Известия вузов. Математика
2024, № 3, с. 50–63

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.И. КОРЗЮК, Я.В. РУДЬКО

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. В полуплоскости рассматривается нелинейное уравнение в частных производных строго гиперболического типа порядка больше двух. Оператор в уравнении представляет собой произведение дифференциальных операторов первого порядка. К уравнению присоединяются условия Коши. Решение строится в неявном аналитическом виде как решение некоторого интегрального уравнения. Локальная разрешимость этого уравнения доказывается с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке и/или теоремы Шаудера о неподвижной точке, а глобальная разрешимость — с помощью теоремы Лере–Шаудера. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует ее классическое решение.

Ключевые слова: задача Коши, классическое решение, локальная разрешимость, глобальная разрешимость, гиперболическое уравнение, полулинейное уравнение, априорные оценки, принцип неподвижной точки.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-50-63

Введение

В настоящей работе получено решение задачи Коши в неявном аналитическом виде для нелинейного гиперболического уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами при частных производных, где n — натуральное число. Оператор в уравнении представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. В задаче Коши неизвестная функция зависит от двух независимых переменных. Используя метод, предложенный в ([1], с. 674), и результаты работы [2], выводится интегральное уравнение. Используя теорему Банаха о неподвижной точке или теорему Шаудера о неподвижной точке, доказывается разрешимость этого уравнения для некоторой окрестности любой точки ($t = 0, x = x_0$). Глобальная разрешимость доказывается с помощью принципа Лере–Шаудера.

Задача Коши для нелинейных гиперболических уравнений с частными производными исследовалась и другими методами, в большинстве случаев методами функционального анализа. Но они, как правило, требуют некоторых условий ограниченности на начальные данные, и позволяют доказать только корректную постановку задачи [3]–[5].

Поступила в редакцию 17.02.2023, после доработки 28.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Следует отметить, что теория задачи Коши для линейных гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными хорошо разработана [5]. Однако, линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведет к содержательному результату. Может оказаться, что линейные уравнения, возникшие в результате линеаризации, сохраняют свою применимость для рассматриваемого физического процесса лишь некоторое конечное время. Более того, с точки зрения физики для нелинейных уравнений математической физики зачастую исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики [6].

1. Постановка задачи

В области $Q = (0,\infty)\times\mathbb{R}$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(\partial_t - a_i\partial_x)\right]u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \tag{1}$$

где a_i $(i=1,\dots,n)$ — различные действительные ненулевые числа, и причем $a_i < a_j$, если $i<j$, F — функция, заданная на множестве $\overline{Q}$, а f — функция, заданная на множестве $[0,\infty)\times\mathbb{R}^2$. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$\partial_t^i u(0,x) = D^i\varphi_i(x), \quad i=0,\dots,n-1, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где φ_i — функции, заданные на действительной оси, а D — оператор обыкновенной производной.

В одномерном линейном случае с постоянными коэффициентами задача (1)–(2) была полностью решена в работах [2], [7]. Многомерные линейные случаи задачи (1)–(2), в которых n четно и $a_i = -a_{i+n/2}$, исследовались в работах [8]–[10] с помощью преобразования Фурье. В статье [11] в случае четного n и $a_i = -a_{i+n/2}$ исследовалась смешанная задача для уравнения (1) в трехмерной цилиндрической области. В работе [12] в линейном многомерном случае изучалось поведение решений задачи Коши (1)–(2) и были построены фундаментальные решения уравнения (1) при $f\equiv 0$. В одномерном линейном случае при $n=2$ с переменными коэффициентами задача (1)–(2) изучалась в работе [13].

Нелинейный частный случай $n=2$, $a_1=-a_2$ исследовался в работах [14]–[17]. В статьях [18]–[20] исследовался частный случай $n=2$, $a_i=(-1)^i$ с экспоненциальной нелинейностью $f(t,x,u)=a(t,x)\exp(u)$ (так называемое обобщенное уравнение Лиувилля).

Отметим также работу [21], в которой исследовался линейный случай более общего оператора — оператора Бесселя.

Уравнения вида (1) встречаются в квантовой теории поля как математические модели скалярного незаряженного поля [22], [23].

2. Интегральное уравнение

Рассмотрим оператор K, действующий по формуле

$$K[u](t,x) = \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}\det(A_k(x+a_kt)) + \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^t\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_k-a_i)\right)^{-1}\times$$

$$\times \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} (x+a_k(t-\tau)-\xi)^{n-2} \left(F(\tau,\xi)+f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\right) d\xi d\tau, \tag{3}$$

и интегральное уравнение

$$u(t,x) = K[u](t,x), \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_1)^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \varphi_0(x) & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_{k-1} & \varphi_1(x) & a_{k+1} & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1)^{n-1} & \dots & (a_{k-1})^{n-1} & \varphi_{n-1}(x) & (a_{k+1})^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi_i \in C^n(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,n$. Функция u принадлежит классу $C^n(\overline{Q})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q}$ и условиям (2) на всей числовой прямой тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (4) в $\overline{Q}$.*

Доказательство. 1) Решение уравнения (1) ищем в виде $u = v+w$, где v является решением однородного линейного гиперболического уравнения n-го порядка

$$\left[\prod_{i=1}^n (\partial_t - a_i\partial_x)\right] v(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q,$$

$$\partial_t^i v(0,x) = D^i\varphi_i(x), \quad i = 0,\dots,n-1, \quad x\in\mathbb{R},$$

а w — это решение уравнения

$$\left[\prod_{i=1}^n (\partial_t - a_i\partial_x)\right] w(t,x) = F(t,x) + f(t,x,(v+w)(t,x)), \quad (t,x)\in Q,$$

$$\partial_t^i w(0,x) = 0, \quad i = 0,\dots,n-1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Результаты работы [2] позволяют записать ([2], теорема 4.1, формула (4.16) для v, теорема 4.3, формулы (4.27), (4.28) для w)

$$v(t,x) = \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^n \det(A_k(x+a_kt)), \quad (t,x)\in\overline{Q},$$

$$w(t,x) = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n (a_k-a_i)\right)^{-1} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} (x+a_k(t-\tau)-\xi)^{n-2}\times$$

$$\times (F(\tau,\xi)+f(\tau,\xi,(v+w)(\tau,\xi)))d\xi d\tau, \quad (t,x)\in\overline{Q},$$

Следовательно, наше искомое решение u должно быть решением нелинейного интегрального уравнения (4).

2) Если функция u есть непрерывное решение уравнения (4), то в силу условий гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi_i \in C^n(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, заключаем, что $u \in C^n(\overline{Q})$. Подставляя представления (4) в уравнение (1), убеждаемся, что функция u удовлетворяет этому уравнению в $\overline{Q}$ и условиям (2) на всей числовой прямой. □

Для теоремы 1 можно сформулировать локальный аналог.

Теорема 2. *Пусть*

$$\Omega = \operatorname{Conv}\left\{(0,l), (0,r), \left(\frac{r-l}{a_n - a_1}, \frac{la_n - a_1 r}{a_n - a_1}\right)\right\},$$

где $l < r$, $l \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, и выполняются условия $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\Omega)$, $\varphi_i \in C^n([l,r])$, $i = 1, \ldots, n$. Функция u принадлежит классу $C^n(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (1) *в Ω условиям* (2) *на отрезке $[l,r]$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения* (4) *в Ω.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Замечание. В теореме 2 множество Ω выбрано таким образом, чтобы начальные данные, заданные на отрезке $[l,r]$, однозначно определяли решение на Ω, т. е. Ω — это область определенности отрезка $[l,r]$. Более подробно этот вопрос изложен в ([5], с. 47–49).

3. Локальная разрешимость

Теорема 3. *Пусть выполняются условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, и f удовлетворяет условию Липшица по последней переменной с постоянной L, т. е. $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$. Тогда уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное решение в некоторой окрестности любой точки $(0, x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для некоторого положительного действительного числа l и точки $(0, x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, введем множество

$$\Omega_{x_0;l} = \operatorname{Conv}\left\{(0, x_0 - l), (0, x_0 + l), \left(\frac{2l}{a_n - a_1}, \frac{x_0 a_n - la_n - la_1 - a_1 x_0}{a_n - a_1}\right)\right\}.$$

1) Существование докажем по схеме, приведенной в работах [24], [25]. Из структуры оператора K следует, что этот оператор непрерывно действует из пространства $C(\Omega_{x_0;l})$ в пространство $C^1(\Omega_{x_0;l})$. А поскольку вложение пространства $C^1(\Omega_{x_0;l})$ в пространство $C(\Omega_{x_0;l})$ компактно ([26], п. 6.8), то заключаем, что оператор $K\colon C(\Omega_{x_0;l}) \mapsto C(\Omega_{x_0;l})$ вполне непрерывен.

В силу (3) и теоремы Фубини нетрудно заметить, что выражение (4) можно записать в виде

$$u(t,x) = K[u](t,x) = \int_0^t K^{(0)}[u](t,x;\tau)\,d\tau + G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l}, \tag{5}$$

где $K^{(0)}$ — ограниченный оператор в пространстве $C(\Omega_{x_0;l})$, G — некоторая вполне определенная функция класса $C(\Omega_{x_0;l})$.

Для заданного $r > 0$ положим

$$B_r(G) := \{v \mid v \in C(\Omega_{x_0;l}) \wedge \|v - G\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant r\},$$

$$M(r) := \sup_{v \in B_r(G)} \|K^{(0)}[v]\|_{C(\Omega_{x_0;l})}. \tag{6}$$

Из структуры оператора $K^{(0)}$ видно, что $M(r) < +\infty$. Из (5) и (6) вытекает неравенство

$$|K[v](t,x) - G(t,x)| \leqslant \int\limits_0^t \left|K^{(0)}[u](t,x;\tau)\right| d\tau \leqslant tM(r), \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l},$$

для любой функции $v \in B_r(G)$. Отсюда следует, что при $t \leqslant T_0 := r/M(r)$ непрерывный компактный оператор K переводит замкнутый выпуклый шар $B_r(G)$ в себя. По теореме Шаудера о неподвижной точке существует хотя бы одно решение уравнения (4) в $C(\Omega_{x_0;l}^{T_0} = \{(t,x) \mid (t,x) \in \Omega_{x_0;l} \wedge t \leqslant T_0\})$.

2) Единственность. Докажем единственность решения уравнения (4) от противного. Пусть существуют два решения $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$ уравнения (4). Обозначим $U = u^{(0)} - u^{(1)}$. Тогда

$$U(t,x) = \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i) \right)^{-1} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \Big\{ (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} \times$$
$$\times \left(f(\tau,\xi,u^{(0)}(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,u^{(1)}(\tau,\xi)) \right) \Big\} d\xi d\tau, \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l}^{T_0}. \quad (7)$$

Из формулы (7) с учетом условия Липшица следует

$$|U(t,x)| \leqslant \frac{L\mathcal{A}}{(n-2)!} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \left| (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} U(\tau,\xi) \right| d\xi d\tau, \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l}^{T_0}, \quad (8)$$

где $\mathcal{A} = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \left| \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i) \right|^{-1}$. Применяя обобщение известного неравенства Гронуолла–Беллмана ([27], с. 325; [28], с. 401–403) к оценке (8), получаем

$$|U(t,x)| \leqslant 0 \times C_{\exp} = 0, \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l}^{T_0},$$

где $C_{\exp}$ — неотрицательная константа, зависящая только от чисел a_k $(k = 1, \ldots, n)$, x_0, n, L и l. Отсюда следует, что $u^{(0)} = u^{(1)}$, т. е. оба решения тождественно равны. Значит, решение уравнения (4) единственно. □

Как видно из доказательства теоремы 3, для существования решения липшицевость функции f вообще не нужна, но она нужна для доказательства единственности и может быть ослаблена вышеприведенной теоремой. Также заодно можно ослабить условия гладкости функций φ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, и f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной с измеримой локально-интегрируемой с квадратом функцией k, т. е.*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|, \quad k \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad k(t,x) \geqslant 0.$$

Тогда уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение в некоторой окрестности любой точки $(0, x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Выберем две функции u_1 и u_2 из класса $C(\Omega_{x_0;l})$ и подсчитаем

$$\|K[u_1]-K[u_2]\|_{C(\Omega_{x_0;l})} = \left\| \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n (a_k-a_i)\right)^{-1} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} (x+a_k(t-\tau)-\xi)^{n-2}\times \right.$$
$$\left. \times\left(f(\tau,\xi,u_1(\tau,\xi))-f(\tau,\xi,u_2(\tau,\xi))\right)d\xi d\tau\right\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \tfrac{\mathcal{A}}{(n-2)!}\times$$
$$\times\left\|\int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} |x+a_k(t-\tau)-\xi|^{n-2}k(\tau,\xi)|u_1(\tau,\xi)-u_2(\tau,\xi)|d\xi d\tau\right\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \frac{\mathcal{A}\|u_1-u_2\|_{C(\Omega_{x_0;l})}}{(n-2)!}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^n\left\|\sqrt{\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)}|x+a_k(t-\tau)-\xi|^{2n-4}d\xi\right)\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)}(k(\tau,\xi))^2d\xi\right)}\right\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mathcal{A}\|u_1-u_2\|_{C(\Omega_{x_0;l})}\|k\|_{L^2(\Omega_{x_0;l})}}{(n-2)!}\left\|\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{|(x+a_kt)^{2n-2}-x^{2n-2}|}{2(n-1)(2n-3)a_k}}\right\|_{C(\Omega_{x_0;l})}. \tag{9}$$

Пользуясь оценкой (9) заключаем, что оператор $K\colon C\left(\Omega_{x_0;l}\right)\mapsto C\left(\Omega_{x_0;l}\right)$ сжимающий, если l достаточно мало. Это следует из того, что функция

$$g\colon [0,\infty)\ni l\mapsto \left\|\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{|(x+a_kt)^{2n-2}-x^{2n-2}|}{2(n-1)(2n-3)a_k}}\right\|_{C(\Omega_{x_0;l})}\in\mathbb{R} \tag{10}$$

непрерывная и возрастающая, причем $g(0)=0$ и $g(+\infty)=+\infty$. А значит, число l, удовлетворяющее неравенству $\mathcal{A}\|u_1-u_2\|_{C(\Omega_{x_0;l})}\|k\|_{L^2(\Omega_{x_0;l})}((n-2)!)^{-1}g(l)<1$, может быть найдено методом бинарного поиска.

Применив теорему Банаха о неподвижной точке к оператору $K\colon C\left(\Omega_{x_0;l}\right)\mapsto C\left(\Omega_{x_0;l}\right)$, заключаем, что уравнение $u=K[u]$, $u\in C\left(\Omega_{x_0;l}\right)$ имеет единственное решение. □

На самом деле, для существования локального непрерывного решения интегрального уравнения (4) от требования липшицевости функции f можно отказаться ценой ее непрерывной дифференцируемости.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C(\overline{Q})$, $\varphi\in C(\mathbb{R})$, $i=1,\dots,n$. Тогда уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное решение в некоторой окрестности любой точки $(0,x_0)$, где $x_0\in\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для $l>0$ и $\mu>0$ определим

$$X_{\mu;l}=\{u\mid u\in C(\Omega_{x_0;l})\wedge\|u\|_{C(\Omega_{x_0;l})}\leqslant\mu\wedge u(0,\bullet)=D^i\varphi,\quad i=0,\dots,n-1\}$$

Мы утверждаем, что если μ достаточно велико, а l достаточно мало, то $K\colon X_{\mu;l}\mapsto X_{\mu;l}$. Действительно, поскольку f — непрерывная функция, то она ограничена и равномерно непрерывна на компакте $\Omega_{x_0;l;\mu}=\Omega_{x_0;l}\times[-\mu,\mu]$. Пусть $\Phi=\|f\|_{C(\Omega_{x_0;l;\mu})}$. Легко видеть, что для любых $\widetilde{l}<l$ и $\widetilde{\mu}<\mu$ верно неравенство $\|f\|_{C\left(\Omega_{x_0;\widetilde{l};\widetilde{\mu}}\right)}\leqslant\Phi$. Обозначим

$$\Theta_l^{(1)} = \left\| \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} \det(A_k(x + a_k t)) \right\|_{C(\Omega_{x_0;l})},$$

$$\Theta_l^{(2)} = \left\| \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^n (a_k - a_i) \right)^{-1} \int_0^{x+a_k(t-\tau)} (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} F(\tau, \xi) d\xi d\tau \right\|_{C(\Omega_{x_0;l})}. \tag{11}$$

При уменьшении l без изменения величин $\Theta_l^{(1)}$ и $\Theta_l^{(2)}$ в формулах (11) знаки $=$ заменяются на $\geqslant$.

Теперь для $u \in X_{\mu;l}$ рассмотрим оценку вида (9)

$$\|K[u]\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \Theta_l^{(1)} + \Theta_l^{(2)} + \frac{\mathcal{A}\Phi g(l)\sqrt{\operatorname{mes}(\Omega_{x_0;l})}}{(n-2)!},$$

где mes — стандартная мера Лебега, g — функция, заданная формулой (10). Нам небходимо выполнение неравенства

$$\|K[u]\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \Theta_l^{(1)} + \Theta_l^{(2)} + \frac{\mathcal{A}\Phi g(l)\sqrt{\operatorname{mes}(\Omega_{x_0;l})}}{(n-2)!} \leqslant \mu, \quad u \in X_{\mu;l}, \tag{12}$$

чтобы выражение $K[u] \in X_{\mu;l}$ было истинным. Число l такое, что неравенство (12) будет верным и может быть найдено по следующщему алгоритму.

- Присвоить $l = 1$ (или другому любому действительному числу).
- Вычислить $\Theta_l^{(1)}$ и $\Theta_l^{(1)}$ по формулам (11).
- Присвоить $\mu = 2\left(\Theta_l^{(1)} + \Theta_l^{(2)}\right)$ $\left(\text{отсюда получаем } \Theta_l^{(1)} + \Theta_l^{(2)} = \mu/2\right)$.
- Используя алгоритм бинарного поиска, выбрать (уменьшить) l таким, чтобы было верно неравенство $\mathcal{A}\Phi g(l)\sqrt{\operatorname{mes}(\Omega_{x_0;l})}((n-2)!)^{-1} \leqslant \mu/2$. Заметим, что уменьшение l оставляет в силе предыдущие неравенства.

Поскольку константа l выбрана такой, что неравенство (12) выполняется, и $K[u](0, \bullet) = D^i\varphi$, $i = 0, \dots, n-1$, то $K[u] \in X_{\mu;l}$.

Так как f — непрерывно-дифференцируемая функция, то ее частные производные ограничены на компакте $\Omega_{x_0;l;\mu}$, тогда f удовлетворяет на этом компакте условию Липшица с некоторой постоянной L, и в таком случае верно неравенство (9), где $k \equiv L$. Снова используя алгоритм бинарного поиска, уменьшаем l так, чтобы для любых $u_1, u_2 \in X_{\mu;l}$ выполнялось неравенство

$$\|K[u_1] - K[u_2]\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{C(\Omega_{x_0;l})}. \tag{13}$$

При этом неравенства (12) останутся в силе.

Выберем любое $u_0 \in X_{\mu;l}$. Если мы рекуррентно определим $u_m = K[u_{m-1}]$, $m \in \mathbb{N}$, то по доказательству теоремы Банаха о неподвижной точке ([1], с. 534) $u_m \to u$ в пространстве $C(\Omega_{x_0;l})$, $u = K[u]$. Более того, поскольку $\|u_m\|_{C(\Omega_{x_0;l})} \leqslant \mu$, то $u \in X_{\mu;l}$. Единственность следует из (13). □

4. Локальное классическое решение

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда задача Коши* (1), (2) *имеет единственное классическое решение в некоторой окрестности любой точки* $(0, x_0)$, *где* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство следует из теорем 2 и 5.

5. Априорные оценки

Пусть при $\lambda \in [0, 1]$ функция u_λ является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры

$$u_\lambda(t, x) = \lambda K[u_\lambda](t, x), \quad (t, x) \in \Omega_{x_0;l}. \tag{14}$$

Тогда при условиях теоремы 4

$$\begin{aligned}
|u_\lambda(t,x)| = |\lambda K[u_\lambda](t,x)| &\leqslant \left| \frac{\lambda}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} \det(A_k(x + a_k t)) \right| + \\
&+ \frac{\mathcal{A}\lambda}{(n-2)!} \left| \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \Big| (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} (F(\tau,\xi) + f(\tau,\xi,u_\lambda(\tau,\xi))) \Big| d\xi d\tau \right| \leqslant \\
&\leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} C_\varphi^{(k)} \|\varphi_i\|_{C([x_0-l, x_0+l])} + \lambda C_F \|F\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + \frac{\mathcal{A}\lambda}{(n-2)!} \times \\
&\times \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \Big| (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} (f(\tau,\xi,u_\lambda(\tau,\xi) - f(\tau,\xi,0) + f(\tau,\xi,0))) \Big| d\xi d\tau \leqslant \\
&\leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} C_\varphi^{(k)} \|\varphi_i\|_{C([x_0-l, x_0+l])} + \lambda C_F \|F\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + \lambda C_{f,1} \|f_1\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + \\
&+ \frac{\mathcal{A}\lambda}{(n-2)!} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \left| (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} k(\tau,\xi) u_\lambda(\tau,\xi) \right| d\xi d\tau \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} C_\varphi^{(k)} \|\varphi_i\|_{C([x_0-l, x_0+l])} + C_F \|F\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + C_{f,1} \|f_1\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + \\
&+ \frac{\mathcal{A}}{(n-2)!} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} \left| (x + a_k(t-\tau) - \xi)^{n-2} k(\tau,\xi) u_\lambda(\tau,\xi) \right| d\xi d\tau, \quad (t,x) \in \Omega_{x_0;l},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$C_\varphi^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad C_F = C_{f,1} := \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_0^{x+a_k(t-\tau)} |x + a_k(t-\tau) - \xi|^{n-2} \, d\xi \right| d\tau$$

— положительные константы, зависящие только от чисел a_k $(k = 1, \ldots, n)$, x_0, n, L, l, и f_1 — функция, заданная формулой $f_1 \colon \overline{Q} \ni (t, x) \mapsto f(t, x, 0) \in \mathbb{R}$. Применив к неравенству (15) многомерную лемму Гронуолла ([28], с. 401–403), получим

$$|u_\lambda(t,x)| \leqslant C_{\exp}\left(\sum_{k=1}^{n} C_\varphi^{(k)}\|\varphi_i\|_{C([x_0-l,x_0+l])} + C_F\|F\|_{C(\Omega_{x_0;l})} + C_{f,1}\|f_1\|_{C(\Omega_{x_0;l})}\right),\ (t,x)\in\Omega_{x_0;l}, \tag{16}$$

где константа $C_{\exp}$ зависит только от функции k и чисел a_k $(k=1,\ldots,n)$, x_0, n, L, l.

6. Глобальная разрешимость

Таким образом, для решения $u=u_\lambda$ уравнения (14) с непрерывным компактным оператором K для любого $\lambda\in[0,1]$ при выполнении условий гладкости $f\in C(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C(\overline{Q})$, $\varphi_i\in C^1(\mathbb{R})$, $i=1,\ldots,n$, и условия типа Липшица–Каратеодори $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$, где $k\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, имеет место априорная оценка (16), в которой константы $C_{\exp}$, $C_\varphi^{(k)}$ $(k=1,\ldots,n)$, C_F, $C_{f,1}$ не зависят от λ. Следовательно, по теореме Лере–Шаудера ([29], с. 406) при выполнении этих условий гладкости и условия типа Липшица–Каратеодори уравнение (4) имеет хотя бы одно решение $u\in C(\Omega_{x_0;l})$, единственность которого в данном случае доказывается аналогично теореме 3.

Теперь мы можем построить непрерывное решение u уравнения (4) на множестве $\overline{Q}$ следующим образом. Для каждого числа $j\in\mathbb{N}$ определим функцию $u^{(j)}$ как решение уравнения (4) на множестве $\Omega_{0;j}$. Кроме того, мы предполагаем, что функции $u^{(j)}$ продолжены каким-нибудь образом по непрерывности вне множества $\Omega_{0;j}$. Мы утверждаем, что $u^{(\infty)}=\lim\limits_{j\to\infty}u^{(j)}$ является решением уравнения (4) на множестве $\overline{Q}$.

Из доказательства теоремы 3, вышеприведенных рассуждений и конечной скорости распространения колебаний [5] легко видеть, что для любого $k\in\mathbb{N}$ имеет место равенство $\left(u^{(j+k)}-u^{(j)}\right)\Big|_{\Omega_{0;j}}\equiv 0$. Так как $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Omega_{0;j}=\overline{Q}$, то топология пространства Фреше $C(\overline{Q})$ может быть задана счетным семейством полунорм $\mathfrak{p}_j(w)=\|w\|_{C(\Omega_{0;j})}$. Очевидно, что последовательность $(u^{(j)})$ является последовательностью Коши относительно каждой из таких полунорм. Итак, функция $u^{(\infty)}$ определена корректно. Возьмем одну точку $(t_0,x_0)\in\overline{Q}$ и любое натуральное число j такое, что $(t_0,x_0)\in\Omega_{0;j}$, и в силу $u^{(j)}\big|_{\Omega_{0;j}}=u^{(\infty)}\big|_{\Omega_{0;j}}$ получаем

$$\begin{aligned} u^{(\infty)}(t_0,x_0) &= u^{(j)}(t_0,x_0)=K[u^{(j)}](t_0,x_0)=\frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}\det(A_k(x+a_kt))+\\ &+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_k-a_i)\right)^{-1}\int_0^{x+a_k(t-\tau)}(x+a_k(t-\tau)-\xi)^{n-2}\times\\ &\times\left(F(\tau,\xi)+f(\tau,\xi,u^{(j)}(\tau,\xi))\right)d\xi d\tau=\frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}\det(A_k(x+a_kt))+\\ &+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_k-a_i)\right)^{-1}\int_0^{x+a_k(t-\tau)}(x+a_k(t-\tau)-\xi)^{n-2}\times\\ &\times\left(F(\tau,\xi)+f(\tau,\xi,u^{(\infty)}(\tau,\xi))\right)d\xi d\tau=K[u^{(\infty)}](t_0,x_0). \end{aligned}$$

В силу произвольности (t_0, x_0) заключаем, что $u^{(\infty)}$ является решением уравнения (4) на множестве $\overline{Q}$. Докажем единственность решения уравнения (4) от противного. Пусть уравнение (4) имеет два решения v и w на множестве $\overline{Q}$. Повторяя доказательство теоремы 3, приходим к равенству $(v-w)|_{\Omega_{0;l}} \equiv 0$. Отсюда следует, что в силу произвольности $l > 0$ $v - w \equiv 0$ на множестве $\overline{Q}$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной с измеримой локально-интегрируемой с квадратом функцией k, т. е.*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|, \quad k \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad k(t,x) \geqslant 0.$$

Тогда решение уравнения (4) *существует и единственно в классе $C(\overline{Q})$.*

Доказательство следует из вышеизложенных результатов.

7. Глобальное классическое решение

Теорема 8. *Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной с измеримой локально-интегрируемой с квадратом функцией k, т. е.*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|, \quad k \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad k(t,x) \geqslant 0.$$

Тогда задача Коши (1), (2) *имеет единственное решение в классе $C^n(\overline{Q})$.*

Доказательство следует из теорем 1 и 7. □

8. Неединственное решение

Ранее было показано (см. теорему 3 и раздел 6), что условие типа Липшица–Каратеодори является достаточным для единственности решения, если оно существует. В этом разделе покажем, что его нарушение может приводить к существованию неединственного решения.

Выберем функцию f в виде

$$f(t,x,z) := z^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{17}$$

и зададим

$$F(t,x) = 0, \quad \varphi_i \equiv 0. \tag{18}$$

Легко видеть, что задача (1)–(2), (17), (18) допускает тривиальное решение $u \equiv 0$. Чтобы найти нетривиальные решения задачи (1)–(2), (17), (18), рассмотрим

$$u(t,x) = u(t) = \beta t^\gamma, \; (t,x) \in \overline{Q}, \tag{19}$$

где β, γ — некоторые действительные числа. Подставляя (19) в уравнение (1), получаем соотношение

$$t^{\gamma-n}\beta \operatorname{FactorialPower}(\gamma, n) = \beta^\alpha t^{\alpha\gamma}, \tag{20}$$

где использовано обозначение

$$\operatorname{FactorialPower}(x,n) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)},$$

Γ — гамма-функция. Из (20) следует система уравнений

$$\gamma - n = \gamma\alpha, \quad \beta \operatorname{FactorialPower}(\gamma, n) = \beta^\alpha,$$

которая имеет решение

$$\beta = \left(\mathrm{FactorialPower}\left(\frac{n}{1-\alpha}, n\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \gamma = \frac{n}{1-\alpha}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), получаем функцию

$$u_p(t,x) = \left(\mathrm{FactorialPower}\left(\frac{n}{1-\alpha}, n\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{n}{1-\alpha}}. \tag{22}$$

Непосредсвенной проверкой убеждаемся, что функция (22) удовлетворяет начальным условиям (2), (18). Значит, мы построили нетривиальное решение задачи (1)–(2), (17), (18), которое представлено формулой (22). Более того, можно легко показать, что склеенное (составное) решение ([30], с. 14–15)

$$u_{p;s}(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in [0,s); \\ u_p(t-s,x), & t \in [s,+\infty), \end{cases}$$

с параметром $s > 0$ также удовлетворяет задаче (1)–(2), (17), (18). Таким образом, построено бесконечное множество нетривиальных классичеких решений задачи (1)–(2), (17), (18).

Отметим, что в задаче (1)–(2), (17), (18) нелинейность $u \mapsto u^\alpha$ является недифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R}$. Именно это делает невозможным построение единственного локального классического решения задачи (1)–(2), (17), (18), поскольку в случае непрерывно-дифференцируемой нелинейности можно построить единственное локальное классическое решение согласно теореме 6.

Данный пример еще показателен тем, что из него следует, что условие типа Липшица $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \le k(t,x)|z_1-z_2|$ нельзя ослабить до условия типа Гёльдера $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \le k(t,x)|z_1-z_2|^\lambda$ с показателем $\lambda \in (0,1)$ и сохранить при этом однозначную разрешимость задачи Коши.

9. Взрывное решение

Рассмотрим задачу Коши (1)–(2) при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered} n=2, \quad f(t,x,z) := c_0|z|^\gamma, \quad \gamma > 1, \quad c_0 > 0, \quad F(t,x) = 0, \\ u(0,x) = \varphi_0(x) := u_0 = \mathrm{const} > 0, \quad \partial_t u(0,x) = D\varphi_1(x) := u_1 = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Ее решение ищем в виде

$$u(t,x) = u(t), \ (t,x) \in \overline{Q}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в уравнение (1) и начальные условия (2), учитывая (23), получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''(t) = c_0|u(t)|^\gamma, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{25}$$

По теореме Пеано ([30], с. 56) существует хотябы одно решение задачи (25) на интервале $[0,T)$, которое, очевидно, удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2) при (23). С другой стороны, видно, что задача (25) удовлетворяет условиям (F1)–(F3) ([31], теорема 1.1) с $\beta = \gamma$ и $\alpha = 0$. Поэтому правый максимальный интервал существования $[0,T_*)$ решения u задачи (25) конечен (т. е. $T_* < +\infty$) и

$$\lim_{t\to T_*-0} \partial_t u(t,x) := \lim_{t\to T_*-0} u'(t) = +\infty.$$

Более того, поскольку верно также условие (F4) ([31], теорема 1.1), дополнительно имеем

$$\lim_{t\to T_*-0} u(t,x) := \lim_{t\to T_*-0} u(t) = +\infty.$$

В похожем случае

$$\begin{gathered} n \geqslant 2, \quad f(t,x,z) := g(z), \quad F(t,x) = 0, \\ \partial_t^i u(0,x) = D^i\varphi_i(x) := 0, \quad i = 0,\dots,n-1, \quad x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{26}$$

также можно рассмотреть (24) для отыскания решения задачи Коши (1)–(2). В свою очередь, это приводит к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$D^n u(t) = g(u(t)), \quad D^i u(0) = 0, \quad i = 0,\dots,n-1. \tag{27}$$

В работе [19] приведены условия для существования и разрушения нетривиального решения u задачи (27). Так, например, положим

$$n = 3, \quad g(z) = z^2 + 1. \tag{28}$$

Тогда проверим условия, указанные в статье [19].

- Условие 1.3 ([19]): $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- Условие 1.4 ([19]): можно выбрать $m = 0$, тогда функция $x \mapsto x^m g(x)$ ограничена при $x \to 0+0$.
- Условие 1.6 ([19]): $\int\limits_0^1 g(s)s^{-(n-2)/(n-1)}ds = \int\limits_0^1 (1+s^2)s^{-1/2}ds = 12/5 < \infty$.
- Условие $g \in K_n^*$ ([19]): $g^* \equiv g$, поэтому $G^*/G \equiv 1 < \infty$.
- Условие 1.8 ([19]):

$$\phi(x) = x^{n-2}\left(\frac{1}{x^{n-2}}\int_0^x g(s)s^{-\frac{n-2}{n-1}}(x-s)^{n-2}\,ds\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{2\sqrt[3]{2}x^{4/3}\left(3x^2+35\right)^{2/3}}{105^{2/3}},$$

$$\int\limits_0^\infty (\phi(x))^{-\frac{1}{n-1}}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{105}}{2^{2/3}x^{2/3}\sqrt[3]{3x^2+35}}\,dx = \frac{\sqrt[6]{105}\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)}{2\Gamma(2/3)} \approx 7.91264 < \infty.$$

Значит, согласно теореме 1.4 из [19] задача (27) при (28) имеет взрывное решение и, следовательно, задача Коши (1)–(2) при (26) и (28) допускает взрыв решения за конечное время.

Для построения явного примера можно рассмотреть случай

$$\begin{gathered} n = 2, \quad f(t,x,z) := 2z^3, \quad F(t,x) = 0, \\ u(0,x) = \varphi_0(x) := u_0 = 1, \quad \partial_t u(0,x) = D\varphi_1(x) := -1, \end{gathered}$$

при котором задача имеет явное классическое решение $u_*^1(t,x) = \dfrac{1}{1-t}$ на множестве $[0,1)\times\mathbb{R}$ (строго обосновывается непосредственной проверкой). Имеем

$$\lim_{t\to 1-0} u_*^1(t,x) = +\infty, \quad \lim_{t\to 1-0} \partial_t u_*^1(t,x) = +\infty, \quad u_*^1 \in C^2([0,1)\times\mathbb{R}).$$

Однако такое решение можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость (по аргументу t), за исключением точки $t = 1$, в которой будет полюс первого порядка.

Литература

[1] Evans L.C. *Partial differential equations*, 2nd edition (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2010).

[2] Корзюк В.И., Козловская И.С. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных*, Дифференц. уравнения **48** (5), 700–709 (2012).

[3] Leray J. *Hyperbolic Differential Equations* (Institute for Advanced Study, Princeton, N.Y., 1953).

[4] Петровский И.Г. *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen*, Матем. сб. **2(44)** (5), 815–870 (1937).

[5] Рождественский В.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, 2-е изд. (Наука, М., 1978).

[6] *Физическая энциклопедия*: *в 5 т. Т.* 3 *под ред. Прохорова А.М.* (Большая российская энциклопедия, М., 1992).

[7] Корзюк В.И., Козловская И.С., Козлов А.И. *Задача Коши для нестрого гиперболического уравнения на полуплоскости с постоянными коэффициентами*, Дифференц. уравнения **51** (6), 714–725 (2015).

[8] Петровский И.Г. *On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations*, Матем. сб. **17(59)** (3), 289–370 (1945).

[9] Гальперн С.А., Кондрашов В.Е. *Задача Коши для дифференциальных операторов, распадающихся на волновые множители*, Тр. ММО **16**, 109–136 (1967).

[10] Korzyuk V., Nguyen V.V., Minh N.T. *Classical solution of the Cauchy problem for biwave equation: Application of Fourier transform*, Math. Modelling Anal. **17** (5), 630–641 (2012).

[11] Барановская С.Н., Юрчук Н.И., Чарие Коку *Ослабленное на оси классическое решение центрально-симметрической смешанной задачи для трехмерного гиперболического уравнения четного порядка в пространствах Гёльдера*, Дифференц. уравнения **42** (10), 1349–1355 (2006).

[12] Гальперн С.А. *Фундаментальные решения и лакуны квазигиперболических уравнений*, УМН **29** (2(176)), 154–165 (1974).

[13] Корзюк В.И., Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами*, Дифференц. уравнения **53** (1), 77–88 (2017).

[14] Korzyuk V.I., Rudzko J.V. *Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation*, в сб.: *XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям* (*Еругинские чтения*–2022): *Матер. международн. научн. конф.* Ч.2. *Новополоцк*, под ред. Козлова А.А., 38–39 (Полоцкий гос. ун-т, Новополоцк, 2022).

[15] Корзюк В.И., Рудько Я.В. *Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом*, Дифференц. уравнения **58** (2), 174–184 (2022).

[16] Korzyuk V.I., Rudzko J.V. *Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation*, Dokl. National Acad. Sci. Belarus **67** (1), 14–19 (2023).

[17] Korzyuk V.I., Rudzko J.V. *Classical solution of the initial-value problem for a quasilinear wave equation with discontinuous initial conditions*, Dokl. National Acad. Sci. Belarus **67** (3), 183–188 (2023).

[18] Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М. *Задача Коши для обобщенного нелинейного уравнения Лиувилля*, Дифференц. уравнения **47** (12), 1741–1753 (2011).

[19] Mydlarczyk W. *A singular initial value problem for the equation* $u^{(n)}(x) = g(u(x))$, Annal. Polonici Math. **68**, 177–189 (1998).

[20] Джорджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. *О глобальных решениях задачи Коши для уравнения Лиувилля* $\varphi_{tt}(t,x) - \varphi_{xx}(t,x) = 1/2m \exp \varphi(t,x)$, ДАН СССР **243** (2), 318–320 (1978).

[21] Каримов Ш.Т. *Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя*, Изв. вузов. Матем. (8), 27–41 (1995).

[22] Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. *Symmetry and some exact solutions of non-linear polywave equations*, Europ. Lett. **31** (2), 75–79 (2007).

[23] Фущич В.И. *Теоретико-алгебраические исследования в математической физике*: Сб. научн. тр. под ред. Фущича В.И., 6–28 (Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1981).

[24] Джохадзе О.М. *Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны*, Дифференц. уравнения **58** (5), 591–606 (2022).

[25] Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М. *О разрешимости смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения*, Матем. заметки **108** (1), 137–152 (2020).

[26] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1983).
[27] Pachpatte B.G. *Inequalities for Differential and Integral Equations* (Elsevier Sci., 1998).
[28] Mitrinović D.S, Pečarić J.E., Fink A.M. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives* (Springer Netherlands, Dordrecht, 1991).
[29] Треногин В.А. *Функциональный анализ*, 3-е изд. (ФИЗМАТЛИТ, М., 2002).
[30] Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения* (БГУ, Минск, 2012).
[31] Li D., Huang H. *Blow-up phenomena of second-order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **276** (1), 184–195 (2002).

Виктор Иванович Корзюк

Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, д. 11, г. Минск, 220072, Республика Беларусь;
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,

e-mail: korzyuk@bsu.by

Ян Вячеславович Рудько

Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, д. 11, г. Минск, 220072, Республика Беларусь;
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,

e-mail: janycz@yahoo.com

V.I. Korzyuk and J.V. Rudzko

Classical solution of the Cauchy problem for a semilinear hyperbolic equation in the case of two independent variables

Abstract. In the upper half-plane, we consider a semilinear hyperbolic partial differential equation of order higher than two. The operator in the equation is a composition of first-order differential operators. The equation is accompanied with Cauchy conditions. The solution is constructed in an implicit analytical form as a solution of some integral equation. The local solvability of this equation is proved by the Banach fixed point theorem and/or the Schauder fixed point theorem. The global solvability of this equation is proved by the Leray–Schauder fixed point theorem. For the problem in question, the uniqueness of the solution is proved and the conditions under which its classical solution exists are established.

Keywords: Cauchy problem, classical solution, local solvability, global solvability, hyperbolic equation, semilinear equation, a priori estimate, fixed point principle.

Viktor Ivanovich Korzyuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganov str., Minsk, 220072 Republic of Belarus;
Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,

e-mail: korzyuk@bsu.by

Jan Viaczaslavavicz Rudzko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganov str., Minsk, 220072 Republic of Belarus;
Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,

e-mail: janycz@yahoo.com