М.Ю. ВАТОЛКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для квазидифференциальной краевой задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения и собственные функции, рассматриваемой на отрезке $J = [a, b]$, с краевыми условиями I рода слева, I рода справа, т. е. для задачи вида (в явной форме записи)
$$p_{22}(t) \left(p_{11}(t) (p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t) (p_{00}(t)x(t)) \right)' + p_{21}(t) \left(p_{11}(t) (p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t) (p_{00}(t)x(t)) \right) + p_{20}(t) (p_{00}(t)x(t)) = -\lambda (p_{00}(t)x(t)) \quad (t \in J = [a, b]),$$
$$p_{00}(a)x(a) = p_{00}(b)x(b) = 0,$$

строится асимптотика собственных значений. Требования на гладкость коэффициентов (т. е. функций $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in 0 : i$, $i \in 0 : 2$) в уравнении минимальные: функции $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, неотрицательны, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{21}(\cdot)$ также неотрицательны на отрезке J , кроме того, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ ограничены в существенном на J , функции

$$\frac{1}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{1}{\min\{p_{11}(t)p_{22}(t), 1\}}$$

суммируемы на J . В роли потенциала выступает функция $p_{20}(\cdot)$. Доказывается, что при условии неосцилляции однородного квазидифференциального уравнения второго порядка на J асимптотика собственных значений рассматриваемой краевой задачи имеет вид

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(D + O(1/k^2) \right)$$

при $k \rightarrow \infty$, где D — вещественная положительная константа, определяемая некоторым образом.

Ключевые слова: собственная функция, собственное значение, степенной ряд, оценки для коэффициентов, квазидифференциальное уравнение, краевая задача, сумма ряда, представление собственных функций в виде сумм степенных рядов.

УДК: 517.927

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-15-37

ВВЕДЕНИЕ

В современной спектральной теории дифференциальных операторов актуальной была и остается задача отыскания асимптотики собственных значений и собственных функций оператора в зависимости от гладкости коэффициентов дифференциального выражения.

Поступила в редакцию 13.02.2023, после доработки 30.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

Эти вопросы достаточно полно и хорошо изложены в работе [1] и в известных монографиях (см. [2]–[6] и ссылки в этих работах). Различные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с гладкими и негладкими потенциалами являются предметом исследований ведущих научных школ, занимающихся спектральной теорией дифференциальных операторов уже много десятилетий. Круг этих задач на данный момент времени достаточно хорошо изучен.

Авторами [7] рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля с суммируемым потенциалом и найдены формулы для асимптотики собственных значений и собственных функций, т. е. в [7] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма–Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля–Стеклова.

Работы [8]–[10] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщенной функцией первого порядка. В этих работах рассмотрены операторы второго порядка с негладкими потенциалами (типа дельта-функции или потенциалами–распределениями).

В работах [11], [12] на основе методики работ [8]–[10] исследовано асимптотическое поведение собственных значений операторов с потенциалом, являющимся дельта-функцией Дирака либо импульсными потенциалами (потенциалами–распределениями).

В работах [13]–[15] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети и графах.

Изучению краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков посвящены работы [16]–[20], где найдена асимптотика решений при больших значениях спектрального параметра при условии суммируемости потенциала.

В настоящей статье рассматривается краевая задача для дифференциального (квазидифференциального) уравнения второго порядка более общего вида, по сравнению со всеми вышеупомянутыми работами:

$$\begin{aligned} p_{22}(t) \left(p_{11}(t)(p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t)(p_{00}(t)x(t)) \right)' + p_{21}(t) \left(p_{11}(t)(p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t)(p_{00}(t)x(t)) \right) + \\ + p_{20}(t)(p_{00}(t)x(t)) = -\lambda(p_{00}(t)x(t)) \quad (t \in J = [a, b]), \\ p_{00}(a)x(a) = p_{00}(b)x(b) = 0, \end{aligned}$$

где функции $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, неотрицательны, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, $p_{11}(\cdot)$ и $p_{21}(\cdot)$ также неотрицательны на отрезке J , кроме того, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ ограничены в существенном на J , функции

$$\frac{1}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{1}{\min\{p_{11}(t)p_{22}(t), 1\}}$$

суммируемы на J , т. е. требования, предъявляемые к гладкости коэффициентов, в нашем случае минимальные. В роли потенциала выступает функция $p_{20}(\cdot)$. Записанная выше краевая задача представляет собой явную форму записи краевой задачи (3), (4) (см. раздел 1).

Если в задаче (3), (4) упрощать вид изучаемого квазидифференциального уравнения, то надо требовать существования производных $p'_{11}(t)$, $p''_{00}(t)$, $p'_{22}(t)$, $p'_{21}(t)$, $p'_{10}(t)$, так как упрощая вид уравнения, его можно привести к виду

$$x''(t) + R(t)x'(t) + Q(t)x(t) = -\lambda\rho^2(t)x(t), \quad a \leq t \leq b,$$

где

$$R(t) = 2\frac{p'_{00}(t)}{p_{00}(t)} + \frac{p'_{11}(t)}{p_{11}(t)} + \frac{p_{21}(t)}{p_{22}(t)} + \frac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)},$$

$$Q(t) = \frac{p''_{00}(t)}{p_{00}(t)} + \frac{p'_{10}(t)}{p_{11}(t)} + \frac{p'_{11}(t)p'_{00}(t)}{p_{11}(t)p_{00}(t)} + \frac{p_{10}(t)p'_{00}(t)}{p_{11}(t)p_{00}(t)} + \frac{p_{21}(t)p'_{00}(t)}{p_{22}(t)p_{00}(t)} + \frac{p_{21}(t)p_{10}(t)}{p_{22}(t)p_{11}(t)} + \frac{p_{20}(t)}{p_{22}(t)p_{11}(t)},$$

который после замены $x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t R(s)ds\right)g(t)$ приводится к стандартному виду

$$g''(t) + Q_1(t)g(t) = -\lambda\rho^2(t)g(t),$$

$Q_1(t) = Q(t) - \frac{1}{2}R'(t) - \frac{1}{4}R^2(t)$, при этом $\rho^2(t) = 1/(p_{22}(t)p_{11}(t))$. Поэтому должна существовать производная $R'(t)$, значит, должны существовать $p''_{11}(t)$, $p''_{00}(t)$, $p'_{22}(t)$, $p'_{21}(t)$, $p'_{10}(t)$.

В настоящей работе этот прием не используется и таких условий на гладкость коэффициентов исходного уравнения, как существование производных $p''_{11}(t)$, $p''_{00}(t)$, $p'_{22}(t)$, $p'_{21}(t)$, $p'_{10}(t)$, не накладывается (требования, предъявляемые к гладкости коэффициентов, сформулированы выше, см. через абзац, хотя случай существования производных $p''_{11}(t)$, $p''_{00}(t)$, $p'_{22}(t)$, $p'_{21}(t)$, $p'_{10}(t)$ не исключается).

Заметим, что вид изучаемого здесь квазидифференциального уравнения (ср. с видом квазидифференциального уравнения в работах [8]–[10]) не означает, что получаемый дифференциальный оператор обладает свойствами самосопряженного дифференциального оператора, так как, вообще говоря, предполагаем, что матрица $R = (r_{ik})_0^2$ формально сопряженного в смысле Лагранжа уравнения (2) не совпадает с матрицей $P = (p_{ik})_0^2$ исходного уравнения (1), т. е. $R \neq P$ (см. раздел 1). Случай самосопряженного дифференциального оператора не исключается, если считать, что выполняются следующие два равенства: $p_{22}(t) = p_{00}(t)$ и $p_{21}(t) = -\frac{p_{00}(t)}{p_{11}(t)}p_{10}(t)$, $a \leq t \leq b$, тогда $R \equiv P$ (подробнее см. снова раздел 1, определение матрицы R).

Неосцилляция (определение дается в разделе 1) однородного квазидифференциального уравнения второго порядка (1) обеспечит наличие у задачи (3), (4) комплекса спектральных свойств Штурма: дискретность спектра (множества собственных значений), простота и вещественность спектра, положительность собственных значений, перемежаемость нулей собственных функций. Эти свойства называют осцилляционностью спектра.

Представление собственных функций краевой задачи (3), (4) записано в виде сумм степенных рядов. Получены оценки для коэффициентов таких рядов (подробнее см. раздел 1). На основании этих оценок построена вспомогательная функция, которая удовлетворяет некоторому квазидифференциальному уравнению в частных производных и некоторым краевым условиям. Она представлена в виде ряда по косинусам, данное представление позволяет получить асимптотику спектра исходной задачи (3), (4).

Квазидифференциальное уравнение является обобщением обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n -го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д.Ю. Шина [21], [22]. Обстоятельства сложились таким образом, что его работы на долгое время были игнорированы и забыты, и только начиная с 1975 г. стали появляться работы А. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, посвященных этой тематике. Они же возродили интерес к работам Д.Ю. Шина. В настоящее время существует огромное количество работ по этой тематике, опубликованных в различных математических журналах в период с 1975 г. по настоящее время. В связи с этим сделаем краткий обзор работ А. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, посвященных этой тематике, и опубликованных в последние годы.

В работе [23] исследуются краевые задачи четвертого порядка с разрывными краевыми условиями. Доказано, что собственные значения непрерывно и гладко зависят от параметров в коэффициентах уравнения и граничных условиях, а также найдены формулы для производных собственных значений по параметрам. В статье [24] рассматривается косодиагональная постоянная матрица, удовлетворяющая условию $C^{-1} = -C = C^*$, далее строятся самосопряженные области для регулярных C -симметричных дифференциальных операторов четного порядка с двухточечными граничными условиями. Монографии [25] и [26] представляют собой обзор основных известных результатов, полученных для задачи Штурма–Лиувилля, монография [26] содержит также обзор новых результатов для этой задачи. Например, в [26] доказывається, что некоторые специальные задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения эквивалентны циклическим матричным задачам Якоби на собственные значения. Кроме того, в [26] разработан новый подход к решению задач Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями. В статье [27] исследуется дифференциальный оператор четвертого порядка с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра и других параметров, доказано, что собственные значения дифференцируемы по параметрам, найдены выражения для производных собственных значений по параметрам.

В монографии [28] изучаются регулярные и сингулярные самосопряженные квазидифференциальные краевые задачи в гильбертовом пространстве функций, которое авторы связывают со сложными симплектическими пространствами, этот подход представляет собой эффективный метод для изучения квазидифференциальных операторов, рассматриваемых авторами в работе, а также для анализа и классификации самосопряженных краевых условий. В статье [29] авторы развивают теорию Вейля–Титчмарша для сингулярных квазидифференциальных операторов второго порядка, рассматриваемых на открытых интервалах вещественной оси, авторы вводят и изучают максимальный и минимальный операторы Штурма–Лиувилля, а также их самосопряженные расширения. В этой работе рассматриваются самосопряженные граничные условия (разделенные и связанные) и строится резольвента самосопряженного расширения минимального оператора. Кроме того, в [29] строится и изучается сингулярная функция Вейля–Титчмарша–Кодайры, соответствующая любому самосопряженному расширению оператора Штурма–Лиувилля с разделенными граничными условиями, а также строится спектральная функция, соответствующая самосопряженному расширению такого оператора. В статье [30] изучается регулярное представление сингулярных квазидифференциальных выражений второго порядка.

Неоднородное квазидифференциальное уравнение позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть «обобщенными», уравнениями с особенностями в коэффициентах и т.п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение также представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения.

В монографии [31] рассматривается «самосопряженное» квазидифференциальное уравнение четного порядка

$$(-1)^m (p_0(t)x^{(m)}(t))^{(m)} + (-1)^{m-1} (p_1(t)x^{(m-1)}(t))^{(m-1)} + \dots + p_m(t)x(t) = f(t).$$

Оно получается из уравнения $(\overset{n}{p}x)(t) = f(t)$, $t \in J$ ($f : J \rightarrow \mathbb{R}$), при

$$p_{kk} = 1 \quad (k \in 0 : m-1), \quad p_{kk} = -1 \quad (k \in m+1 : n),$$

$$p_{i,n-i} = p_{i-m} \quad (i \in m : n), \quad p_{ik} = 0 \quad (i \in 1 : n, k < i; k \neq n-i).$$

Уравнение $(\overset{p}{x})(t) = f(t)$, таким образом, общее и не является, если того не предполагать, самосопряженным. Поэтому общепринятые простые и лаконичные обозначения квазипроизводных [31] заменены в нашем случае на более сложные, так как при переходе к сопряженному уравнению матрица, с помощью которой строятся квазипроизводные, меняется. Но также, как и в [31], здесь рассматривается только случай вещественнозначных коэффициентов (в настоящей статье рассматриваются и изучаются квазидифференциальные уравнения второго порядка). Случай комплекснозначных коэффициентов, в отличие от работ [21] и [22], не рассматривается.

Заметим, что квазидифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах в случае, если коэффициенты $p_{\nu k} = 0$ ($k \in 0 : \nu - 2$, $\nu \in 2 : n$) (подробнее см. [32], [33]).

1. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВИДЕ СУММ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $P = (p_{ik})_0^2$ — нижняя треугольная 3×3 -матрица, функции $p_{ik}(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, неотрицательны, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, функция $p_{11}(\cdot)$ также неотрицательна, кроме того, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ ограничены в существенном на любом отрезке из I , функции

$$\frac{1}{p_{11}(\cdot)}, \quad \frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \quad \frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \quad \frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$$

локально суммируемы в I .

Определим квазипроизводные $\overset{0}{p}x(\cdot)$, $\overset{1}{p}x(\cdot)$, $\overset{2}{p}x(\cdot)$ функции $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$$\begin{aligned} \overset{0}{p}x(t) &\doteq p_{00}(t)x(t), \quad \overset{1}{p}x(t) \doteq p_{11}(t) \frac{d(\overset{0}{p}x(t))}{dt} + p_{10}(t)(\overset{0}{p}x(t)), \\ \overset{2}{p}x(t) &\doteq p_{22}(t) \frac{d(\overset{1}{p}x(t))}{dt} + p_{21}(t)(\overset{1}{p}x(t)) + p_{20}(t)(\overset{0}{p}x(t)). \end{aligned}$$

Линейным однородным квазидифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение [32], [33] (в этих работах рассматриваются и изучаются квазидифференциальные уравнения произвольного порядка)

$$(\overset{2}{p}x)(t) = 0, \quad t \in I. \quad (1)$$

Его решением называется всякая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до первого порядка включительно, и удовлетворяющая (1) почти всюду в I . Уравнение (1) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением [32], [33]

$$\begin{aligned} (\overset{2}{R}y)(t) &= 0 \quad (R = (r_{\nu k})_0^2 \text{ — нижняя треугольная матрица}), \quad t \in I, \\ r_{\nu k} &= \frac{(-1)^{\nu+k} p_{n-k, n-\nu} p_{n-\nu, n-\nu}}{p_{n-k, n-k}} \quad (k \in 0 : \nu, \nu \in 0 : 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (1) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$ (здесь $J = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля [32], [33].

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$(\overset{2}{p}x)(t) = -\lambda (\overset{0}{p}x)(t) \quad (t \in J), \quad (3)$$

$${}^0_P x(a) = {}^0_P x(b) = 0. \quad (4)$$

Решение $u(t, \lambda)$ уравнения (3), удовлетворяющее первому из условий (4), представимо в виде ряда [34]

$$u(t, \lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \dots \quad (5)$$

Нулевая квазипроизводная этого решения по аргументу t представима в виде ряда

$${}^0_P u(t, \lambda) = {}^0_P x_0(t) - \lambda {}^0_P x_1(t) + \lambda^2 {}^0_P x_2(t) - \lambda^3 {}^0_P x_3(t) + \dots \quad (6)$$

Последовательность решений $\{x_k(\cdot)\}_0^\infty$ построим следующим образом: $x_0(\cdot)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} ({}^2_P x)(t) &= 0 \quad (t \in J), \\ {}^0_P x(a) &= 0, \quad {}^1_P x(a) = 1; \end{aligned}$$

$x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения задач

$$\begin{aligned} ({}^2_P x_k)(t) &= ({}^0_P x_{k-1})(t) \quad (t \in J), \\ {}^0_P x_k(a) &= 0, \quad {}^1_P x_k(a) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Собственные значения задачи (3), (4) представляют собой корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ есть сумма ряда (5) при $t = b$. Функция

$$u(t, \lambda_*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_*)^k x_k(t) \quad (t \in J)$$

есть собственная функция задачи (3), (4), отвечающая собственному значению λ_* .

Пусть уравнение (1) неосциллиционно на J и $C(t, s)$ ($C^*(t, s)$) есть функция Коши уравнения (1)((2)). Заметим, что при условии неосцилляции имеет место неравенство ${}^0_P C(t, s) \geq 0$ при $a \leq s \leq t \leq b$ ([32], [33]). Пусть далее

$$M_1 \doteq \max_{t \in [a, b]} {}^0_P C(t, a), \quad M_2 \doteq \max_{(s, t) \in [a, b] \times [a, b]} |{}^1_R C^*(s, t)|, \quad M_3 \doteq \text{vrai sup}_{t \in [a, b]} p_{11}(t), \quad M_4 \doteq \text{vrai sup}_{t \in [a, b]} p_{22}(t)$$

и

$$M \doteq \max\{M_1, M_2 M_3 M_4\}.$$

Функция

$$\xi(t) \doteq \min\{p_{11}(t)p_{22}(t), 1\},$$

если $p_{11}(t) \neq p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$), и

$$\xi(t) \doteq p_{11}(t),$$

если $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$), при каждом значении аргумента t из J . Будем предполагать, что функция $\frac{1}{\xi(t)}$ суммируема на J и пусть $\psi(t) \doteq \int_a^t \frac{1}{\xi(s)} ds$ ($t \in J$).

Считаем также в дальнейшем, что $p_{21}(t) \geq 0$ ($t \in J$).

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$0 \leq {}^0_P x_k(t) \leq \frac{M^{k+1} \psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J, \quad k = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

Доказательство проведем методом математической индукции для случая $p_{11}(t) \neq p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$).

При $k = 0$ оценка (7) верна. Действительно, ${}^0_P x_0(t) = {}^0_P C(t, a)$, следовательно,

$${}^0_P x_0(t) \leq M_1 \leq M.$$

Пусть оценка (7) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k+1$:

$$\begin{aligned} {}^0_P x_{k+1}(t) &= \int_a^t \frac{{}^0_P C(t, s) {}^0_P x_k(s)}{p_{22}(s)} ds \leq \frac{M^{k+1}}{(2k)!} \int_a^t \frac{p_{11}(s) {}^0_P C(t, s) \psi^{2k}(s)}{p_{22}(s) p_{11}(s)} ds \leq \\ &\leq \frac{M^{k+1} M_3}{(2k)!} \int_a^t \frac{{}^0_P C(t, s) \psi^{2k}(s)}{\xi(s)} ds = \left(\text{заметим, см. [32], [33], что } {}^0_P C(t, s) = -{}^0_R C^*(s, t) \right) = \\ &= -\frac{M^{k+1} M_3}{(2k)!} \int_a^t {}^0_R C^*(s, t) \psi^{2k}(s) d\psi(s) = \\ &= -\frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \int_a^t {}^0_R C^*(s, t) d\psi^{2k+1}(s) = \frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \int_a^t \psi^{2k+1}(s) \left({}^0_R C^*(s, t) \right)'_s ds = \\ &= \frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{p_{11}(s) \left({}^0_R C^*(s, t) \right)'_s}{p_{11}(s)} \psi^{2k+1}(s) ds = \frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \times \\ &\times \int_a^t \frac{p_{11}(s) \left({}^0_R C^*(s, t) \right)'_s - \frac{p_{21}(s) p_{11}(s)}{p_{22}(s)} {}^0_R C^*(s, t) + \frac{p_{21}(s) p_{11}(s)}{p_{22}(s)} {}^0_R C^*(s, t)}{p_{11}(s)} \psi^{2k+1}(s) ds = \\ &= \left(\text{заметим, см. [32], [33], что } {}^1_R C^*(s, t) = p_{11}(s) \left({}^0_R C^*(s, t) \right)'_s - \frac{p_{21}(s) p_{11}(s)}{p_{22}(s)} {}^0_R C^*(s, t) \right) = \\ &= \frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{{}^1_R C^*(s, t) - \frac{p_{21}(s) p_{11}(s)}{p_{22}(s)} {}^0_P C(t, s)}{p_{11}(s)} \psi^{2k+1}(s) ds \leq \\ &\leq \left(\text{учтем, что } \frac{p_{21}(s) p_{11}(s)}{p_{22}(s)} {}^0_P C(t, s) \geq 0 \right) \leq \frac{M^{k+1} M_3}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{p_{22}(s) {}^1_R C^*(s, t)}{p_{11}(s) p_{22}(s)} \psi^{2k+1}(s) ds \leq \\ &\leq \frac{M^{k+1} M_3 M_4}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{|{}^1_R C^*(s, t)|}{\xi(s)} \psi^{2k+1}(s) ds \leq \frac{M^{k+1} M_2 M_3 M_4}{(2k+1)!} \int_a^t \psi^{2k+1}(s) d\psi(s) \leq \\ &\leq \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!} \psi^{2k+2}(t) = \frac{M^{(k+1)+1} \psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}. \end{aligned}$$

Таким образом, ${}^0_P x_{k+1}(t) \leq \frac{M^{(k+1)+1} \psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}$. По индукции оценки (7) имеют место для любого $k \in \mathbb{N}$. В случае $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$) доказательство можно провести аналогично. $\square$

Предложение 1. Из теоремы 1 следует, что если $p_{11}(t) = p_{22}(t) \equiv 1$ на J или $1 \leq p_{11}(t)$ при всех t из отрезка J и $p_{22}(t) \equiv 1$ на J ($1 \leq p_{22}(t)$ при всех t из J и $p_{11}(t) \equiv 1$ на J), то оценки (7) выглядят так:

$$0 \leq {}^0_P x_k(t) \leq \frac{M^{k+1}(t-a)^{2k}}{(2k)!} \quad (t \in J, \quad k = 0, 1, \dots).$$

Введем в рассмотрение функции $\varphi_k(t) : J \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью равенств

$$\varphi_k(t) \frac{M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} = {}^0_P x_k(t),$$

где $k = 0, 1, \dots$ (заметим, что $0 \leq \varphi_k(t) \leq 1$).

Определим функцию

$$v(t, \lambda) \doteq \varphi_0(b)M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k \varphi_k(b) M^{k+1} \psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J), \quad (8)$$

$v(t, \lambda)$ является как бы “сечением” функции ${}^0_P u(t, \lambda)$ при $t = b$.

Теорема 2. Функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda(v(t, \lambda))''_{\sqrt{\lambda}} = \psi^2(t) \left(\xi(t) \left(\xi(t)(v(t, \lambda))'_t \right)'_t \right) \quad (9)$$

и условиям

$$v(b, \lambda) = {}^0_P u(b, \lambda), \quad \left(\xi(t)(v(t, \lambda))'_t \right) \Big|_{t=a} = 0, \quad (10)$$

$$v(t, \lambda)|_{\lambda=0} = {}^0_P C(b, a), \quad \left((\sqrt{\lambda} v(t, \lambda))'_{\sqrt{\lambda}} \right) \Big|_{\lambda=0} = {}^0_P C(b, a).$$

Доказательство. В том, что функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (9), убедимся непосредственной подстановкой правой части формулы (8) в левую и правую части уравнения (9)

$$\begin{aligned} \lambda(v(t, \lambda))''_{\sqrt{\lambda}} &= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t) + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{4!} + \dots, \\ \psi^2(t) \left(\xi(t) \left(\xi(t)(v(t, \lambda))'_t \right)'_t \right) &= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t) + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{4!} + \dots. \end{aligned}$$

Получили одно и то же выражение.

Подставим правую часть формулы (8) в левые части каждого из четырех условий (10):

$$\begin{aligned} v(b, \lambda) &= \varphi_0(b)M - \frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(b)}{2!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(b)}{4!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(b)}{6!} + \dots = \\ &= p_{00}(b) \left(x_0(b) - \lambda x_1(b) + \lambda^2 x_2(b) - \lambda^3 x_3(b) + \dots \right) = {}^0_P u(b, \lambda), \\ \left(\xi(t)(v(t, \lambda))'_t \right) \Big|_{t=a} &= \left(-\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(t)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(t)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(t)}{5!} + \dots \right) \Big|_{t=a} = \\ &= -\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(a)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(a)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(a)}{5!} + \dots = (\psi(a) = 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(t, \lambda) \Big|_{\lambda=0} &= \left(\varphi_0(b)M - \frac{\lambda \varphi_1(b)M^2 \psi^2(t)}{2!} + \frac{\lambda^2 \varphi_2(b)M^3 \psi^4(t)}{4!} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda^3 \varphi_3(b)M^4 \psi^6(t)}{6!} + \dots \right) \Big|_{\lambda=0} = {}^0_P C(b, a), \\
 \left((\sqrt{\lambda} v(t, \lambda))'_{\sqrt{\lambda}} \right) \Big|_{\lambda=0} &= \\
 &= \left(\varphi_0(b)M \sqrt{\lambda} - \frac{(\sqrt{\lambda})^3 \varphi_1(b)M^2 \psi^2(t)}{2!} + \frac{(\sqrt{\lambda})^5 \varphi_2(b)M^3 \psi^4(t)}{4!} - \dots \right)' \Big|_{\sqrt{\lambda}=0} = \\
 &= \varphi_0(b)M + 0 = {}^0_P C(b, a).
 \end{aligned}$$

Убедились, что функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет условиям (10). $\square$

Уравнение (9) назовем квазидифференциальным уравнением в частных производных. То, что решение задачи (9), (10) — функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет первому из условий (10), означает, что собственные значения задачи (3), (4) могут быть найдены как корни уравнения

$$v(b, \lambda) = 0. \quad (11)$$

Поэтому определенный интерес представляет вопрос об аппроксимации корней уравнения (11) в том случае, когда они не могут быть найдены точно.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ (3), (4) И ПРИМЕРЫ НА АСИМПТОТИКУ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Ниже предлагается некоторый подход к решению поставленных вопросов, который, конечно же, не лишен недостатков и не является единственным.

Сначала обратим внимание на то, что имеет место

Предложение 2. *Функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:*

$$\left((v(t, \lambda))_{\sqrt{\lambda}}^{(k)} \right) \Big|_{\lambda=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2m - 1; \\ (-1)^{\binom{k}{\frac{k}{2}}} \varphi_{\frac{k}{2}}(b) M^{\frac{k}{2}+1} \psi^k(t), & \text{если } k = 2m; \\ m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $m = 1, 2, \dots$. Найдем

$$\begin{aligned}
 (v(t, \lambda))_{\sqrt{\lambda}}^{(2m-1)} &= (-1)^m \sqrt{\lambda} \varphi_m(b) M^{m+1} \psi^{2m}(t) + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1+j} (\sqrt{\lambda})^{3+2j} \varphi_{m+1+j}(b) M^{m+2+j} \psi^{2m+2+2j}(t)}{(3+2j)!},
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 (v(t, \lambda))_{\sqrt{\lambda}}^{(2m)} &= (-1)^m \varphi_m(b) M^{m+1} \psi^{2m}(t) + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1+j} (\sqrt{\lambda})^{2+2j} \varphi_{m+1+j}(b) M^{m+2+j} \psi^{2m+2+2j}(t)}{(2+2j)!}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в правые части формул (13) и (14) $\lambda = 0$, убеждаемся в справедливости равенства (12). $\square$

Построим некоторую функцию, которая удовлетворяла бы уравнению (9), а также второму, третьему и четвертому из условий (10) и условиям вида (12).

С этой целью определим функцию

$$Q_\zeta(t, \lambda) \doteq \frac{\sin({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda})}{\psi(t)\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\cos\left(2k\frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta}\psi(t)\right) - 1 \right), \quad (15)$$

где $d_k \in \mathbb{R}$ ($k \in 1 : \infty$) и $\zeta \in \mathbb{R}$.

Легко видеть, что функция $Q_\zeta(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (9). Действительно, подставляя в левую и правую части уравнения (9) правую часть формулы (15), получаем

$$\begin{aligned} \lambda(Q_\zeta(t, \lambda))''_{\sqrt{\lambda}} &= -({}_P^0C(b, a))^2\psi(t)\sqrt{\lambda}\sin({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda}) - \\ &\quad - 2({}_P^0C(b, a))\cos({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda}) + \\ &\quad + 2\frac{\sqrt{\lambda}\sin({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda})}{\psi(t)} - \lambda(\psi^2(t)/\zeta^2)\sum_{k=1}^{\infty} d_k(2k)^2\cos\left(2k\frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta}\psi(t)\right), \\ \psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)(Q_\zeta(t, \lambda))'_t\right)'_t\right) &= -({}_P^0C(b, a))^2\psi(t)\sqrt{\lambda}\sin({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda}) - \\ &\quad - 2({}_P^0C(b, a))\sqrt{\lambda}\cos({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda}) + \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda}\frac{\sin({}_P^0C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda})}{\psi(t)} - \lambda(\psi^2(t)/\zeta^2)\sum_{k=1}^{\infty} d_k(2k)^2\cos\left(2k\frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta}\psi(t)\right). \end{aligned}$$

Получили одно и то же выражение. Очевидно, что функция $Q_\zeta(t, \lambda)$ удовлетворяет третьему и четвертому из условий (10).

Предложение 3. *Выполнения функцией $Q_\zeta(t, \lambda)$ условий (12) можно добиться за счет выбора значений параметров d_k .*

Доказательство. Заметим, что, представив числитель первого слагаемого в правой части определения (15) в виде ряда Тейлора, функцию $Q_\zeta(t, \lambda)$ можно записать в виде

$$Q_\zeta(t, \lambda) = {}_P^0C(b, a) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{({}_P^0C(b, a))^{2k+1} (\psi(t)\sqrt{\lambda})^{2k}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\cos\left(2k\frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta}\psi(t)\right) - 1 \right).$$

Пусть $m = 1, 2, \dots$. Найдем производные

$$\begin{aligned} (Q_\zeta(t, \lambda))^{(2m-1)}_{\sqrt{\lambda}} &= (-1)^m (\psi^{2m-1}(t)) / (\zeta^{2m-1}) \sum_{k=1}^{\infty} d_k (2k)^{2m-1} \sin\left(2k\frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta}\psi(t)\right) + \\ &\quad + (-1)^m \left(\frac{({}_P^0C(b, a))^{2m+1} \psi^{2m}(t)\sqrt{\lambda}}{(2m+1)} + \frac{({}_P^0C(b, a))^{2m+3} \psi^{2m+2}(t)(\sqrt{\lambda})^3}{2 \cdot 3 \cdot (2m+3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{({}_P^0C(b, a))^{2m+5} \psi^{2m+4}(t)(\sqrt{\lambda})^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (2m+5)} + \frac{({}_P^0C(b, a))^{2m+7} \psi^{2m+6}(t)(\sqrt{\lambda})^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2m+7)} - \dots \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 (Q_\zeta(t, \lambda))_{\sqrt{\lambda}}^{(2m)} &= (-1)^m (\psi^{2m}(t)) / (\zeta^{2m}) \sum_{k=1}^{\infty} d_k (2k)^{2m} \cos\left(2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \psi(t)\right) + \\
 &+ (-1)^m \left(\frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+1} \psi^{2m}(t)}{(2m+1)} + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+3} \psi^{2m+2}(t) (\sqrt{\lambda})^2}{2 \cdot (2m+3)} - \right. \\
 &\left. - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+5} \psi^{2m+4}(t) (\sqrt{\lambda})^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2m+5)} + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+7} \psi^{2m+6}(t) (\sqrt{\lambda})^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (2m+7)} - \dots \right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Подставляя правые части формул (16) и (17) (поменяв в них местами слагаемые, записанные в виде сумм рядов) в начальные условия (12), получаем

$$\begin{aligned}
 &(-1)^m \left(\frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+1} \psi^{2m}(t) 0}{(2m+1)} + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+3} \psi^{2m+2}(t) 0^3}{2 \cdot 3 \cdot (2m+3)} - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+5} \psi^{2m+4}(t) 0^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (2m+5)} + \right. \\
 &\left. + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+7} \psi^{2m+6}(t) 0^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2m+7)} - \dots \right) + (-1)^m (\psi^{2m-1}(t)) / (\zeta^{2m-1}) \sum_{k=1}^{\infty} d_k (2k)^{2m-1} \sin(2k \psi(t)) = 0
 \end{aligned}$$

(заметим, что последнее равенство выполняется при любых значениях аргумента $t \in J$ и при любых значениях параметров $d_k \in \mathbb{R}$ ($k \in 1 : \infty$)) и

$$\begin{aligned}
 &(-1)^m \left(\frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+1} \psi^{2m}(t)}{(2m+1)} + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+3} \psi^{2m+2}(t) 0^2}{2 \cdot (2m+3)} - \right. \\
 &\left. - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+5} \psi^{2m+4}(t) 0^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2m+5)} + \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+7} \psi^{2m+6}(t) 0^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (2m+7)} - \dots \right) + \\
 &+ (-1)^m (\psi^{2m}(t)) / (\zeta^{2m}) \sum_{k=1}^{\infty} d_k (2k)^{2m} \cos(2k \psi(t)) = (-1)^m \varphi_m(b) M^{m+1} \psi^{2m}(t).
 \end{aligned}$$

Следовательно, должны выполняться равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k (2k)^{2m} = \varphi_m(b) M^{m+1} \zeta^{2m} - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2m+1}}{(2m+1)} \zeta^{2m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения значений параметров d_k :

$$\left\{ \begin{aligned}
 &2^2 d_1 + 4^2 d_2 + \dots + (2n)^2 d_n + \dots = \varphi_1(b) M^2 \zeta^2 - \frac{({}_P^0 C(b, a))^3}{3} \zeta^2, \\
 &2^4 d_1 + 4^4 d_2 + \dots + (2n)^4 d_n + \dots = \varphi_2(b) M^3 \zeta^4 - \frac{({}_P^0 C(b, a))^5}{5} \zeta^4, \\
 &\dots \\
 &2^{2n-2} d_1 + 4^{2n-2} d_2 + \dots = \varphi_{n-1}(b) M^n \zeta^{2n-2} - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2n-1}}{2n-1} \zeta^{2n-2}, \\
 &2^{2n} d_1 + 4^{2n} d_2 + \dots = \varphi_n(b) M^{n+1} \zeta^{2n} - \frac{({}_P^0 C(b, a))^{2n+1}}{2n+1} \zeta^{2n} \\
 &\dots
 \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Решение системы (18), предполагая, что оно существует, обозначим через $\tilde{d}_1(\zeta)$, $\tilde{d}_2(\zeta)$, $\dots$, $\tilde{d}_n(\zeta)$. $\square$

Подставив значения $\tilde{d}_k(\zeta)$ параметров d_k в $Q_\zeta(t, \lambda)$, определим новую функцию $\tilde{Q}_\zeta(t, \lambda)$. Проверим выполнение функции $\tilde{Q}_\zeta(t, \lambda)$ второго из условий (10):

$$\begin{aligned} & \left(\xi(t) (\tilde{Q}_\zeta(t, \lambda))'_t \right) \Big|_{t=a} = \xi(a) \left(\frac{1}{\xi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{{}_P^0 C(b, a)^{2k+1} (\psi(t))^{2k-1} (\sqrt{\lambda})^{2k}}{(2k-1)!(2k+1)} \right) \Big|_{t=a} + \\ & \quad + \xi(a) \left(\frac{1}{\xi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \tilde{d}_k(\zeta) \left(-\sin \left(2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \psi(t) \right) \right) \right) \Big|_{t=a} = \\ & = \xi(a) \left(\frac{1}{\xi(a)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{{}_P^0 C(b, a)^{2k+1} (\psi(a))^{2k-1} (\sqrt{\lambda})^{2k}}{(2k-1)!(2k+1)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \tilde{d}_k(\zeta) \sin \left(2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \psi(a) \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{{}_P^0 C(b, a)^{2k+1} 0^{2k-1} (\sqrt{\lambda})^{2k}}{(2k-1)!(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} \tilde{d}_k(\zeta) \sin \left(2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta} 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Второе из условий (10) выполнено.

Пусть значение ζ_* параметра ζ является решением уравнения $\tilde{Q}_\zeta(b, 1) = \Phi(b, 1)$, где $\Phi(b, 1)$ является суммой ряда (6) при $t = b$ и $\lambda = 1$. Далее определим функцию $\tilde{Q}_{\zeta_*}(t, \lambda)$, подставив в $\tilde{Q}_\zeta(t, \lambda)$ значение ζ_* параметра ζ . В силу предложения 3 и в силу выбора значения ζ_* параметра ζ делаем вывод о том, что функция $v(t, \lambda)$ (см. определение (8)) удовлетворяет равенству

$$v(t, \lambda) \equiv \tilde{Q}_{\zeta_*}(t, \lambda).$$

Теорема 3. Пусть уравнение (1) неосцилляционно на отрезке J . Пусть элементы матрицы P — функции $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, неотрицательны, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{21}(\cdot)$ неотрицательны на J , кроме того, функции $p_{11}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ ограничены в существенном на J , функции

$$\frac{1}{p_{11}(\cdot)}, \quad \frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \quad \frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \quad \frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \quad \frac{1}{\min\{p_{11}(t)p_{22}(t), 1\}}$$

суммируемы на J .

Тогда асимптотика собственных значений краевой задачи (3), (4) имеет вид

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(D + O(1/k^2) \right) \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где

$$D \doteq \frac{\zeta_*^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{\min\{p_{11}(s)p_{22}(s), 1\}} ds \right)^2},$$

если $p_{11}(t) \neq p_{22}(t)$,

$$D \doteq \frac{\zeta_*^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{p_{11}(s)} ds \right)^2},$$

если $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$).

Доказательство. Функция $v(t, \lambda) \equiv \tilde{Q}_{\zeta_*}(t, \lambda)$, учитывая, что собственные значения задачи (3), (4) могут быть найдены как корни уравнения $v(b, \lambda) = 0$, получаем, что собственные значения задачи (3), (4) являются корнями уравнения

$$\tilde{Q}_{\zeta_*}(b, \lambda) = 0, \quad (20)$$

где функция $\tilde{Q}_{\zeta_*}(t, \lambda)$, как уже упоминалось выше (хотя явно не выписывалась), имеет вид

$$\tilde{Q}_{\zeta_*}(t, \lambda) = \frac{\sin({}_P^0 C(b, a)\psi(t)\sqrt{\lambda})}{\psi(t)\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k(\zeta_*) \left(\cos\left(2k \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta_*} \psi(t)\right) - 1 \right).$$

Уравнение (20) имеет вид

$$\frac{\sin({}_P^0 C(b, a)\psi(b)\sqrt{\lambda})}{\psi(b)\sqrt{\lambda}} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{d}_j(\zeta_*) \left(\cos\left(2j \frac{\sqrt{\lambda}}{\zeta_*} \psi(b)\right) - 1 \right) = 0. \quad (21)$$

Учитывая определение функции $\psi(t) = \int_a^t \frac{1}{\min\{p_{11}(s)p_{22}(s), 1\}} ds$, если $p_{11}(t) \neq p_{22}(t)$, и $\psi(t) = \int_a^t \frac{1}{p_{11}(s)} ds$, если $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$), получаем, что асимптотика корней уравнения (21) и одновременно асимптотика собственных значений λ_k краевой задачи (3), (4) такова:

$$\lambda_k = \frac{(\pi k)^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{\min\{p_{11}(s)p_{22}(s), 1\}} ds \right)^2} \left(\zeta_*^2 + O(1/k^2) \right) = (\pi k)^2 \left(D + O(1/k^2) \right)$$

при $k \rightarrow \infty$, если $p_{11}(t) \neq p_{22}(t)$,

$$\lambda_k = \frac{(\pi k)^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{p_{11}(s)} ds \right)^2} \left(\zeta_*^2 + O(1/k^2) \right) = (\pi k)^2 \left(D + O(1/k^2) \right)$$

при $k \rightarrow \infty$, если $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ ($t \in J = [a, b]$). $\square$

Приведем примеры к теореме 3. Во всех примерах известны собственные значения и собственные функции задачи вида (3), (4). Цель примеров — показать возможность представления собственных значений в виде равенства (19). Кроме того, в каждом из примеров находятся функция $\psi(t)$ и $\psi(1)$.

Пример 1. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$e^{-t^2/2} \left(e^{t^2/2} x' \right)' + (1/4)t^2 x = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (22)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (23)$$

Для задачи (22), (23) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = e^{t^2/2}, \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = e^{-t^2/2}, \quad p_{20}(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Собственными значениями задачи (22), (23) являются $\lambda_k = 1/2 + (\pi k)^2$ ($k = 1, 2, \dots$).

Функции $u(t, \lambda_k) = e^{-t^2/4} \sin(\pi kt)$ являются собственными функциями задачи (22), (23), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (22), (23) функция

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{\min\{e^{s^2/2}e^{-s^2/2}, 1\}} ds = t, \quad \psi(1) = 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(1 + 1/(2\pi^2 k^2)\right),$$

где $D \equiv 1$, $O(1/k^2) = 1/(2\pi^2 k^2)$ при $k \rightarrow \infty$.

Пример 2. Рассмотрим задачу (3), (4) (пусть α — вещественный параметр) вида

$$t^2 x'' + \alpha t x' = -\lambda x \quad (t \in [1, \gamma], \gamma > 1), \quad (24)$$

$$x(1) = x(\gamma) = 0. \quad (25)$$

Для задачи (24), (25) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 1, \quad b = \gamma, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = 1, \quad p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = t^2, \quad p_{21}(t) = \alpha t, \quad p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (24), (25) являются

$$\lambda_k = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{2 \ln \gamma}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Функции

$$u(t, \lambda_k) = t^{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \frac{\pi k \ln t}{\ln \gamma}$$

являются собственными функциями задачи (24), (25), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (24), (25) функция

$$\psi(t) = \int_1^t \frac{1}{\min\{s^2, 1\}} ds = t - 1, \quad \psi(\gamma) = \gamma - 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(1/(2 \ln \gamma)^2 + ((1-\alpha)/2)^2 (1/(\pi k)^2)\right),$$

где $D = 1/(2 \ln \gamma)^2$, $O(1/k^2) = ((1-\alpha)/(2\pi k))^2$ при $k \rightarrow \infty$.

Пример 3. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$\frac{1}{\cos t} \left(\frac{1}{\cos t} x'\right)' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (26)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (27)$$

Для задачи (26), (27) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{21}(t) = 0, \quad p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (26), (27) являются $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\sin 1}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$).

Функции $u(t, \lambda_k) = \sin\left(\frac{\pi k \sin t}{\sin 1}\right)$ являются собственными функциями задачи (26), (27), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (26), (27) функция

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{\frac{1}{\cos s}} ds = \sin t, \quad \psi(1) = \sin 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(\frac{1}{\sin 1}\right)^2,$$

где $D = \frac{1}{(\sin 1)^2}$, $O\left(\frac{1}{k^2}\right) \equiv 0$.

Пример 4. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$\frac{1}{\cos^2 t} (\cos^2 t x')' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (28)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (29)$$

Для задачи (28), (29) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = \cos^2 t, \quad p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad p_{21}(t) = 0, \quad p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (28), (29) являются $\lambda_k = (\pi k)^2 - 1$ ($k = 1, 2, \dots$).
Функции

$$u(t, \lambda_k) = \frac{\sin(\pi k t)}{\cos t}$$

являются собственными функциями задачи (28), (29), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (28), (29) функция

$$\psi(t) = \int_0^t 1 / \min \left\{ \frac{1}{\cos^2 s}, 1 \right\} ds = t, \quad \psi(1) = 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(1 - 1/(\pi k)^2\right),$$

где $D \equiv 1$, $O(1/k^2) = -1/(\pi k)^2$ при $k \rightarrow \infty$.

Пример 5. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$(t^2 + 1)^2 x'' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (30)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (31)$$

Для задачи (30), (31) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = 1, \quad p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = (t^2 + 1)^2, \quad p_{21}(t) = 0, \quad p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (30), (31) являются $\lambda_k = (\pi k)^2 - 1$ ($k = 1, 2, \dots$).
Функции

$$u(t, \lambda_k) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} \sin\left(\frac{\pi k \operatorname{arctg} t}{\pi/4}\right)}{\sqrt{t^2 + 1} \sin(4k \operatorname{arctg} t)}$$

являются собственными функциями задачи (30), (31), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (30), (31) функция

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{\min\{(s^2 + 1)^2, 1\}} ds = t, \quad \psi(1) = 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(1 - 1/(\pi k)^2\right),$$

где $D \equiv 1$, $O(1/k^2) = -1/(\pi k)^2$ при $k \rightarrow \infty$.

Пример 6. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$e^t (e^t x')' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (32)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (33)$$

Для задачи (32), (33) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = e^t, \quad p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = e^t, \quad p_{21}(t) = 0, \quad p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (32), (33) являются $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{1 - e^{-1}}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$).

Функции $u(t, \lambda_k) = \sin\left(\frac{\pi k (1 - e^{-t})}{1 - e^{-1}}\right)$ являются собственными функциями задачи (32), (33), соответствующими собственным значениям λ_k . Для задачи (32), (33) функция

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{e^s} ds = 1 - e^{-t}, \quad \psi(1) = 1 - e^{-1}.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{1 - e^{-1}}\right)^2,$$

где $D = \frac{1}{(1 - e^{-1})^2}$, $O(1/k^2) \equiv 0$.

Пример 7. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$\frac{2 \cos^3 t}{\sin t} \left(\frac{1}{\sin 2t} x'\right)' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (34)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (35)$$

Для задачи (34), (35) обозначения задачи (3), (4) примут вид

$$a = 0, b = \pi/2, p_{00}(t) = 1, p_{11}(t) = \frac{1}{\sin 2t}, p_{10}(t) = 0, p_{22}(t) = \frac{2 \cos^3 t}{\sin t}, p_{21}(t) = 0, p_{20}(t) = 0.$$

Собственными значениями задачи (34), (35) являются $\lambda_k = \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi k}{2 \ln \cos 1} \right)^2$, где

$k = 1, 2, \dots$. Функции $u(t, \lambda_k) = \cos t \sin \left(\frac{\pi k \ln \cos t}{\ln \cos 1} \right)$ являются собственными функциями задачи (34), (35), соответствующими собственным значениям λ_k .

Для задачи (34), (35) функция

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{\min \{ \operatorname{ctg}^2 s, 1 \}} ds = t \text{ при } 0 \leq t \leq \pi/4,$$

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{\min \{ \operatorname{ctg}^2 s, 1 \}} ds = 1 + \pi/2 - t - \operatorname{ctg} t \text{ при } \pi/4 < t \leq 1, \psi(1) = \pi/2 - \operatorname{ctg} 1.$$

Представление (19) выглядит так:

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(\frac{1}{(2 \ln \cos 1)^2} + \frac{1}{4(\pi k)^2} \right),$$

где $D = \frac{1}{(2 \ln \cos 1)^2}$, $O(1/k^2) = \frac{1}{4(\pi k)^2}$ при $k \rightarrow \infty$.

3. О ПОЛУЧЕНИИ ТОЧНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТЕПЕНЯХ λ В РЯДЕ (6)

Теорема 4. Пусть уравнение (1) неосциллиционно на J и $C(t, s)$ — функция Коши уравнения (1), вещественные константы M_1, M_2 и функция $\varphi(\cdot)$ таковы, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{{}^0_P C(t, s)}{p_{22}(s)} \leq M_1 \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)} (t-s)$$

при всех значениях s и t таких, что $a \leq s \leq t \leq b$, и

$${}^0_P C(t, a) \leq M_2 \varphi(t-a)(t-a)$$

при всех значениях t таких, что $a \leq t \leq b$. Пусть далее $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$. Тогда в (6) имеют место точные оценки для коэффициентов при степенях λ :

$$0 \leq {}^0_P x_k(t) \leq \frac{M^{k+1} (t-a)^{2k+1} \varphi(t-a)}{(2k+1)!} \quad (t \in J, k = 0, 1, \dots). \quad (36)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $k = 0$ оценка (36) верна. Действительно, ${}^0_P x_0(t) = {}^0_P C(t, a)$, следовательно,

$${}^0_P x_0(t) = {}^0_P C(t, a) \leq M_2 (t-a) \varphi(t-a) \leq M (t-a) \varphi(t-a).$$

Пусть оценка (36) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Покажем ее справедливость для $k+1$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$${}^0_P x_{k+1}(t) = \int_a^t \frac{{}^0_P C(t, s) {}^0_P x_k(s)}{p_{22}(s)} ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t M_1 \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)} (t-s)(s-a)^{2k+1} \varphi(s-a) ds \leq \\
&\leq \frac{M^{k+2}}{(2k+1)!} \int_a^t \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)} \varphi(s-a) (t-s)(s-a)^{2k+1} ds = \\
&= \frac{M^{k+2}}{(2k+1)!} \int_a^t \varphi(t-a) (t-s)(s-a)^{2k+1} ds = \\
&= \frac{M^{k+2} \varphi(t-a)}{(2k+2)!} \int_a^t (t-s) d(s-a)^{2k+2} = \frac{M^{k+2} \varphi(t-a)}{(2k+2)!} \int_a^t (s-a)^{2k+2} ds = \\
&= \frac{M^{k+2} \varphi(t-a)}{(2k+3)!} \int_a^t d(s-a)^{2k+3} = \frac{M^{k+2} \varphi(t-a)}{(2k+3)!} (t-a)^{2k+3} = \frac{M^{(k+1)+1} (t-a)^{2(k+1)+1} \varphi(t-a)}{(2(k+1)+1)!}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$0 \leq {}_P^0 x_{k+1}(t) \leq \frac{M^{(k+1)+1} (t-a)^{2(k+1)+1} \varphi(t-a)}{(2(k+1)+1)!}.$$

По индукции оценки (36) имеют место для всех $k \in \mathbb{N}$. □

Пример 8. Рассмотрим задачу (3), (4) вида

$$e^{-t^2/2} \left(e^{t^2/2} x' \right)' + (1/4)t^2 x + (1/2)x = -(\lambda - (1/2))x \quad (t \in [0, 1]), \quad (37)$$

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (38)$$

(обратим внимание, что уравнение (37) получено из уравнения (22)).

Для задачи (37), (38) обозначения теоремы 4 примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = e^{t^2/2}, \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = e^{-t^2/2}, \quad p_{20}(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{{}_P^0 C(t, s)}{p_{22}(s)} = \frac{e^{-(t^2+s^2)/4}}{e^{-s^2/2}} (t-s) = \frac{e^{-t^2/4}}{e^{-s^2/4}} (t-s) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} (t-s),$$

$$M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) = e^{-t^2/4},$$

$${}_P^0 x_k(t) = x_k(t) = \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-t^2/4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Правые части оценок (36) функциями ${}_P^0 x_k(t)$ достигаются. Представление (5) (или представление (6), $p_{00}(t) = 1$) для задачи (37), (38) выглядит так:

$$u(t, \lambda) = e^{-t^2/4} \sin \left(\sqrt{\lambda - 1/2} t \right) / \sqrt{\lambda - 1/2}.$$

Корнями уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$, и собственными значениями задачи (37), (38) являются $\lambda_k = 1/2 + (\pi k)^2$ ($k = 1, 2, \dots$). Функции

$$u(t, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\lambda_k - 1/2)^m x_m(t) = e^{-t^2/4} \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}$$

являются собственными функциями задачи (37), (38), соответствующими собственным значениям λ_k задачи (37), (38).

Теорема 5. Пусть уравнение (1) неосциллиционно на J и $C(t, s)$ — функция Коши уравнения (1), вещественные константы M_1, M_2 и функция $\varphi(\cdot)$ таковы, что выполняются неравенства $1 \leq \varphi(t)$ при всех значениях t : $a \leq t \leq b$,

$${}^0_P C(t, s) \leq M_1 \int_s^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds, \quad {}^0_P C(t, a) \leq M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds$$

при всех значениях s и t : $a \leq s \leq t \leq b$. Пусть далее $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$. Тогда в (6) справедливы точные оценки для коэффициентов при степенях λ :

$$0 \leq {}^0_P x_k(t) \leq \frac{M^{k+1} \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (t \in J, k = 0, 1, \dots). \quad (39)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $k = 0$ оценка (39) верна. Действительно, ${}^0_P x_0(t) = {}^0_P C(t, a)$, следовательно,

$${}^0_P x_0(t) = {}^0_P C(t, a) \leq M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \leq M \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds.$$

Пусть оценка (39) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k+1$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} {}^0_P x_{k+1}(t) &= \int_a^t \frac{{}^0_P C(t, s) {}^0_P x_k(s)}{p_{22}(s)} ds \leq \\ &\leq \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!} \int_a^t \left(\frac{M_1 \varphi(s)}{p_{22}(s)} \right) \left(\int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)} d\tau \right) \left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+1} ds \leq \\ &\leq \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!} \int_a^t \left(\int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)} d\tau \right) d \left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+2} = \\ &= \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!} \int_a^t \left(\frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} \right) \left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)} d\tau_1 \right)^{2k+2} ds = \\ &= \frac{M^{k+2}}{(2k+3)!} \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2k+3} = \frac{M^{(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!} \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$0 \leq {}^0_P x_k(t) \leq \frac{M^{(k+1)+1} \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)} ds \right)^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}.$$

По индукции оценки (39) имеют место для всех $k \in \mathbb{N}$. □

Пример 9. Рассмотрим задачу вида (3), (4) — задачу (26), (27)

$$\frac{1}{\cos t} \left(\frac{1}{\cos t} x' \right)' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1])$$

(обратим внимание, что уравнение (26) получено из уравнения $x'' + \operatorname{tg} t x' = -\lambda \cos^2 t x(t)$),
 $x(0) = x(1) = 0$.

Для задачи (26), (27) обозначения теоремы 5 примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad p_{20}(t) = 0;$$

$${}^0_P C(t, s) = C(t, s) = \int_s^t \frac{1}{\cos \tau} d\tau = \int_s^t \cos \tau d\tau = \sin t - \sin s, \quad M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$${}^0_P x_k(t) = x_k(t) = \frac{(\sin t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Правые части оценок (39) функциями ${}^0_P x_k(t)$ достигаются. Представление (5) (или представление (6), $p_{00}(t) = 1$) для задачи (26), (27) выглядит так: $u(t, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} \sin t)}{\sqrt{\lambda}}$. Корнями уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$, и собственными значениями задачи (26), (27) являются $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\sin 1}\right)^2$. Функции

$$u(t, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_k^m x_m(t) = \frac{\sin 1 \sin\left(\frac{\pi k \sin t}{\sin 1}\right)}{\pi k}$$

есть собственные функции задачи (26), (27), соответствующие собственным значениям λ_k задачи (26), (27). Обобщим пример 9.

Пример 10. Рассмотрим задачу (3), (4) вида (функция $p(t)$ измерима, почти всюду конечна, неотрицательна и суммируема на $[0, 1]$)

$$p(t)(p(t)x')' = -\lambda x \quad (t \in [0, 1]), \quad (40)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (41)$$

Для задачи (40), (41) обозначения теоремы 5 примут вид

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1, \quad p_{11}(t) = p(t), \quad p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = p(t), \quad p_{20}(t) = 0;$$

$${}^0_P C(t, s) = C(t, s) = \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)}, \quad M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$${}^0_P x_k(t) = x_k(t) = \frac{\left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Правые части оценок (39) функциями ${}^0_P x_k(t)$ достигаются. Представление (5) (или представление (6), $p_{00}(t) = 1$) для задачи (40), (41) выглядит так:

$$u(t, \lambda) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Корнями уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$, и собственными значениями задачи (40),

(41) являются $\lambda_k = \left(\pi k / \int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)} \right)^2$. Функции

$$u(t, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_k^m x_m(t) = \frac{\left(\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)} \right) \sin \left(\pi k \int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)} / \int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)} \right)}{\pi k}$$

являются собственными функциями задачи (40), (41), соответствующими собственным значениям λ_k задачи (40), (41).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Некоторые вопросы теории уравнения Штурма–Лиувилля*, УМН **15** (1(91)), 3–98 (1960).
- [2] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию* (Наука, М., 1970).
- [3] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения* (Наук. думка, Киев, 1977).
- [4] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы)* (Наука, М., 1979).
- [5] Садовничий В.А. *Теория операторов* (Изд-во МГУ, М., 1986).
- [6] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака* (Наука, М., 1988).
- [7] Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика лобого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом*, Изв. РАН, Сер. Матем. **64** (4), 47–108 (2000).
- [8] Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Матем. заметки **66** (6), 897–912 (1999).
- [9] Савчук А.М. *О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом*, Матем. заметки **69** (2), 277–285 (2001).
- [10] Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами–распределениями*, Тр. Московск. матем. об-ва **64**, 159–212 (2003).
- [11] Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н. *Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ -потенциалом*, Вестн. САФУ. Сер. Естеств. науки (1), 104–113 (2016).
- [12] Сафонова Т.А., Рябченко С.В. *О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом*, Вестн. САФУ. Сер. Естеств. науки (2), 115–125 (2016).
- [13] Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети*, УМН **59** (3(357)), 115–150 (2004).
- [14] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Ищенко А.С., Шабров С.А. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля*, Матем. заметки **82** (4), 578–582 (2007).
- [15] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач*, УМН **63** (1(379)), 111–154 (2008).
- [16] Митрохин С.И. *Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты* (ИНТУИТ, М, 2009).
- [17] Митрохин С.И. *О спектральных свойствах многоточечной краевой задачи для дифференциального оператора нечетного порядка с суммируемым потенциалом*, Arctic Environmental Research **17** (4), 376–392 (2017).
- [18] Митрохин С.И. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией*, Изв. вузов. Матем. (6), 31–47 (2018).
- [19] Митрохин С.И. *Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (6), 46–58 (2018).
- [20] Митрохин С.И. *Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией*, Журн. СВМО **22** (1), 48–70 (2020).

- [21] Шин Д.Ю. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n -го порядка*, Матем. сб. **7(49)** (3), 479–532 (1940).
- [22] Шин Д.Ю. *О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве*, Матем. сб. **13(55)** (1), 39–70 (1943).
- [23] Xiao xia Lv, Ji-jun Ao, Zettl A. *Dependence of eigenvalues of fourth-order differential equations with discontinuous boundary conditions on the problem*, J. Math. Anal. Appl. **456** (1), 671–685 (2017).
- [24] Qinglan Bao, Jiong Sun, Xiaoling Hao, Zettl A. *Characterization of self-adjoint domains for regular even order C -symmetric differential operators*, Electronic J. Qual. Theory Diff. Equat. **62**, 1–17 (2019).
- [25] Zettl A. *Sturm–Liouville Theory*, Amer. Math. Soc. **121** (2005).
- [26] Zettl A. *Recent Developments in Sturm–Liouville Theory* (De Gruyter, Berlin–Boston, 2021).
- [27] Jianfang Qin, Kun Li, Zhaowen Zheng, Jinming Cai *Dependence of eigenvalues of discontinuous fourth-order differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions*, J. Nonlinear Math. Phys. **29** (4), 776–793 (2022).
- [28] Everitt W.N., Marcus L. *Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators*, Amer. Math. Soc. **61** (1999).
- [29] Eckhardt J., Gestezy F., Nichols R., Teschl G. *Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials*, Opuscula Math. **33** (3), 467–563 (2013).
- [30] Everitt W.N., Race D. *The regular representation of singular second order differential expressions using quasi-derivatives*, Proc. London Math. Soc. (3) **65** (2), 383–404 (1992).
- [31] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (Наука, М., 1969).
- [32] Дерр В.Я. *Неосцилляція решений линейного квазидифференциального уравнения*, Изв. ин-та матем. и информ. УдГУ (1(16)), 3–105 (1999).
- [33] Дерр В.Я. *Об адекватном описании сопряженного оператора*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки (3), 43–63 (2011).
- [34] Ватолкин М.Ю., Дерр В.Я. *О представлении решений квазидифференциального уравнения*, Изв. вузов. Матем. (10), 27–34 (1995).

Михаил Юрьевич Ватолкин

Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,
ул. Студенческая, д. 7, г. Ижевск, 426069, Россия,

e-mail: vmyu6886@gmail.com

M. Yu. Vatulkin

Investigation of the asymptotics of the eigenvalues of a second order quasidifferential boundary value problem

Abstract. We construct the asymptotics of the eigenvalues for a quasidifferential Sturm–Liouville boundary value problem on eigenvalues and eigenfunctions considered on a segment $J = [a, b]$, with the boundary conditions of type I on the left – type I on the right, i.e., for a problem of the form (in the explicit form of record)

$$p_{22}(t)\left(p_{11}(t)(p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t)(p_{00}(t)x(t))\right)' + p_{21}(t)\left(p_{11}(t)(p_{00}(t)x(t))' + p_{10}(t)(p_{00}(t)x(t))\right) + p_{20}(t)(p_{00}(t)x(t)) = -\lambda(p_{00}(t)x(t)) \quad (t \in J = [a, b]),$$

$$p_{00}(a)x(a) = p_{00}(b)x(b) = 0.$$

The requirements for smoothness of the coefficients (i.e., functions $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}, k \in 0 : i, i \in 0 : 2$) in the equation are minimal, namely, these are: functions $p_{ik}(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ are such that functions $p_{00}(\cdot)$ and $p_{22}(\cdot)$ are measurable, nonnegative, almost everywhere finite and almost everywhere nonzero, functions $p_{11}(\cdot)$ and $p_{21}(\cdot)$ are also nonnegative on segment J , and

in addition, functions $p_{11}(\cdot)$ and $p_{22}(\cdot)$ are essentially bounded on J , functions $\frac{1}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}, \frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}, \frac{1}{\min\{p_{11}(t)p_{22}(t), 1\}}$ are summable on segment J . Function $p_{20}(\cdot)$ acts as a potential.

It is proved that under the condition of nonoscillation of a homogeneous quasidifferential equation of the second order on J , the asymptotics of the eigenvalues of the boundary value problem under consideration has the form

$$\lambda_k = (\pi k)^2 \left(D + O(1/k^2) \right)$$

as $k \rightarrow \infty$, where D is a real positive constant defined in some way.

Keywords: eigenfunction, eigenvalue, power series, estimate for coefficients, quasidifferential equation, boundary value problem, sum of series, representation of eigenfunctions as sums of power series.

Mikhail Yur'evich Vatulkin

*Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya str., Izhevsk, 426069 Russia,*

e-mail: vmyu6886@gmail.com