Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 3, с. 64–69 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

В.Б. ЛЕВЕНШТАМ

УСРЕДНЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОЛУОСИ

Аннотация. На положительной временной полуоси рассматривается многоточечная краевая задача для нелинейной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующей по времени правой частью. Для этой, зависящей от большого параметра (высокой частоты осцилляций), задачи построена предельная (усредненная) многоточечная краевая задача и обоснован предельный переход в гельдеровом пространстве определенных на рассматриваемой временной полуоси ограниченных вектор-функций. Таким образом, для нормальных систем дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями обоснован метод усреднения Крылова–Боголюбова на полуоси.

Ключевые слова: нормальная система ОДУ с выскочастотными данными, многоточечная краевая задача на полуоси, метод усреднения.

УДК: 517.927

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-64-69

Введение

Метод усреднения по времени, который называют также методом усреднения Крылова–Боголюбова — мощный асимптотический метод. Он широко известен и в настоящее время разработан с большой полнотой (см., например, [1]–[15]) . Напомним, что с его помощью от возмущенной задачи с быстрыми по времени данными переходят к усредненной задаче с плавными данными. Последняя, как правило, существенно проще исходной для исследования и решения. Под обоснованием метода усреднения понимается доказательство асимптотической близости соответствующих решений возмущенной и усредненной задач. В многочисленных монографиях и журнальных статьях изучались, в основном, задача Коши на временном отрезке и задачи о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей оси решениях (см. [1]–[10] и библиографию в них). Однако для краевых задач (особенно многоточечных) он разработан еще недостаточно. Укажем пять работ, наиболее близких к данной статье. Это работы [11], [12], где метод усреднения обоснован для двухточечных краевых задач, а также [13]–[15], где он обоснован для многоточечных краевых задач при произвольном числе точек $m \geq 2$. В указанном цикле работ используются два различных подхода к изучению рассматриваемых задач. Исследования [11], [12], [14], [15] опираются на классическую теорему о неявной функции в банаховом пространстве; этот подход в теории метода усреднения впервые применил, по-видимому, И.Б.Симоненко (см., например, [7]) при обосновании этого метода для абстрактных параболических уравнений в случае задачи Коши и задачи о периодических по времени решениях. В работе

Поступила в редакцию 21.02.2023, после доработки 30.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

[13], в отличие от этого, используется классическая лемма Гронуолла. При этом в [13] постулируется существование решения не только усредненной задачи, но и значительно более сложной возмущенной задачи. Это жесткое требование нетипично для работ по теории метода усреднения, где существование и относительная единственность решения возмущенной задачи выводятся, обычно, из условий, которые налагаются на данные усредненной задачи.

1. Основные результаты

1. Пусть n и m — натуральные числа, Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $G = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,\infty]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in G, \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную (m-точечную) краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x,t,\omega t), \quad \sum_{i=1}^{m} P_i(\omega)x(t_i) = a(\omega). \tag{1}$$

Здесь A, $P_i(\omega)$, $i = 1,\dots,m$, — квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть выполнены также следующие условия.

1) Спектр матрицы A лежит внутри левой комплексной полуплоскости.

2) Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на Q.

3) Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ — 2π-периодична по τ с нулевым средним на периоде

$$< f(x,t,\tau) >_\tau \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

4) Для некоторых квадратных матриц S_i, $0 \le i \le m$, порядка n и вектора $a_0 \in R^n$ имеют место предельные соотношения $\|P_i(\omega) - S_i\| \to 0$, $|a(\omega) - a_0| \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Здесь и ниже символами $|x|$ и $\|A\|$ обозначены нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и квадратной матрицы A порядка n, которые согласованы, т. е. $|Ax| \le \|A\||x|$. Можно, например, считать, что $|x| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, $\|A\| = \max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$, где x_i и a_{ij} — компоненты вектора x и элементы матрицы A соответственно.

5) Справедливо соотношение

$$\delta = \det\left|\sum_{k=1}^{m} S_k e^{t_k A}\right| \ne 0.$$

Рассмотрим предельную (усредненную) многоточечную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad \sum_{i=1}^{m} S_i y(t_i) = a_0. \tag{2}$$

Можно убедиться (см. (8)), что задача (2) имеет единственное ограниченное на полуоси $t \in [0,\infty)$ решение $\overset{o}{y}(t), t \in [0,\infty)$.

6) Будем предполагать, что существует строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω такая, что $\overset{o}{y}(t) \in \Omega_0$, $t \in [0,\infty]$.

Далее нам понадобится банахово пространство $C_\mu([0,\infty))$, $\mu\in(0,1)$, т. е. пространство непрерывных ограниченных вектор-функций $u:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ и снабженных нормой

$$\|u\|_{C_\mu([0,\infty)}=\sup_{t\in[0,\infty)}|u(t)|+\sup_{0\le t_1<t_2<t_1+1}\frac{|u(t_2)-u(t_1)|}{|t_2-t_1|^\mu}<\infty.$$

Теорема 1. *Для любого $\mu\in(0,1)$ найдется такое $\omega_0>0$, что задача* (1) *при $\omega\ge\omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0,\infty))$-окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$ решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left\|x_\omega(t)-\overset{o}{y}(t)\right\|_{C_\mu([0,\infty))}=0$.*

2. В этом пункте рассмотрим многоточечную краевую задачу для дифференциального уравнения (1) в более общей ситуации. Здесь будем предполагать, что спектр матрицы A может содержать как точки левой, так и правой полуплоскости, но не содержит точек мнимой оси. Другими словами, он состоит из двух множеств $M_\pm$, лежащих соответственно в открытых правой и левой комплексных полуплоскостях. Пусть $B_\pm$ и $\Pi_\pm$−инвариантные подпространства оператора A и спектральные проекторы, соответствующие $M_\pm$ ([16], гл. I, п. 2.4), соответственно. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(x,t,\omega t),\quad \Pi_-\sum_{i=1}^m P_i(\omega)x(t_i)=a^-(\omega),$$

где $a^-(\omega)\in B_-$. Будем предполагать, что для вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и матриц $P_i(\omega), i=1,2,\dots,m$, выполнены условия 2)–4) пункта 1, в частности, для вектор-функции $a^-(\omega)$ выполняется предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty}a^-(\omega)=a_0^-,\ a_0^-\in B_-$. Условие 5) заменим требованием

$$\det\left|\Pi_-\sum_{k=1}^m S_k e^{t_kA}\Pi_-\right|\ne0.$$

Рассмотрим на полуоси $t\ge0$ усредненную многоточечную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt}=Ay,\quad \sum_{i=1}^m S_iy(t_i)=a_0^-.$$

Она имеет единственное ограничение на полуоси $t\ge0$ — решение $\overset{o}{y}(t)\in\Omega,\ t\in[0,\infty)$. Будем предполагать, что для него выполнено условие 6).

Теорема 2. *Для любого $\mu\in(0,1)$ найдется такое $\omega_0>0$, что задача* (1) *при $\omega\ge\omega_0$ имеет единственное в некоторой $C_\mu([0,\infty))$ — окрестности $\overset{o}{y}(t)$ решение $x_\omega(t)$, и справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left\|x_\omega(t)-\overset{o}{y}(t)\right\|_{C_\mu([0,\infty))}=0$.*

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Выпишем, аналогично [13], решение $x(t)$ задачи (1) в интегральной форме. Для этого положим

$$x(0)=x_0. \tag{3}$$

Решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (3) имеет вид

$$x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}f[x(s),s,\omega s]ds. \tag{4}$$

Для нахождения вектор-функции x_0 подставим (4) в краевые условия (1), получим

$$\sum_{k=1}^{m} P_k e^{t_k A} x_0 = a(\omega) - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^{t_k} P_k e^{(t_k - s)A} f[x(s), s, \omega s] ds.$$

Выражая отсюда x_0 и подставляя его в (4), найдем искомое интегральное представление

$$x(t) = e^{tA} \left(\sum_{k=1}^{m} P_k e^{t_k A} \right)^{-1} \left\{ a(\omega) - \sum_{k=1}^{m} P_k \int_0^{t_k} e^{(t_k - s)A} f(x(s), s, \omega s) ds \right\} +$$
$$+ \int_0^t e^{(t-s)A} f(x(s), s, \omega s) ds \equiv H_\omega(x, t).$$

В частности, интегральное представление решения $\overset{o}{y}(t)$ задачи (2) имеет вид

$$\overset{o}{y}(t) = e^{tA} \left(\sum_{k=1}^{m} S_k e^{t_k A} \right)^{-1} a_0 \equiv H_\infty(t). \tag{5}$$

Для доказательства теоремы введем оператор

$$N : C_\mu([0, \infty]) \times [1, \infty) \to C_\mu([0, \infty]), \quad \mu \in (0, 1),$$

определенный в некотором шаре $\left\| u(t) - \overset{o}{y}(t) \right\| \leq \sigma$, где $\sigma > 0$ — небольшое число:

$$N(x, \omega)(t) = \begin{cases} x(t) - H_\omega(x, t), & \omega < \infty; \\ x(t) - H_\infty(t), & \omega \equiv \infty. \end{cases}$$

С помощью известной в теории метода усреднения методики (см., например, [2], [7], [9]) нетрудно установить, что оператор $N(x, \omega)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по x в точке $\big(\overset{o}{y}(t), \infty\big)$. При этом $N\big(\overset{o}{y}(t), \infty\big) = 0$, $\mathrm{D}_x N\big(\overset{o}{y}(t), \infty\big) = I$ — тождественный оператор.

Отсюда в силу теоремы о неявных функциях в банаховых пространствах следует теорема 1. □

Доказательство теоремы 2. Выпишем интегральное уравнение, которому удовлетворяет ограниченное на полуоси $t \in [0, \infty)$ решение $x(t)$ задачи (1) с начальным уловием

$$\Pi_- x(0) = x_0^-.$$

Как известно [16],

$$x(t) = e^{tA} x_0^- + \int\limits_0^\infty G(t - s) f[x(s), s, \omega s] ds, \tag{6}$$

где

$$G(t) = \begin{cases} e^{tA} \Pi_-, & t > 0; \\ -e^{tA} \Pi_+, & t < 0. \end{cases}$$

Для нахождения вектор-функции x_0^- подставим (6) в краевые условия (1). В результате найдем

$$x_0^- = \left(\Pi_- \sum_{k=1}^{m} P_k e^{t_k A \Pi_-} \right)^{-1} \left[a^-(\omega) - \sum_{k=1}^{m} \Pi_- P_k \int\limits_0^\infty G(t_k - s) f[x(s), s, \omega s] ds \right].$$

Отсюда, согласно (6) имеем

$$x(t) = e^{tA}\left(\Pi_- \sum_{k=1}^{m} P_k e^{t_k A \Pi_-}\right)^{-1}\left[a^-(\omega) - \sum_{k=1}^{m} \Pi_- P_k \int_0^\infty G(t_k - s) f[x(s), s, \omega s] ds\right] +$$

$$+ \int_0^\infty G(t-s) f[x(s), s, \omega s] ds \equiv M_\omega(x, t).$$

Как и в доказательстве теоремы 1, в малой окрестности $\overset{o}{y}(t)$ определим оператор

$$K : C_\mu([0,\infty]) \times [1,\infty) \to C_\mu([0,\infty]), \quad \mu \in (0,1] :$$

$$K(x,\omega)(t) = \begin{cases} x(t) - M_\omega(x,t), & \omega < \infty; \\ x(t) - e^{tA}\left(\sum_{k=1}^{m} \Pi_- S_k e^{t_k A} \Pi_-\right)^{-1} a_0^-, & \omega = \infty. \end{cases}$$

Применяя к нему теорему о неявных функциях в банаховом пространстве в сочетании с известной в теории метода усреднения методикой (см., например, [2], [7], [9]), придем к заключению теоремы 2. □

Литература

[1] Боголюбов Н.Н. *О некоторых статистических методах в математической физике* (Изд-во Акад. наук УССР, М., 1945).

[2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Физматлит, М., 1974).

[3] Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике* (Наук. думка, Киев, 1971).

[4] Юдович В.И. *Вибродинамика систем со связями*, Докл. АН **354** (5), 622–624 (1997).

[5] Левенштам В.Б. *Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье–Стокса в главной части*, Алгебра и анализ **26** (1), 94–127 (2014).

[6] Хацкевич В.Л. *О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье–Стокса с быстро осциллирующей массовой силой*, Матем. заметки **99** (5), 764–777 (2016).

[7] Симоненко И.Б. *Метод осреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости* (Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1983).

[8] Левенштам В.Б. *Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми*, Дифференц. уравнения **44** (1), 52–68 (2008).

[9] Левенштам В.Б. *Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми* (Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2010).

[10] Левенштам В.Б. *Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **40** (9), 1416–1424 (2000).

[11] Левенштам В.Б., Шубин П.Е. *Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями*, Матем. заметки **100** (1), 94–108 (2016).

[12] Бигириндавйи Д., Левенштам В.Б. *Обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих ОДУ с краевыми условиями*, Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем. (1), 31–37 (2020).

[13] Константинов М.М., Байнов Д.Д. *О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам*, Soc. de Ştiinte Matem. din România **(18 (66))** (3/4), 307–310 (1974).

[14] Bigirindavyi D., Levenshtam V.B. *Justification of the averaging method for a system with multipoint boundary value condition*, Springer Proceedings in Mathematics and Statisticsthis link is disabled, 2021, International Scientific Conference on Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis, OTHA 2020, Rostov-on-Don, 26 April 2020 – 30 April, (9), 137–142 (2021).

[15] Бигириндавйи Д., Левенштам В.Б. *Усреднение высокочастотной нормальной системы ОДУ с многоточенными краевыми условиями*, Владикавказск. матем. журн. **24** (2), 62–74 (2022).

[16] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* (Наука, М., 1970).

Валерий Борисович Левенштам

Южный федеральный университет,
ул. Б. Садовая, д. 105/42, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия;
Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук,
ул. Ватутина, д. 53, г. Владикавказ, 362025, Россия,

e-mail: vlevenshtam@yandex.ru

V.B. Levenshtam

Averaging of a normal system of ordinary differential equations of high frequency with a multipoint boundary value problem on a semi-axis

Abstract. A multipoint boundary value problem for a nonlinear normal system of ordinary differential equations with a rapidly time-oscillating right-hand side is considered on a positive time semi-axis. For this problem, which depends on a large parameter (high oscillation frequency), a limiting (averaged) multipoint boundary value problem is constructed and a limiting transition in the Hölder space of bounded vector functions defined on the considered semi-axis is justified. Thus, for normal systems of differential equations in the case of a multipoint boundary value problem, the Krylov–Bogolyubov averaging method on the semi-axis is justified.

Keywords: normal system of ordinary differential equations with high-frequency data, a multipoint boundary value problem on a semi-axis, averaging method.

Valeriy Borisovich Levenshtam

Southern Federal University,
105/42 B. Sadovaya str., Rostov-on-don, 344006 Russia;
Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
53 Vatutina str., Vladikavkaz, 362025 Russia,

e-mail: vlevenshtam@yandex.ru