Известия вузов. Математика
2024, № 3, с. 38–49

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.К. ДУРДИЕВ

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Аннотация. В данной работе изучены прямая и две обратные задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В прямой задаче рассмотрена задача Трикоми для этого уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Неизвестным обратной задачи является переменный коэффициент при младшей производной в параболическом уравнении. Для его определения изучаются две обратные задачи: относительно решения, определяемого в параболической части области, задаются интегральное условие переопределения (обратная задача 1) и одно простое наблюдение в фиксированной точке (обратная задача 2). Доказаны теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение смешанного типа, характеристика, функция Грина, принцип сжатых отображений.

УДК: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-38-49

Введение

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами в областях, где гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками $y + x = 0$, $y - x = 1$ и характеристической линией изменения типа $x = 0$ ([1]–[5], см. также библиографию в [3], [4]). Методы решения прямых и обратных задач, связанных с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа и неизвестной правой части (линейная обратная задача) этого уравнения в прямоугольной области были предложены в [6] (см. также работы [7]–[10]). Широкий класс прямых начально–краевых и обратных задач — по определению решения вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, и правая часть этих уравнений исследованы в работах [11]–[14].

Обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Отметим, что обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [15]–[22] (см. также библиографию в монографиях [18], [19]). В [20]–[22] рассматривались задачи восстановления сверточного ядра в параболических уравнениях, описывающих явления запаздывания, на основе условий переопределения,

Поступила в редакцию 09.02.2023, после доработки 27.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

использованных в этой работе. С различными обратными задачами для уравнений гиперболического типа второго порядка можно познакомиться в монографиях [23]–[26] (см. также библиографию в них).

Данная статья продолжает исследования работы [27] автора, в которой изучены вопросы разрешимости обратной задачи определения переменного коэффициента при младшем члене гиперболического уравнения для смешанного параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа.

1. Постановка задачи

Пусть Ω_T — область на плоскости переменных x, y, состоящая из двух частей, т. е. $\Omega_T = \Omega_{1T} \bigcup \Omega_{2T}$, где

$$\Omega_{1T} = \Big\{(x,y) :\, 0 < x \le T,\, 0 < y < 1\Big\},\quad \Omega_{2T} = \Big\{(x,y) :\, -y < x \le y + T,\, -\frac{T}{2} < y < 0\Big\},$$

T — фиксированное положительное число. В этой области рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy} - q(x)u = 0, \quad y > 0; \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа (1) линия изменения типа $y = 0$ не является характеристикой.

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=1} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{y=-x} = \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \tag{3}$$

В (2), (3) функции $\varphi(y)$, $\psi(x)$ считаются заданными.

Определение. Решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C^1(\overline{\Omega_T}) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T}) \cap C^2(\Omega_{2T})$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В обратной задаче предполагается неизвестным коэффициент $q(x)$ уравнения (1). В данной работе мы изучим две обратные задачи определения этого коэффициента в зависимости от задаваемых дополнительных условий относительно решения прямой задачи (1)–(3).

Обратная задача 1. Определить $q(x)$ по условию

$$\int\limits_0^1 h(y)u(x,y)dy = f(x), \quad x \in [0,T]\,. \tag{4}$$

Обратная задача 2. Определить $q(x)$ по условию

$$u(x,y_0) = g(x), \quad y_0 \in (0,1)\,. \tag{5}$$

В (4), (5) $h(y)$, $f(x)$, $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

(B1) $\varphi(y) \in C^3[0,1]$, $\psi(x) \in C^2\left[0, \frac{T}{2}\right]$;

(B2) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi''(1) = 0$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$;

(B3) $h(y) \in C^2[0,1]$, $h(0) = h'(0) = 0$, $h(1) = h'(1) = 0$, $f(x) \in C^1[0,T]$,

$$\int\limits_0^1 h(y)\varphi(y)dy = f(0), \quad |f(x)| \geq f_0 > 0, \quad x \in [0,T];$$

(B4) $g(x) \in C^1[0,T]$, $\varphi(y_0) = g(0)$, $|g(x)| \geq g_0 > 0$, $x \in [0,T]$.

2. Исследование прямой задачи

Предположим, что функция $q(x)$ известна и $q(x) \in C\,[0,T]$. Введем обозначения $\tau(x) := u(x,0)$, $\nu(x) = \dfrac{\partial}{\partial y}u(x,0)$. Тогда в силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения решение уравнения (1) в области Ω_{2T} может быть записано по формуле Даламбера:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds. \tag{6}$$

С учетом равенства (3) и условий (B2) из этого соотношения следует

$$\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^x \nu(s)ds, \quad x \in [0,T]. \tag{7}$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\tau'(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \nu(x), \quad x \in [0,T]. \tag{8}$$

Равенства (6), (7) можно условно назвать основными соотношениями для $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Введем обозначения

$$G_k(x-\xi,y,\eta) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right) + (-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right)\right], \; k = 1,2.$$

Используя функцию Грина $G_1(x-\xi,y,\eta)$ первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1T}, решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD} = \tau(x)$ представим в виде интегрального уравнения

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi + \int\limits_0^x q(\xi)\int_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{9}$$

Отметим, что функции $G_k(x-\xi,y,\eta)$, $k=1,2$, имеют эквивалентные представления

$$G_1(x-\xi,y,\eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-(n\pi)^2(x-\xi)\right]\sin n\pi y \sin n\pi\eta,$$

$$G_2(x-\xi,y,\eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-(n\pi)^2(x-\xi)\right]\cos n\pi y \cos n\pi\eta \tag{10}$$

и являются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_{1T} ([28], с. 200–204).

Найдем производные первых двух слагаемых в правой части (9), используя очевидные соотношения:

$$G_{1y}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2\eta}(x-\xi,y,\eta),$$
$$G_{1\eta}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2y}(x-\xi,y,\eta), G_{2\xi}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2yy}(x-\xi,y,\eta). \tag{11}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^1 G_{1y}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=-\int\limits_0^1 G_{2\eta}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=$$
$$=G_2(x,y,0)\varphi(0)-G_2(x,y,1)\varphi(1)+\int\limits_0^1 G_2(x,y,\eta)\varphi'(\eta)d\eta.$$

Интегрируя (11) по частям, вычислим производную по y следующего слагаемого формулы (9):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{2y}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_0^x G_{2\xi}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-G_2(x,y,0)\tau(0)-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,y,0)\tau'(\xi)d\xi.$$

Используя эти соотношения, дифференцируем теперь (9) по y и положим $y=0$. Так как $(\partial/\partial y)u(x,0)=\nu(x)$, с учетом условий согласования (B2) и равенства (8) находим

$$\nu(x)=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu(\xi)+$$
$$+\int_0^x q(\xi)\int_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi,\quad x\in[0,T]. \tag{12}$$

Исключая функцию $\tau(x)$ из (9) с помощью равенства (7), получим интегральное уравнение

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+2\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\psi\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi \nu(s)dsd\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{13}$$

Заметим, что для функции $G_2(x-\xi,0,0)$ имеет место равенство

$$G_2(x-\xi,0,0)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}+\frac{2}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right). \tag{14}$$

Уравнения (12), (13) представляют систему линейных интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода для определения неизвестных функций $u(x,y)$, $\nu(x)$. В силу формулы (14) интегральное уравнение (12) имеет слабую полярную особенность. Известно, что система уравнений (12) и (13) разрешима в классе непрерывных в $\overline{\Omega}_{1T}$ функций. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений и $\nu(0)=0$ в силу $\lim\limits_{x\to 0} G_2(x,0,\eta)=0$ для $\eta\in(0,1)$.

Учитывая равенство

$$\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta=\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta,$$

с помощью интегрирования по частям, используя условия (B1), (B2), находим

$$\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta. \tag{15}$$

Предполагая теперь существование производной у решения $\nu(x)$, с учетом условий (B1), (B2) и предыдущих соотношений получим уравнение

$$\nu'(x)=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu'(\xi)+$$

$$+\int_0^x q(\xi)\int_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi,\quad x\in(0,T],$$

которое также разрешимо в классе непрерывных функций вместе с уравнением (13). Таким образом, $\nu(x)\in C[0,T]\bigcap C^1(0,T]$. По найденной функции $\nu(x)$ функция $\tau(x)$ находится из формулы (8). В силу условий (B2) и $\nu(x)\in C^1(0,T]$ имеем $\tau(x)\in C^1[0,T]\bigcap C^2(0,T]$. А функция $u(x,y)$, построенная как решение уравнения (1) с условиями (2), $u|_{AD}=\tau(x)$ при выполнении условий (B1), (B2), и включение $q(x)\in C\,[0,T]$ принадлежат классу $C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})$.

Таким образом, найденные в Ω_{1T} решение $u(x,y)$ и функция (6) в Ω_{2T} в совокупности определяют решение прямой задачи (1)–(3) в области Ω_T.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (B1), (B2) *и* $q(x)\in C\,[0,T]$. *Тогда в области* Ω_T *существует единственное решение прямой задачи* (1)–(3).

3. Исследование обратной задачи 1

Пусть выполнены условия (B2). Умножая уравнение (1) в области Ω_{1T} на функцию $h(y)$ и интегрируя по отрезку $[0,1]$, учитывая (4) находим

$$q(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}\int_0^1 h''(y)u(\xi,y)dy,\quad x\in[0,T]. \tag{16}$$

Подставляя выражение (16) в (12), (13), запишем эти уравнения в векторном виде

$$p(x,y)=Ap(x,y),\quad (x,y)\in\Omega_{1T}, \tag{17}$$

где $p(x,y)=[p_1(x,y),\,p_2(x)]^*:=[u(x,y),\,\nu(x)]^*$, $*$ — знак транспонирования, а компоненты оператора $A=[A_1,\,A_2]^*$ определяются равенствами

$$A_1p(x,y)=p_{01}(x,y)+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi p_2(s)dsd\xi+$$

$$+\int_0^x \left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^1 h''(\theta) p_1(\xi,\theta) d\theta\right] \int_0^1 G_1(x-\xi, y, \eta) p_1(\xi,\eta) d\eta d\xi, \tag{18}$$

$$A_2 p(x) = p_{02}(x) - \int_0^x G_2(x-\xi, 0, 0) p_2(\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^x \left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^1 h''(y) p_1(\xi,y) dy\right] \int_0^1 G_{1y}(x-\xi, 0, \eta) p_1(\xi,\eta) d\eta d\xi, \tag{19}$$

где

$$p_{01}(x,y) := \int_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta) d\eta + 2\int_0^x G_{1\eta}(x-\xi, y, 0)\psi\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi,$$

$$p_{02}(x) := \int_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta) d\eta - \int_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi.$$

Далее нам необходимы оценки интегралов с участием функций G_k, $k = 1,2$, и их некоторых прозводных первого порядка в определениях компонент оператора A в формулах (18) и (19). Ниже проводим оценки по одному из однотипных интегралов. При этом будем использовать легко проверяемые соотношения

$$\int_0^1 G_k(x,y,\eta) d\eta \le 1, \ \ k = 1,2; \ \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z^2} \le \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \quad z > 0. \tag{20}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta) d\eta\right| \le \max_{y\in[0,1]} \left|\varphi'(y)\right|,$$

$$\left|\int_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{x-\xi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right) d\xi \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \left|\psi'(x)\right| \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right)\right) d\xi \le$$

$$\le \max_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \left|\psi'(x)\right| \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + x\right| \le \sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right) \max_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \left|\psi'(x)\right|. \tag{21}$$

Проведем теперь следующие оценки с некоторой непрерывной функцией $f(x,y)$:

$$\left|\int_0^x \int_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta) f(\xi,\eta) d\eta d\xi\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}} |f(x,y)| \times$$

$$\times \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\eta + 2\pi) \exp\left(-\frac{(\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-\eta) \exp\left(-\frac{(2n-\eta)^2}{4(x-\xi)}\right)\right) d\eta.$$

Вычисляя здесь интегралы, продолжим

$$\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)f(\xi,\eta)d\eta d\xi\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|f(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\times$$

$$\times\left|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{-n^2}{x-\xi}\right)-\exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4(x-\xi)}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4(x-\xi)}\right)-\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right)\right)\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|f(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\le\frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|f(x,y)|\,. \tag{22}$$

Далее используя эквивалентное выражение для $G(x,y,\eta)$ в виде (10), имеем равенства

$$G_{1\eta}(x-\xi,y,0)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-(n\pi)^2(x-\xi)\right]n\pi\sin n\pi=\int\limits_0^1 G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\,(1-\eta)\,d\eta,$$

которые проверяются непосредственно. Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\left\{\left[G_1(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)ds\right]_0^x-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi\right\}=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\delta(y-\eta)d\eta\int\limits_0^{\xi}\nu(s)ds-\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta.$$

Здесь использовано соотношение $\lim\limits_{\xi\to x}G_1(x-\xi,y,\eta)=\delta(y-\eta)$, $\delta(\cdot)-$ дельта функция Дирака, для которого имеет место равенство $\int\limits_0^1 a(\eta)\delta(y-\eta)d\eta=a(y)$, где $a(y)-$ любая непрерывная функция на отрезке $[0,1]$. Таким образом, получим равенство

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta,$$

из которого легко следует оценка

$$\left|\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi \nu(s)dsd\xi\right| \leq 2T\max_{x\in[0,T]}|\nu(x)|. \tag{23}$$

Вернемся к уравнению (17). Очевидно, что оператор A переводит функции $p(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}_{1T}\right)$ в функции, также принадлежащие пространству $C\left(\overline{\Omega}_{1T}\right)$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S\left(p_0,r\right)\subset C\left(\overline{\Omega}_{1T}\right)$ радиуса r с центром в точке $p_0(x,y)=(p_{01}(x,y),\ p_{02}(x))$ в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (17) имеет в области $\overline{\Omega}_{1T}$ при достаточно малом T единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|p-p_0\|_T\leq r$. Норму p здесь естественно определять равенством

$$\|p\|_T=\max\left\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|p_1(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_2(x)|\right\}.$$

Очевидно, что для элементов $p\in S\left(p_0,r\right)$ имеет место оценка

$$\|p\|_T\leq\|p_0\|_T+r=:R,$$

где

$$\|p_0\|_T=\max\left\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|p_{01}(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_{02}(x)|\right\}.$$

Из (20)–(23) следует

$$\|p_0\|_T\leq\max\left\{\max_{y\in[0,1]}|\varphi(y)|+4T\max_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]}\left|\psi'(x)\right|,\ \max_{y\in[0,1]}\left|\varphi'(y)\right|+2\sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\right)\max_{x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]}\left|\psi'(x)\right|\right\}.$$

Обозначим

$$T_1:=\frac{r}{R\left[2+\dfrac{1}{f_0}\left(\max\limits_{x\in[0,T]}|f'(x)|+R\max\limits_{x\in[0,1]}|h''(y)|\right)\right]},$$

$$T_2:=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{f_0\sqrt{\pi}}\left(\max_{x\in[0,T]}|f'(x)|+R\max_{x\in[0,1]}|h''(y)|\right)\right]^2+\frac{4r}{R}}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{f_0\sqrt{\pi}}\left(\max_{x\in[0,T]}\left|f'(x)\right|+R\max_{x\in[0,1]}\left|h''(y)\right|\right)\right]\right)^2.$$

Основным результатом данного раздела является

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (B1), (B2), (B3). *Тогда существует число* $T^*\in(0,T)$ *такое, что на отрезке* $[0,T^*]$ *обратная задача* 1 *имеет единственное решение* $q(x)\in C[0,T^*]$.

Доказательство. Покажем, что при $T\in(0,T^*)$, где $T^*:=\min\{T_1,\ T_2\}$, оператор A на шаре $S\left(p_0,r\right)$ является оператором сжатия.

Действительно, пусть $p\in S\left(p_0,r\right)$. Тогда $Ap\in S\left(p_0,r\right)$ и, кроме того, для всех $(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}$, учитывая оценки (20)–(23) получим неравенства

$$|A_1p-p_{01}|\leq\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi|p_2(s)|\,dsd\xi+$$

$$+\int\limits_0^x \left[\frac{|f'(\xi)|}{|f(\xi)|}+\frac{1}{|f(\xi)|}\int\limits_0^1 \left|h''(y)\right| |p_1(\xi,y)|\,dy\right]\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)\,|p_1(\xi,\eta)|\,d\eta d\xi \le$$

$$\le \left[2+\frac{1}{f_0}\left(\max_{x\in[0,T]}\left|f'(x)\right|+R\max_{x\in[0,1]}\left|h''(y)\right|\right)\right]RT; \tag{24}$$

$$|A_2p-p_{02}|\le \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\,|p_2(\xi)|\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^x \left[\frac{|f'(\xi)|}{|f(\xi)|}+\frac{1}{|f(\xi)|}\int\limits_0^1 \left|h''(y)\right| |p_1(\xi,y)|\,dy\right]\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)\,|p_1(\xi,\eta)|\,d\eta d\xi \le$$

$$\le \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}+\frac{1}{f_0\sqrt{\pi}}\left(\max_{x\in[0,T]}\left|f'(x)\right|+R\max_{x\in[0,1]}\left|h''(y)\right|\right)\right]R\sqrt{T}, \tag{25}$$

из которых следует, что $\|p-p_0\|_T\le r$ для $T\le T^*$, т. е. $Ap\in S(p_0,r)$. Нам остается показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(p_0,r)$. Для доказательства этого возьмем любые два элемента p^1, $p^2\in S(p_0,r)$ и оценим норму разности между их образами Ap^1, Ap^2. Обозначим компоненты элементов p^1, p^2 через p_i^1, p_i^2, $i=1,2$. При оценке $\|Ap^1-Ap^2\|_T$ воспользуемся неравенством

$$\left|\left(p_1^1\right)^2-\left(p_1^2\right)^2\right|=\left|p_1^1+p_1^2\right|\left|p_1^1-p_1^2\right|\le 2R\left\|p^1-p^2\right\|_T,$$

которое имеет место для произвольных p^1, $p^2\in S\left(p_0,r\right)$. Используя (18)–(23) подобно неравенствам (24), (25) находим

$$\left|A_1p^1-A_1p^2\right|\le \left[2+\frac{2}{f_0}\left(\max_{x\in[0,T]}\left|f'(x)\right|+R\max_{x\in[0,1]}\left|h''(y)\right|\right)\right]T\left\|p^1-p^2\right\|_T;$$

$$\left|A_2p^1-A_2p^2\right|\le \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}+\frac{2}{f_0\sqrt{\pi}}\left(\max_{x\in[0,T]}\left|f'(x)\right|+R\max_{x\in[0,1]}\left|h''(y)\right|\right)\right]\sqrt{T}\left\|p^1-p^2\right\|_T.$$

Отсюда следует

$$\left\|Ap^1-Ap^2\right\|\le \frac{T}{T^*}\left\|p^1-p^2\right\|_T,$$

оператор A при $T\in(0,T)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(p_0,r)$ на себя. Тогда согласно приципу сжимающих отображений уравнение (17) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. □

Замечание. Теорема 2 гарантирует существование единственного решения уравнения (17) в области $\bar{\Omega}_{1T^*}$ (т. е. однозначную разрешимость обратной задачи 1 на отрезке $[0,T^*]$). Заметим, что по найденной в $\bar{\Omega}_{1T^*}$ функции $p(x,y)$ мы можем продолжить ее за пределы числа T^*, т. е. найти решение (17) в несколько более широкой области $\Omega_{1(T^*+\delta)}$, $\delta>0$. Действительно, поскольку $p(x,y)$ известна в $\bar{\Omega}_{1T^*}$, то можно преобразовать интегралы, входящие в формулы (18), (19), разбив область интегрирования на $\bar{\Omega}_{1T^*}$ и $\delta\Omega_{1T^*}=\Omega_{1(T^*+\delta)}\backslash\bar{\Omega}_{1T^*}$. Так как интегралы по области $\bar{\Omega}_{1T^*}$ известны, то необходимо отнести их в функцию $p_0(x,y)$ и рассматривать уравнение (17) для $(x,y)\in\Omega_{1(T^*+\delta)}$. Тогда на основе изложенной схемы доказательства теоремы 2 можно убедиться в том, что при достаточно малом δ уравнение (17) имеет единственное непрерывное решение в области $\Omega_{1(T^*+\delta)}$. Этот процесс можно продолжить и дальше. Тем не менее, остается открытым вопрос, можно ли продолжить область $\bar{\Omega}_{1T^*}$ до произвольной конечной области $\bar{\Omega}_{1T_1}(T_1 > T^*)$. Дело в том, что величина δ прироста T^* может сильно уменьшаться с каждым шагом продолжения области.

4. Исследование обратной задачи 2

Основным результатом этого раздела является

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (B1), (B2), (B4). *Тогда существует число* $T_0 \in (0, T]$ *такое, что на отрезке* $[0, T_0]$ *обратная задача* 2 *имеет единственное решение* $q(x) \in C[0, T_0]$.

Доказательство. Подставляя $y = y_0$ в (13) и используя дополнительное условие (5), имеем

$$g(x) = \int\limits_0^1 G_1(x, y_0, \eta)\varphi(\eta)d\eta + 2\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi, y_0, 0)\psi\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi, y_0, 0)\int\limits_0^\xi \nu(s)dsd\xi + \int\limits_0^x q(\xi)\int_0^1 G_1(x-\xi, y_0, \eta)u(\xi, \eta)d\eta d\xi, \ x \in [0, T].$$

С учетом условий (B2), (B4) дифференцируем это равенство. При этом в получающемся равенстве первый интеграл $\int\limits_0^1 G_{1x}(x, y_0, \eta)\varphi(\eta)d\eta$ заменим интегралом $\int\limits_0^1 G_{1\eta\eta}(x, y_0, \eta)\varphi(\eta)d\eta$ и, используя условия (B1), (B2), подобно формуле (15) интегрируем по частям. Разрешая после этого итоговое соотношение относительно функции $q(x)$, приходим к интегральному уравнению

$$q(x) = \frac{1}{g(x)}\left[g'(x) - \int\limits_0^1 G_1(x, y_0, \eta)\varphi''(\eta)d\eta - 2\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi, y_0, 0)\psi'(\xi)d\xi\right] -$$

$$-\frac{1}{g(x)}\left[\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi, y_0, 0)\nu(\xi)d\xi d\xi + \int\limits_0^x q(\xi)\int_0^1 G_{1x}(x-\xi, y_0, \eta)u(\xi, \eta)d\eta d\xi\right]. \qquad (26)$$

Рассмотрим в области $\overline{\Omega}_{1T}$ равенства (12), (13), (26). Эти три равенства определяют систему нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно функций $\nu(x)$, $u(x, y)$, $q(x)$. Указанная система уравнений обладает малым параметром, роль которого играет мера области интегрирования в этих уравнениях. Благодаря этому, при малых значениях параметра к системе уравнений оказывается применим, как и в предыдущем разделе, принцип сжатых отображений. Следовательно, доказательство теоремы завершается вполне аналогично доказательству теоремы 2. □

Литература

[1] Золина Л.А. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **6** (6), 991–1001 (1966).

[2] Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Докл. АН СССР **183** (2), 261–264 (1968).

[3] Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов* (Изд-во Фан, Ташкент, 1979).

[4] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа* (Изд-во Фан, Ташкент, 1986).

[5] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром*, Дифференц. уравнения **25** (1), 117–126 (1989).

[6] Сабитов К.Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* (Наука, М., 2016).

[7] Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. *Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем. (3), 29–46 (2021).

[8] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем. (4), 55–62 (2010).

[9] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Матем. заметки **87** (6), 907–918 (2010).

[10] Сабитов К.Б. *Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения*, Матем. заметки **102** (3), 415–435 (2017).

[11] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием*, Изв. вузов. Матем. (1), 46–59 (2015).

[12] Сидоров С.Н. *Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени*, Уфимск. матем. журн. **11** (1), 72–86 (2019).

[13] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения*, Дифференц. уравнения **50** (3), 356–365 (2014).

[14] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обзор **137**, 26–60 (2017).

[15] Прилепко А.И., Костин А.В., Соловьев В.В. *Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева*, Сиб. журн. чист. и прикл. матем. **17** (3), 67–85 (2017).

[16] Иванчов Н.И. *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости*, Сиб. матем. журн. **35** (3), 612–621 (1994).

[17] Durdiev D.K., Durdiev D.D. *The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation*, Turkish J. Math. **46** (8), 3223–3233 (2022).

[18] Денисов А.М. *Введение в теорию обратных задач* (Изд-во МГУ, М., 1994).

[19] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics* (Basel Dekker Cop., New York, 2000).

[20] Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z. *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor*, Math. Methods Appl. Sci. **45** (14), 8374–8388 (2022).

[21] Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z. *One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain*, Ukr. Math. J. **73** (11), 1723–1740 (2022).

[22] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды*, Дифференц. уравнения **56** (6), 796–807 (2020).

[23] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики* (Наука, М., 1984.).

[24] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. научн. изд-во, Новосибирск, 2009).

[25] Hasanoğlu A. Hasanov, Romanov V.G. *Introduction to inverse problems for differential equations* (Springer Intern. Publ., 2017).

[26] Durdiev D.K., Totieva Z.D. *Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations* (Infosys Sci. Foundation Ser. Math. Sci., Springer Nature, 2023).

[27] Дурдиев Д.К. *Об определении коэффициента уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения*, Дифференц. уравнения **58** (12), 1633–1644 (2022).

[28] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1977).

Дурдимурод Калaндарович Дурдиев

Бухарское отделение института Математики академии наук Республики Узбекистан,

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

`e-mail:` d.durdiev@mathinst.uz

D.K. Durdiev

Coefficient inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a non-characteristic line of type change

Abstract. In this paper, we study the direct and two inverse problems for a model equation of mixed parabolic-hyperbolic type. In the direct problem, the Tricomi problem for this equation with a non-characteristic line of type change is considered. The unknown of the inverse problem is the variable coefficient at the lowest derivative in the parabolic equation. To determine it, two inverse problems are studied: with respect to the solution defined in the parabolic part of the domain, the integral overdetermination condition (inverse problem 1) and one simple observation at a fixed point (inverse problem 2) are given. Theorems on the unique solvability of the formulated problems in the sense of classical solution are proved.

Keywords: inverse problem, mixed-type equation, characteristic, Green's function, contraction mapping principle.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

Bukhara branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` d.durdiev@mathinst.uz