,t)e^{q(x+\tau,t)}-y^2_{n,1}(x,\tau,t)e^{-q(x+\tau,t)}\right]'dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4\xi_n(\tau,t)}e^{q(\tau,t)}\left[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)\right]; \tag{10}$$

$$I_2(\tau,t)=-\int_0^\pi\left[y_{n,1}y_{n,2}q_{xx}\right]dx=\int_0^\pi\left[\{y'_{n,1}y_{n,2}+y_{n,1}y'_{n,2}\}q_x\right]dx=$$

$$=\xi_n\int_0^\pi\left[\{y^2_{n,1}-y^2_{n,2}\}q_x\right]dx=\xi_n\int_0^\pi\left[y^2_{n,1}+y^2_{n,2}\right]'dx=\xi_n\left[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)\right]. \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в (9), получим

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\left\{\frac{1}{4\xi_n(\tau,t)}e^{q(\tau,t)}+a(t)\xi_n\right\}\left[y^2_{n,2}(\pi,\tau,t)-y^2_{n,2}(0,\tau,t)\right]. \tag{12}$$

Так как собственные значения $\xi_n(\tau,t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то справедливо равенство

$$y_n(x,\tau,t)=\frac{1}{c_n(\tau,t)}s(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t),$$

где

$$c_n^2(\tau,t)=\int_0^\pi\left[s_1^2(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)+s_2^2(x,\xi_n(\tau,t),\tau,t)\right]dx=$$

$$=-\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}\times s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t).$$

Используя эти равенства, имеем

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=-\frac{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\dfrac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\tau,\xi_n,t)}{\partial\lambda}}.$$

Подставляя в это соотношение равенство

$$s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)-\frac{1}{s_2(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}=\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}\,,$$

получим

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=-\frac{\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(\tau,t))-4}}{\dfrac{\partial s_1(\pi,\xi_n(\tau,t),\tau,t)}{\partial\lambda}}. \tag{13}$$

Учитывая разложения

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},$$

$$s_1(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},$$

где $a_0=1$ и $a_k=k$ при $k\neq 0$, перепишем (13) в виде

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t)-y_{n,2}^2(0,\tau,t)=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi).$$

Подставляя это выражение в тождество (12), получим (5).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими ($y(0,t)=y(\pi,t)$) или антипериодическими ($y(0,t)=-y(\pi,t)$) граничными условиями, то вместо уравнения (12) получим

$$\frac{\partial\lambda_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\ \text{ т. е. }\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0),\ n\in Z.$$

Теперь в уравнении $L(\tau,t)\nu_n=\lambda_n(\tau,t)\nu_n,\ n\in Z$, положим $t=0$. Так как собственные значения $\lambda_n(\tau)=\lambda_n(\tau,0),\ n\in Z$, периодической или антипериодической задачи для уравнения $L(\tau,0)\nu_n=\lambda_n(\tau)\nu_n,\ n\in Z$, не зависят от параметра $\tau\in R$, имеем $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau)=\lambda_n,\ n\in Z$. $\square$

Замечание 1. Справедливы формулы следов

$$q'_\tau(\tau,t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)\,h_k(\xi(\tau,t)),\tag{14}$$

$$0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k}+\lambda_{2k-1}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right),\tag{15}$$

$$\left(\frac{1}{2}q_\tau(\tau,t)\right)^2+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right).\tag{16}$$

Используя (14), систему (5) можно переписать в замкнутой форме

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t))}f_n(\xi)g_n(\xi),\tag{17}$$

где

$$g_n(\xi)=\frac{1}{4\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{C(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)\,h_k(\xi(s,t))\right)ds\right\}+a(t)\xi_n(\tau,t).$$

Здесь

$$q(\tau,t)=C(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)\,h_k(\xi(s,t))\right)ds,$$

где $C(t)$ — некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\quad n\in Z\setminus\{0\},$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (17) и начальные условия (6) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\quad x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau)\in K,$$

где

$$K=\left\{x(\tau,t)=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots):\|x(\tau,t)\|=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|x_n(\tau,t)|<\infty\right\},$$

$$H(x)=(\ldots,H_{-1}(x),H_1(x),\ldots),$$
$$H_n(x)=(-1)^n\sigma_n(\tau)g_n(\ldots,\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\ldots)\times$$
$$\times f_n(\ldots,\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\ldots)=(-1)^n\sigma_n(\tau)f_n(x(\tau,t))\,g_n(x(\tau,t)).$$

Известно, что если $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R)$, то $(q_0(x))'\in C^2(R)$. Поэтому для длины лакуны оператора $L(\tau,0)$ имеет место равенство ([30], с. 98, $n=2$)

$$\gamma_k\equiv\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}=\frac{|q_{2k}^2|}{2\,|k|^2}+\frac{\delta_k}{|k|^3},\tag{18}$$

где

$$\lambda_{2k}=k+\sum_{j=1}^{3}c_jk^{-j}+2^{-2}\,|k|^{-2}\,|q_{2k}^2|+|k|^{-3}\,\varepsilon_k^+,$$

$$\lambda_{2k-1} = k + \sum_{j=1}^{3} c_j k^{-j} - 2^{-2} |k|^{-2} \left|q_{2k}^2\right| + |k|^{-3} \varepsilon_k^-,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|q_{2k}^2\right|^2 < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получим

$$\inf_{k\neq n} |\xi_n(\tau,t) - \xi_k(\tau,t)| \geq a > 0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (18), оценим функции

$$|f_n(x(\tau,t))|\,, \quad \left|\frac{\partial f_n(x(\tau,t))}{\partial x_m}\right|, \quad |g_n(x(\tau,t))|\,, \quad \left|\frac{\partial g_n(x(\tau,t))}{\partial x_m}\right|.$$

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки*:

$$C_1 \leq |f_n(x)| \leq C_2, \quad \left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right| \leq C_3\gamma_m, \tag{19}$$

$$|g_n(x)| \leq C_4\,|n|\,, \quad \left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right| \leq C_5\gamma_m,\ m,n \in Z\backslash\{0\}, \tag{20}$$

где $C_j > 0,\ j = \overline{1,5}$, *не зависят от* m, n.

Доказательство. Неравенство (19) доказано в работе [24]. Поэтому докажем (20). Поскольку функция $a(t)$ ограничена, то $\exists M > 0$ такое, что выполняется неравенство $|a(t)| \leq M$. Пользуясь этим неравенством и (18), получим оценки

$$|g_n(x(\tau,t)| \leq \frac{1}{4|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|}\times$$

$$\times \exp\left\{|C(t)| + \int_0^{\tau} \left|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))f_k\left(x\left(s,t\right)\right)\right| ds\right\} +$$

$$+M|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)| \leq \frac{1}{4A_1|n|}\exp\left\{M_1 + \int_0^{\tau} \sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{\infty} C_2\gamma_k ds\right\} + MA_2|n| \leq C_4|n|.$$

Теперь оценим функцию

$$\left|\frac{\partial g_n(x(\tau,t))}{\partial x_m}\right| \leq \frac{1}{4|\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n(\tau,t)|}\times$$

$$\times \exp\left\{|C(t)| + \int_0^{\tau} \left|\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))f_k\left(x\left(s,t\right)\right)\right| ds\right\}\times$$

$$\times\left[\left|\int_0^{\tau} (-1)^{m-1}\gamma_m\sigma_m^0(s)\left[2\cos(2x_m(s,t))f_m\left(x(s,t)\right) + \sin(2x_m(s,t))\frac{\partial f_m\left(x(s,t)\right)}{\partial x_m(s,t)}\right] ds\right| +\right.$$

$$\left.+\int_0^{\tau} \left|\sum_{k=-\infty,\,k\neq m}^{\infty} (-1)^{k-1}\gamma_k\sigma_k^0(s)\sin(2x_k(s,t))\frac{\partial f_k\left(x(s,t)\right)}{\partial x_m(s,t)}\right| ds\right] \leq$$

$$\leq \frac{M}{4A_1|n|}\exp\left\{M_1+\int_0^\tau \sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty} C_2\gamma_k ds\right\}\times$$

$$\times\left\{B_1\gamma_m|\tau|+B_2\gamma_m^2|\tau|+\gamma_m\int_0^\tau \sum_{k=-\infty,\, k\neq m}^{\infty} C_3\gamma_k ds\right\}\leq C_5\gamma_m,$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2 > 0$ и не зависят от параметров m, n. □

Лемма 2. *Если $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т. е. существует константа $L>0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t), y(\tau,t)\in K$ выполняется неравенство*

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\leq L\,\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|,$$

где

$$L=C\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}|n|\,(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})=C\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}|n|\gamma_n<\infty.$$

Доказательство. Сначала используя лемму 1, оценим производную функции

$$F_n(x)=g_n(x)f_n(x):$$

$$\left|\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m}\right|\leq\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right||g_n(x)|+\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right||f_n(x)|\leq C_3C_4\gamma_m|n|+C_2C_5\gamma_m\leq C\gamma_m|n|,$$

где $C=\mathrm{const}>0$ не зависит от m, n.

Далее, используя выражение

$$H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)F_n(x(\tau,t)),$$

получим

$$|H_n(x(\tau,t))-H_n(y(\tau,t))|=|F_n(x(\tau,t))-F_n(y(\tau,t))|.$$

Применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t)=F_n(x+t(y-x))$ на отрезке $t\in[0,1]$. Тогда получим равенство

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t^*),$$

т. е.

$$F_n(x)-F_n(y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}(x_m-y_m),$$

где $\theta=x+t^*(y-x)$. Отсюда следует

$$|H_n\left(x(\tau,t)\right)-H_n\left(y(\tau,t)\right)|=|F_n\left(x(\tau,t)\right)-F_n\left(y(\tau,t)\right)|\leq\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m}\right||x_m(\tau,t)-x_m(\tau,t)|\leq$$

$$\leq C|n|\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}|\,|x_m(\tau,t)-y_m(\tau,t)|=C|n|\,\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|.$$

Теперь оценим норму $\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|$:

$$\|H(x)-H(y)\|=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|H_n(x)-H_n(y)|\leq$$

$$\leq \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} C|n|\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right)\|x-y\| = L\|x-y\|,$$

где

$$L = C\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} |n|\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right) < \infty. \tag{21}$$

Таким образом, условие Липщица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (5), (6) для всех $t \geq 0$ и $\tau \in R$ существует и единственно. $\square$

Замечание 2. Теорема 1 и лемма 2 дают метод нахождения решения задачи (1)–(3).

Доказательство. Для этого сначала найдем спектральные данные

$$\lambda_n, \quad \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, \quad n \in Z\setminus\{0\},$$

оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через λ_n, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z\setminus\{0\}$. Теперь решая задачу Коши (17), (6) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \in Z\setminus\{0\}$. Из формулы следов (14) определим функцию $q_\tau(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)–(3).

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q_\tau(\tau, t)$, $\tau \in R$, $t > 0$, действительно удовлетворяет уравнению (1). $\square$

Замечание 3. Функция $q_\tau(\tau, t)$, построенная с помощью системы уравнений Дубровина (17), (6) и формулы (14), удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство. Используем вторую формулу следов

$$\left(\frac{1}{2}q_\tau(\tau, t)\right)^2 + \frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t)\right). \tag{22}$$

Дифференцируя (22) по t, имеем

$$\frac{1}{2}q_\tau(\tau, t)\, q_{\tau t}(\tau, t) + \frac{1}{2}\left(q_{\tau t}(\tau, t)\right)_\tau = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\xi_k(\tau, t)\frac{\partial \xi_k(\tau, t)}{\partial t}. \tag{23}$$

Здесь мы использовали равенство $\left(q_\tau(\tau, t)\right)_{t\tau} = \left(q_\tau(\tau, t)\right)_{\tau t}$. Далее, учитывая систему уравнений Дубровина (5), из (23) получим

$$q_\tau(\tau, t)\, z(\tau, t) + z_\tau(\tau, t) =$$

$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-2\xi_k(\tau, t)\times 2(-1)^k\sigma_k(\tau, t)h_k(\xi(\tau, t))\left(\frac{1}{4\xi_k(\tau, t)}e^{q(\tau, t)} + a(t)\xi_k\right)\right) =$$

$$= 2e^{q(\tau, t)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau, t)h_k(\xi(\tau, t)) + 8a(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau, t)h_k(\xi_k(\tau, t))\xi_k^2(\tau, t), \tag{24}$$

где

$$z(\tau, t) = q_{\tau t}(\tau, t). \tag{25}$$

Дифференцируя формулу (22) по τ и используя систему дифференциальных уравнений Дубровина, соответствующую уравнению (4),

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)h_n\left(\xi(\tau, t)\right)\xi_n(\tau, t),$$

получим тождество

$$8\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi_k(\tau,t))\xi_k^2(\tau,t)=-q_\tau q_{\tau\tau}-q_{\tau\tau\tau}. \tag{26}$$

Теперь используя (14), (26), из (24) выводим линейное уравнение относительно $z\,(\tau,t)$:

$$q_\tau z\,(\tau,t)+z_\tau\,(\tau,t)=q_\tau e^{q(\tau,t)}-a(t)q_\tau q_{\tau\tau}-a(t)q_{\tau\tau\tau}. \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$C(t)e^{-q}+\frac{1}{2}e^q-a(t)q_{\tau\tau}$$

является решением линейного уравнения (27). Выбирая $C(t)=\dfrac{1}{2}$, имеем $z(\tau,t)=\operatorname{ch}q(\tau,t)-a(t)q_{\tau\tau}(\tau,t)$. Отсюда и из обозначения (25), получим уравнение (1):

$$q_{\tau t}(\tau,t)=\operatorname{ch}q(\tau,t)-a(t)q_{\tau\tau},\quad \tau\in R,\quad t>0.$$

□

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию*

$$q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R),$$

то существует однозначно определяемое решение $q'_x(x,t)$, $x\in R$, $t>0$, задачи (1)–(3), *которое определяется по формуле* (14).

Замечание 4. Равномерная сходимость рядов в формулах (14)–(16) и (23), (24), а также (21), следует из равенств (18) и оценки (19).

Следствие 1. Используя результаты работы [31], [38], выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической π-периодической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи (1)–(3) является действительной аналитической функцией по переменной x.

Следствие 2. Если число $\dfrac{\pi}{2}$ является периодом (антипериодом) для начальной функции $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda)+2=0$ $(\Delta(\lambda)-2=0)$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту $q(x,t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то согласно результатам работ [32] и [33] число $\dfrac{\pi}{2}$ является также периодом (антипериодом) для решения $q(x,t)$ по переменной x.

Заключение

Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, удовлетворяет уравнениям типа синус-Гордона с дополнительным членом. Установлена разрешимость задачи Коши для уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических функций. Кроме того, доказано, что если начальная функция является действительной

π-периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши для уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом также является вещественной аналитической функцией по переменной x, а если число $\dfrac{\pi}{2}$ является периодом (антипериодом) начальной функции, то число $\dfrac{\pi}{2}$ также является периодом (антипериодом) по переменной x решения задачи Коши для уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

Литература

[1] Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения* (М.–Ижевск, 2012).

[2] Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Полное описание решений “sine-Gordon” уравнения*, Докл. АН СССР **219** (6), 1334–1337 (1974).

[3] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Sugur H. *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett. **30** (25), 1262–1264 (1973).

[4] Козел В.А., Котляров В.П. *Конечнозонные решения уравнения sine-Gordon* (Препринт ФТИНТ АН УССР, (9–77) , Харьков, 1977).

[5] Итс А.Р., Котляров В.П. *Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера*, Докл. АН УССР. Сер. А. (11), 878–880 (1976).

[6] Дубровин Б.А., Натанзон С.М. *Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon*, Функц. анализ и их прил. **16** (1), 27–43 (1982).

[7] Смирнов А.О. 3-*эллиптические решения уравнения “sine-Gordon”*, Матем. заметки **62** (3), 440–450 (1997).

[8] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов*: *метод обратной задачи* (Наука, М., 1980).

[9] Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. *Интегрируемые динамические системы*: *спектральные и дифференциально-геометрические аспекты* (Наук. думка, Киев, 1987).

[10] Matveev V.B. 30 *years of finite-gap integration theory*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **366** (1867), 837–875 (2008).

[11] Babazhanov B.A., Khasanov A.B. *Inverse problem for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators with finite-gap periodic potential on the half-line*, Diff. Equat. **43** (6), 737–744 (2007).

[12] Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. *Inverse problem on the half-line for the Sturm–Liouville operator with periodic potential*, Diff. Equat. **51** (1), 23–32 (2015).

[13] Ince E.L. *A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **21**, 117–120 (1922).

[14] Джаков П.Б., Митягин Б.С. *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака*, УМН **61**: 4(370), 77–182 (2006).

[15] Хасанов А.Б., Хасанов М.М. *Интегрирование нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительным членом в классе периодических функций*, ТМФ **199** (1), 60–68 (2019).

[16] Хасанов А.Б., Матякубов М.М. *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом*, ТМФ **203** (2), 192–204 (2020).

[17] Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. *Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций*, Зап. науч. сем. ПОМИ **506**, 258–279 (2021).

[18] Khasanov A.B., Allanazarova T.Z. *On the modified Korteweg–de Vries equation with loaded term*, Ukr. Math. J. **73** (11), 1783–1809 (2022).

[19] Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженным членом и источником*, Сиб. журн. индустр. матем. **25** (2), 127–142 (2022).

[20] Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б. *Интегрирование уравнения типа периодической цепочки Тоды*, Уфимск. матем. журн. **9** (2), 17–24 (2017).

[21] Домрин А.В. *Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния*, Тр. МИАН **253**, 46–60.

[22] Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов оператора Дирака*, Докл. РАН **350** (6), 746–748 (1996).

[23] Маннонов Г.А., Хасанов А.Б. *Задача Коши для нелинейного уравнения Хироты в классе периодических бесконечнозонных функций*, Алгебра и анализ **34** (5), 139–172 (2022).
[24] Муминов У.Б., Хасанов А.Б. *Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительными членами*, ТМФ **211** (1), 84–104 (2022).
[25] Муминов У.Б., Хасанов А.Б. *Задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера с нагруженным членом*, Матем. тр. **25** (1), 102–133 (2022).
[26] McKean H., Trubowitz E. *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (2), 143–226 (1976).
[27] Lax P.D. *Almost periodic solutions of the KdV equation*, SIAM Rev. **18** (3), 351–375 (1976).
[28] Левитан Б.М. *Почти-периодичность бесконечно-зонных потенциалов*, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **45** (2), 291–320 (1981).
[29] Даниелян А.А., Левитан Б.М., Хасанов А.Б. *Асимптотика m-функции Вейля–Титчмарша в случае системы Дирака*, Матем. заметки **50** (2), 67–76 (1991).
[30] Мисюра Т.В. *Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака* I, Теория функций, функц. анализ и их прил. **30**, 90–101 (Вища шк., Харьков, 1978).
[31] Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. *Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом*, Узбекск. матем. журн. (3–4), 48–55 (2001).
[32] Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака*, Узбекск. матем. журн. (3–4), 40–46 (2000).
[33] Currie S., Roth T.T., Watson T.B.A. *Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials*, Proc. Edinb. Math. Soc. **60** (3), 615–633 (2017).
[34] Bättig D., Grébert B., Guillot J.-C., Kappeler T. *Folation of phase space for the cubic nonlinear Schrödinger equation*, Compos. Math. **85** (2), 163–199 (1993).
[35] Grébert B., Guillot J.-C. *Gaps of one-dimensional periodic AKNS systems*, Forum Math. **5** (5), 459–504 (1993).
[36] Korotyaev E. *Inverse problem and estimates for periodic Zakharov-Shabat systems*, J. Reine Angew. Math. **583**, 87–115 (2005).
[37] Korotyaev E., Mokeev D. *Dubrovin equation for periodic Dirac operator on the half-line*, Appl. Anal. **101** (1), 337–365 (2020).
[38] Trubowiz E. *The inverse problem for periodic potentials*, Comm. Pure. Appl. Math. **30** (3), 321–337 (1977).

Акназар Бекдурдиевич Хасанов

Самаркандский государственный университет,
ул. Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: ahasanov2002@mail.ru

Хожимурод Нормуминович Нормуродов

Самаркандский государственный университет,
ул. Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: normurodov.96@bk.ru

A.B. Khasanov and Kh.N. Normurodov

Integration of a sine-Gordon type equation with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions

Abstract. In this paper, the inverse spectral problem method is used to integrate a nonlinear sine-Gordon type equation with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin differential equations in the class of three times continuously differentiable periodic infinite-gap functions is proved. It is shown that the sum of a uniformly convergent functional series constructed by solving the system of Dubrovin equations and the first trace formula satisfies sine-Gordon-type equations with an additional term.

Keywords: sine-Gordon type equation, Dirac operator, spectral data, Dubrovin's system of equations, trace formula.

Aknazar Bekdurdiyevich Khasanov

Samarkand State University,
15 University blvd. str., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: ahasanov2002@mail.ru

Khojimurod Normuminovich Normurodov

Samarkand State University,
15 University blvd. str., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: normurodov.96@bk.ru