Известия вузов. Математика
2024, №3, с. 3–14
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.Ю. АГАФОНОВА, С.С. ВОЛОСИВЕЦ

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Аннотация. Приводятся необходимые и достаточные условия сходимости в $L^1[0,1)$ обобщенных производных сумм рядов по мультипликативным системам и соответствующих рядов Фурье. Эти условия являются аналогами тригонометрических результатов Ш. Шенга, У. Брея и Ч. Станоевича и обобщают некоторые результаты Ф. Морица, доказанные для рядов Фурье–Уолша.

Ключевые слова: мультипликативная система, L^1-интегрируемость, сходимость в L^1, обобщенная производная.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-3-3-14

Введение

Последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, стремящаяся к нулю, принадлежит классу $S_{p\alpha r}$, $1 < p < \infty$, $\alpha \ge r \ge 0$, если существует положительная убывающая последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\alpha}A_k < \infty$ и

$$n^{-p(\alpha-r)-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{|\Delta a_k|^p}{A_k^p} = O(1), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\},$$

где $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$. Если $\alpha = r$, то обозначаем $S_{p\alpha r}$ как S_{pr}. Для $r = 0$ класс S_{pr} совпадает с классом Ч. Станоевича — В. Станоевич S_p ([1]). В свою очередь, класс S_p обобщает класс С.А. Теляковского S, состоящего из всех последовательностей $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ таких, что существует убывающая положительная последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ со свойствами $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k < \infty$ и $|\Delta a_k| \le A_k$, $k \in \mathbb{N}$ ([2]).

Пусть $f \in L^1_{2\pi}$ (т. е. $f(x)$ является 2π-периодической и интегрируемой по Лебегу на $[0, 2\pi]$) имеет ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{1}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{2}$$

Поступила в редакцию 02.02.2023, после доработки 02.02.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

и $S_n^T(f)(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ или $S_n^T(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$. Определенный выше класс $S_{p\alpha r}$ был введен Ш. Шенгом [3], который доказал

Предложение 1. *Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha \ge 0$ и $r \in \{0, 1, \dots, [\alpha]\}$. Если $f \in L^1_{2\pi}$ имеет ряд Фурье вида (1) или (2), $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha r}$, то условия*

a) $\lim_{n\to\infty} a_n n^r \log n = 0$,

b) $(S_n^T)^{(r)}(f)(x)$ *сходится к* $g \in L^1_{2\pi}$ *в* $L^1_{2\pi}$

равносильны.

В случае $\alpha = r = 0$, $1 < p \le 2$, эта теорема установлена Ч. Станоевичем и В. Станоевич [1]. В работе [4] У. Брей и Ч. Станоевич доказали

Предложение 2. *Если $f \in L^1_{2\pi}$ имеет ряд Фурье (1) и для некоторого $1 < p \le 2$*

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1} |\Delta a_k|^p = 0,$$

то условия

a) $\lim_{n\to\infty} a_n \log n = 0$,

b) $\lim_{n\to\infty} \|S_n^T(f) - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n^T(f)(x)|\, dx = 0$

равносильны.

Целью настоящей статьи является получение аналогов предложений 1 и 2 в случае мультипликативных систем с ограниченной образующей последовательностью.

Важную роль в работе будет играть аналог следующего неравенства типа Сидона, принадлежащий Ф. Морицу [5].

Предложение 3. *Пусть $1 < p \le 2$, $D_n^*(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$, $0 < \gamma < \pi$, $0 \le n \le N$. Тогда для некоторой абсолютной константы C справедливо неравенство*

$$\int_\gamma^\pi \left| \sum_{k=n}^{N} a_k D_k^*(x) \right| dx \le \frac{C}{(p-1)^{1/p}} \gamma^{-1/p} \left(\sum_{k=n}^{N} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. Определения и леммы

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью натуральных чисел таких, что $2 \le p_n \le N$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le x_n < p_n. \tag{3}$$

Представление (3) является единственным, если для $x = k/m_j$, $0 < k < m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Для $x, y \in [0, 1)$, записанных в виде (3) полагаем $x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, $z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. Аналогичным образом определяется $x \ominus y$. Если x фиксировано, то эти операции определены для всех $y \in [0, 1)$, кроме счетного множества.

Если $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ записано в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k_i < p_i, \tag{4}$$

и $x \in [0,1)$ имеет разложение (3), то по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой с образующей последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Она является ортонормированной и полной в $L^1[0,1]$. Кроме того, для фиксированного $x \in [0,1)$, почти всех $y \in [0,1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы следующие равенства:

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}. \tag{5}$$

Эти утверждения можно найти в ([6], § 1.5). Некоторые другие свойства представлены в леммах, приведенных ниже.

Пусть $f \in L^1[0,1)$. Коэффициенты Фурье, частные суммы Фурье и ядра Дирихле по отношению к системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задаются равенствами

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\chi_k(x),$$

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать также средние Фейера и ядра Фейера по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k(f)(x)/n, \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k(x)/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $1 \le p < \infty$ пространство $L^p[0,1)$ состоит из всех измеримых по Лебегу на $[0,1)$ функций таких, что $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty$.

Для функции $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, скажем, что $g \in L^p[0,1)$ является r-й обобщенной производной f в $L^p[0,1)$, $r > 0$, если $\widehat{g}(k) = k^r \widehat{f}(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что для полиномов по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ это определение не зависит от p. Далее мы рассматриваем r-ю обобщенную производную функции f в $L^1[0,1)$ и обозначаем ее через $f^{[r]}$.

Дадим теперь необходимые вспомогательные результаты.

Лемма 1.

1) *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $x \in \left[m_{k+1}^{-1}, m_k^{-1}\right)$ справедливо неравенство $|D_n(x)| \le m_{k+1} \le N x^{-1}$.*

2) *Для $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где X_E является индикатором множества E.*

Лемма 1 доказана в ([7], гл. 4, § 4; [8]).

Лемма 2. *Пусть $F_n(x)$ является ядром Фейера, определенным выше. Тогда нормы*

$$\{\|F_n\|_1\}_{n=1}^{\infty}$$

ограничены и

$$\sigma_n(f)(x) = F_n * f(x) = \int_0^1 f(x \ominus t) F_n(t)\, dt$$

сходится к $f \in L^1[0,1]$ *в* $L^1[0,1]$.

Доказательство леммы 2 можно найти в ([7], гл. 4, § 10; [9]).

Лемма 3. *Пусть* $r > 0$ *и* $D_n^{[r]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k^r \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1) $|D_n^{[r]}(x)| \le C n^r x^{-1}$, $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $\|D_n^{[r]}\|_1 \le C n^r \|D_n\|_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Используя дважды преобразование Абеля, имеем

$$D_n^{[r]}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (k^r - (k+1)^r) D_{k+1}(x) + (n-1)^r D_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3} (k^r - 2(k+1)^r + (k+2)^r)(k+1) F_{k+1}(x) +$$

$$+((n-2^r) - (n-1)^r)(n-1) F_{n-1}(x) + (n-1)^r D_n(x). \tag{6}$$

Используя лемму 1 и (6), для $n \ge 2$ получаем

$$|D_n^{[r]}(x)| \le \sum_{k=0}^{n-2} ((k+1)^r - k^r) C_1 x^{-1} + (n-1)^r C_1 x^{-1} \le 2 C_1 n^r x^{-1}.$$

С другой стороны, по теореме о среднем

$$k^r - 2(k+1)^r + (k+2)^r = O((k+1)^{r-2}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и для $n \ge 3$ находим

$$\|D_n^{[r]}\|_1 \le C_2 \sum_{k=0}^{n-3} (k+1)^{r-2} (k+1) \|F_{k+1}\|_1 + C_3 (n-1)^{r-1} (n-1) \|F_{n-1}\|_1 +$$

$$+(n-1)^r \|D_n\|_1 \le C_4 (n^r + n^r \|D_n\|_1) \le C_5 n^r \|D_n\|_1,$$

поскольку согласно неравенству Никольского для системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ([7], гл. 4, § 9, лемма 1)

$$n^{1/2} = \|D_n\|_2 \le C_6 n^{1/1-1/2} \|D_n\|_1,$$

т. е. $\|D_n\|_1 \ge C_6^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Лемма 4 доказана в работе [10]. Для удобства читателей дадим более короткое доказательство.

Лемма 4. *Пусть* $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $r > 0$. *Для* $t_n^{[r]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k^r a_k \chi_k(x)$ *справедливо неравенство* $\left\|t_n^{[r]}\right\|_p \le C n^r \|t_n\|_p$.

Доказательство. Пусть $n \in [m_{k-1}, m_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку верно (5) и система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной, легко выводим, что $t_n^{[r]}(x) = t_n * D_{m_k}^{[r]}(x)$. Далее используем частный случай неравенства Юнга $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1[0,1)$ ([11], гл. 4, раздел 4.4, лемма 1). В силу лемм 3, 1 и неравенства выше получаем

$$\|t_n^{[r]}\|_p \leq \|t_n\|_p \|D_{m_k}^{[r]}\|_1 \leq \|t_n\|_p C_1 n^r \|D_{m_k}\|_1 = C_1 n^r \|t_n\|_p.$$

□

Лемма 5 установлена в [12] и является аналогом предложения 3 для мультипликативных систем.

Лемма 5. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. *Тогда для любых* $\gamma \in (0,1)$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *имеем*

$$\int_{\gamma}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k D_{k+1}(x) \right| dx \leq C(p) \gamma^{1/p-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Лемма 6. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq r \leq \alpha$ *и* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha r}$. *Тогда*

$$\left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]} \right\|_1 \leq C(p)(k+1)^{\alpha+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

и

$$A_N \left\| \sum_{j=0}^{N} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]} \right\|_1 = o(1), \quad N \to +\infty. \tag{8}$$

Доказательство. По лемме 4 имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]} \right\|_1 \leq C_1 (k+1)^r \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1} \right\|_1 =$$

$$= C_1 (k+1)^r \left(\int_0^{1/(k+1)} + \int_{1/(k+1)}^{1} \right) \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1} \right| dx = C_1 (k+1)^r (I_1(k) + I_2(k)). \tag{9}$$

Используя очевидное неравенство $|D_j(x)| \leq j$, $j \in \mathbb{N}$, и неравенство Гёльдера, для $q = p/(p-1)$ получаем

$$I_1(k) \leq (k+1)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{|\Delta a_j|^p}{A_j^p} \right)^{1/p} \left(\sum_{j=0}^{k} (j+1)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C_2 (k+1)^{1/q - r + \alpha + 1/p} \left[\frac{1}{(k+1)^{p(\alpha - r)+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{|\Delta a_j|^p}{A_j^p} \right]^{1/p} \leq C_3 (k+1)^{-r+\alpha+1}. \tag{10}$$

Применяя лемму 5 к $I_2(k)$ и повторяя аргументы из (10), находим

$$I_2(k) \leq C_4 (k+1)^{1/q} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{|\Delta a_j|^p}{A_j^p} \right)^{1/p} \leq C_5 (k+1)^{-r+\alpha+1}. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получаем (7). Поскольку в силу условия $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha r}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} A_n$ сходится и $\sum\limits_{n=[N/2]}^{N} n^{\alpha} A_n \to 0$ при $N \to +\infty$, видим, что $A_N(N+1)^{\alpha+1} \to 0$ при $N \to +\infty$. Из этого факта и (7) выводим (8). □

Лемма 7. *Пусть* $f \in L^1[0,1)$, $\lambda > 1$ *и*

$$\tau_{n,\lambda}(f)(x) = \frac{1}{[\lambda n] - n + 1} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} S_k(f)(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$ *п.в. на* $[0,1)$.

Доказательство. Поскольку (мы полагаем $\sigma_0(f) = 0$)

$$\tau_{n,\lambda}(f) = \frac{1}{[\lambda n] - n + 1}([\lambda n]\sigma_{[\lambda n]}(f) - (n-1)\sigma_{n-1}(f)),$$

по лемме 2 имеем

$$\|f - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 \le \frac{1}{[\lambda n] - n + 1}([\lambda n]\|f - \sigma_{[\lambda n]}(f)\|_1 + (n-1)\|f - \sigma_{n-1}(f)\|_1) \le$$

$$\le \frac{2\lambda}{\lambda - 1}(\|f - \sigma_{[\lambda n]}(f)\|_1 + \|f - \sigma_{n-1}(f)\|_1) = o(1), \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, хорошо известно, что $\sigma_n(f)(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0,1)$ (см., например, [9]). Аналогично доказательству выше можно показать, что для каждого $x \in [0,1)$ со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)$ также верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$. □

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2$, $\alpha \ge 0$, $0 \le r \le \alpha$. *Если* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha r}$ *и* $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *то условия*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \|D_{n+1}^{[r]}\|_1 = 0$,

2) $\{S_n^{[r]}\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится в* $L^1[0,1)$ *к некоторой функции* $g \in L^1[0,1)$

равносильны.

Доказательство. Используя преобразование Абеля, имеем

$$S_n^{[r]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k k^r \chi_k(x) = a_{n-1} D_n^{[r]}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \Delta a_k D_{k+1}^{[r]}(x). \tag{12}$$

С другой стороны, в силу условия $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha r}$ и неравенства Гёльдера для $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^r |\Delta a_k| = \sum_{k=0}^{n} A_k (k+1)^r \frac{|\Delta a_k|}{A_k} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k \sum_{j=0}^{k} \frac{|\Delta a_j|}{A_j}(j+1)^r + A_n \sum_{j=0}^{n} (j+1)^r |\frac{|\Delta a_j|}{A_j} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{r+1/q+\alpha-r+1/p}\Delta A_k\left(\frac{1}{(k+1)^{p(\alpha-r)+1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{|\Delta a_j|^p}{A_j^p}\right)^{1/p}+$$

$$+n^{\alpha+1}A_n\left(\frac{1}{n^{p(\alpha-r)+1}}\sum_{j=0}^{n}\frac{|\Delta a_j|^p}{A_j^p}\right)^{1/p}\le$$

$$\le C_1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{\alpha+1}\Delta A_k+n^{\alpha+1}A_n\right)\le C_2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{\alpha}A_k. \qquad (13)$$

Действительно, используя преобразование Абеля и теорему Лагранжа о среднем, находим

$$\sum_{k=0}^{N}\Delta A_k(k+1)^{\alpha+1}\le\sum_{k=0}^{N}A_k((k+1)^{\alpha+1}-k^{\alpha+1})\le(\alpha+1)\sum_{k=0}^{N}(k+1)^{\alpha}A_k.$$

Если выполнено условие 1), то из (12), неравенства $\|D_n^{[r]}\|_1\ge C_3n^r$, $C_3>0$ (см. применение неравенства Никольского в доказательстве леммы 3) и условия 1) леммы 3 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}D_n^{[r]}(x)=0$ при $x\in(0,1)$ и что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}^{[r]}(x)$ и последовательность $\left\{S_n^{[r]}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к некоторой функции $g(x)$ для всех $x\in(0,1)$. В силу условия 1) и леммы 6 выводим

$$\left\|\sum_{k=n}^{N}\Delta a_kD_{k+1}^{[r]}\right\|_1=\left\|\sum_{k=n}^{N}A_k\frac{\Delta a_k}{A_k}D_{k+1}^{[r]}\right\|_1=$$

$$=\left\|\sum_{k=n}^{N-1}\Delta A_k\sum_{j=0}^{k}\frac{\Delta a_j}{A_j}D_{j+1}^{[r]}+A_N\sum_{j=0}^{N}\frac{\Delta a_j}{A_j}D_{j+1}^{[r]}-A_n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta a_j}{A_j}D_{j+1}^{[r]}\right\|_1\le$$

$$\le\sum_{k=n}^{N-1}\Delta A_k\left\|\sum_{j=0}^{k}\frac{\Delta a_j}{A_j}D_{j+1}^{[r]}\right\|_1+o(1)\le$$

$$\le C_2\sum_{k=n}^{N-1}(k+1)^{\alpha+1}\Delta A_k+o(1)=o(1),\quad n\to\infty,\quad N>n. \qquad (14)$$

В итоге получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}^{[r]}$ сходится в $L^1[0,1)$ к $g_0\in L^1[0,1)$. Из (12) следует, что $\left\{S_n^{[r]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится в $L^1[0,1)$ к тому же пределу g_0. Легко видеть, что $g_0(x)=g(x)$ п.в. на $[0,1)$.

Если $h_n\to h$ в $L^1[0,1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{h_n}(k)=\widehat{h}(k)$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$. Если выполнено условие 2), то $\widehat{g}(k)=k^ra_k$, $k\in\mathbb{Z}_+$. С другой стороны, в силу (14) заключаем, что сумма из правой части (12) $Z_{n-1}^{[r]}=\sum\limits_{j=0}^{n-2}\Delta a_jD_{j+1}^{[r]}$ сходится к $g_1\in L^1[0,1)$ в $L^1[0,1)$, откуда при $n\ge k+2$ вытекает

$$\widehat{Z_{n-1}^{[r]}}(k)=\sum_{j=k}^{n-2}\Delta a_jk^r=k^r(a_k-a_{n-1})\to k^ra_k,\quad n\to\infty,\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Значит, $\widehat{g_1}(k) = k^r a_k = \widehat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, откуда по теореме единственности $g_1(x) = g(x)$ п.в. на $[0,1)$. Из (12) следует

$$\|a_{n-1}D_n^{[r]}\|_1 \le \left\|S_n^{[r]} - g\right\|_1 + \left\|Z_{n-1}^{[r]} - g_1\right\|_1 = o(1), \quad n \to \infty,$$

и имеет место условие 1). □

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le 2$, $\alpha \ge 0$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_{p\alpha\alpha} = S_{p\alpha}$, $0 \le r \le \alpha$. *Тогда для* $Z_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_{k+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *существует* $f(x) = \lim_{n\to\infty} Z_n(x)$, $x \in (0,1)$, $f \in L^1[0,1)$, *и полиномы* $Z_n^{[r]}$ *сходятся к* $g = f^{[r]} \in L^1[0,1)$ *в* $L^1[0,1)$.

Кроме того, условия

$$\|S_n^{[r]} - f^{[r]}\|_1 = o(n^{r-\alpha}), \quad n \to \infty, \tag{15}$$

$$|a_{n-1}|\|D_n^{[r]}\|_1 = o(n^{r-\alpha}), \quad n \to \infty, \tag{16}$$

равносильны.

Доказательство. Поскольку $S_{p\alpha\alpha} \subset S_{prr}$ при $\alpha \ge r \ge 0$, по лемме 6 имеем

$$\left\|\sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]}\right\|_1 \le C_1(k+1)^{r+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Согласно доказательству леммы 6 выполнено соотношение $A_N = o((N+1)^{-\alpha-1})$, $N \to \infty$, получаем

$$A_N \left\|\sum_{j=0}^{N} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]}\right\|_1 = o((N+1)^{-\alpha-1}) O((N+1)^{r+1}) = o((N+1)^{r-\alpha}), \quad N \to \infty. \tag{18}$$

Из соотношений (17), (18) следует, что (14) заменяется на

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}^{[r]}\right\| \le \sum_{k=n}^{\infty} \Delta A_k \left\|\sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]}\right\|_1 + A_n \left\|\sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta a_j}{A_j} D_{j+1}^{[r]}\right\|_1 =$$

$$= O\left(\sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{r+1} \Delta A_k\right) + o(n^{r-\alpha}) =$$

$$= O((n+1)^{r-\alpha}) \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{\alpha+1} \Delta A_k + o(n^{r-\alpha}) = o(n^{r-\alpha}), \quad n \to \infty \tag{19}$$

(см. (13)). Таким образом, $\left\{Z_n^{[r]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $g \in L^1[0,1)$ в $L^1[0,1)$ и, аналогично, $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f \in L^1[0,1)$ в $L^1[0,1)$. Легко видеть, что $g = f^{[r]}$. Если справедливо (16), то в силу (12), (19) имеем (15).

Обратно, из (15), (19), (12) выводится (16). □

Замечание 1. Теорема 2 является аналогом теоремы 3.2 из [3].

Теперь докажем обобщение результата Ф.Морица ([13], теорема 1) и выведем аналог предложения 2 из этого обобщения.

Теорема 3. *Если $f \in L^1[0,1)$ и величина*

$$H(\lambda,p)=\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\widehat{f}(k)|^p$$

конечна для некоторых $\lambda>1$ и $p>1$, то условия

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{f}(n)\|D_{n+1}\|_1=0, \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|_1=0 \tag{21}$$

равносильны.

Доказательство. Отметим, что конечность величины $H(\lambda,r)$ и неравенство $r>p>1$ с помощью неравенства Гёльдера позволяют заключить, что $H(\lambda,p)<\infty$. Поэтому рассматриваем $1<p\le 2$. Также $H(\lambda_0,p)<\infty$ означает. что $H(\lambda,p)\le H(\lambda_0,p)<\infty$ для всех $1<\lambda\le\lambda_0$. Пусть справедливо (20) и $d_n=([\lambda n]-n+1)^{-1}$. Тогда по определению

$$J_0(n):=\int_0^{d_n}|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le$$

$$\le\int_0^{d_n}d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k+1)|\widehat{f}(k)|\,dx\le d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}|\widehat{f}(k)|. \tag{22}$$

Правая часть неравенства (22) есть $o(1)$ в силу аналога теоремы Римана–Лебега ([7], гл. 4, § 2, теорема 4.2) или [8]. С другой стороны $\left(\text{считая }\sum_{k=n}^{j-2}=0\text{ при }j=n+1\right)$,

$$\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)=([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{k=n}^{j-1}\widehat{f}(k)\chi_k(x),$$

$$\sum_{k=n}^{j-1}\widehat{f}(k)\chi_k(x)=\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\widehat{f}(k)D_{k+1}(x)+\widehat{f}(j-1)D_j(x)-\widehat{f}(n)D_n(x),$$

откуда следует

$$\int_{d_n}^1|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le\int_{d_n}^1|\widehat{f}(n)D_n(x)|\,dx+$$

$$+\int_{d_n}^1 d_n\left|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\widehat{f}(j-1)D_j(x)\right|dx+d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\widehat{f}(k)D_{k+1}(x)\right|dx=$$

$$=J_1(n)+J_2(n)+J_3(n). \tag{23}$$

В силу (20) имеем $\lim\limits_{n\to\infty}J_1(n)=0$. Далее по лемме 5

$$J_2(n)\le C_1d_nd_n^{1/p-1}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\widehat{f}(j-1)|^p\right)^{1/p}=C_1\left(d_n\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\widehat{f}(j-1)|^p\right)^{1/p}. \tag{24}$$

Как и выше, в силу аналога теоремы Римана–Лебега получаем $\lim\limits_{n\to\infty} J_2(n) = 0$. Изменяя порядок суммирования и применяя лемму 5, находим

$$J_3(n) = d_n \int_{d_n}^{1} \left| \sum_{k=n}^{[\lambda n]-2} \sum_{j=k+2}^{[\lambda n]} \Delta\widehat{f}(k) D_{k+1}(x) \right| dx =$$

$$= d_n \int_{d_n}^{1} \left| \sum_{k=n}^{[\lambda n]-2} ([\lambda n] - k - 1) \Delta\widehat{f}(k) D_{k+1}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq C_1 d_n^{1/p} \left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]} ([\lambda n] - k - 1)^p |\Delta\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} \leq C_1 ((\lambda - 1)n)^{1-1/p} \left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]} |\Delta\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C_1 (\lambda - 1)^{1-1/p} \left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1} |\Delta\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p}. \tag{25}$$

Из (22)–(25) следует, что $\|\tau_{n,\lambda}(f) - S_n(f)\|_1$ может быть произвольно малым при больших n и λ, близких к единице. Используя лемму 7, получаем (21).

Пусть теперь имеет место (21). Тогда по лемме 7 верно $\lim\limits_{n\to\infty} \|\tau_{n,\lambda}(f) - S_n(f)\|_1 = 0$. Используя обозначения выше, находим

$$J_1(n) \leq \|S_n(f) - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 + J_0(n) + J_2(n) + J_3(n). \tag{26}$$

Но все слагаемые в правой части (26), кроме последнего, стремятся к нулю при $n \to \infty$, тогда как $J_3(n)$ стремится к нулю при $\lambda \to 1+0$. Таким образом, для некоторого $\lambda > 1$ и достаточно больших n

$$J_1(n) = \int_{d_n}^{1} |\widehat{f}(n) D_n(x)|\, dx < \varepsilon/2.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{d_n} |\widehat{f}(n) D_n(x)|\, dx \leq n d_n |\widehat{f}(n)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

для фиксированного $\lambda > 1$. Следовательно, $\displaystyle\int_0^1 |\widehat{f}(n) D_n(x)|\, dx < \varepsilon$ при $n > n_0(\varepsilon)$ и (20) доказано. □

Следствие 1. Пусть $f \in L^1[0,1)$, $p > 1$ и

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1} |\Delta\widehat{f}(k)|^p = 0. \tag{27}$$

Тогда условия (20) и (21) равносильны.

Доказательство. Ясно, что (27) влечет выполнение условия $H(\lambda, p) < \infty$ из теоремы 3 для некоторых $p > 1$ и $\lambda > 1$. □

Следствие 2. Пусть $f \in L^1[0,1)$, $p > 1$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} k^p |\Delta\widehat{f}(k)|^p. \tag{28}$$

Тогда условия (20) и (21) равносильны.

Доказательство. В силу (28) видим, что

$$(2n)^{-1}\sum_{k=1}^{2n} k^p|\Delta\widehat{f}(k)|^p, \quad \sum_{k=n}^{2n} k^{p-1}|\Delta\widehat{f}(k)|^p$$

ограничены. Поэтому мы можем использовать теорему 3 при $\lambda = 2$. □

Следствие 3. Пусть $f \in L^1[0,1)$, $1 < p < \infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}|\Delta\widehat{f}(k)|^p$ сходится. Тогда условия (20) и (21) равносильны.

Замечание 2. Следствие 1 является аналогом предложения 2. В случае системы Уолша (т. е. при $p_i \equiv 2$) оно доказано Ф. Морицем [14]. Аналог следствия 3 для косинус-рядов был установлен Ч. Станоевичем [15].

Литература

[1] Stanojević Č.V., Stanojević V.B. *Generalizations of the Sidon–Telyakovskii theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (4), 679–684 (1987).

[2] Теляковский С.А. *Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов*, Матем. заметки **14** (3), 317–328 (1973).

[3] Sheng S. *The extension of the theorems of C.V. Stanojević and V.B. Stanojević*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (4), 895–904 (1990).

[4] Bray W.O., Stanojević Č.V. *Tauberian L^1-convergence classes of Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1), 59–69 (1983).

[5] Móricz F. *Sidon-type inequalities*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **48(62)**, 101–109 (1990).

[6] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения* (Наука, М., 1987).

[7] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах* (Элм, Баку, 1981).

[8] Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **11** (4), 363–400 (1947).

[9] Pal J., Simon P. *On a generalization of the concept of derivative*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **29** (1-2), 155–164 (1977).

[10] Волосивец С.С. *Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам*, Anal. Math. **21** (1), 61–77 (1995).

[11] Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series. An introduction to dyadic analysis* (Akad. Kiado, Budapest, 1990).

[12] Волосивец С.С., Лихачева Т.В. *Неравенства типа Сидона и сильная аппроксимация суммами Фурье по мультипликативным системам*, Сиб. матем. журн. **57** (3), 617–631 (2016).

[13] Móricz F. *On L^1-convergence of Walsh–Fourier series.* II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **58** (1-2), 203–210 (1991).

[14] Móricz F. *On L^1-convergence of Walsh–Fourier series.* I, Rend. Circ. Matem. Palermo. Ser. 2 **38** (3), 411–418 (1989).

[15] Stanojević Č.V. *Classes of L^1-convergence of Fourier and Fourier–Stieltjes series*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (2), 209–215 (1981).

Нина Юрьевна Агафонова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

`e-mail:` agafonovanyu@gmail.com

Сергей Сергеевич Волосивец

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,*

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

N.Yu. Agafonova and S.S. Volosivets

Integrability of series with respect to multiplicative systems and generalized derivatives

Abstract. We give some necessary and sufficient conditions for the convergence of generalized derivatives of sums of series with respect to multiplicative systems and the corresponding Fourier series. These conditions are counterparts of trigonometric results of S. Sheng, W.O. Bray and Č.V. Stanojević and extend some results of F. Móricz proved for Walsh–Fourier series.

Keywords: multiplicative system, L^1-integrability, L^1-convergence, generalized derivative.

Nina Yur'evna Agafonova

*Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,*

e-mail: agafonovanyu@gmail.com

Sergey Sergeevich Volosivets

*Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,*

e-mail: volosivetsss@mail.ru