

Краткое сообщение

В.Н. ПАЙМУШИН, А.Н. НУРИЕВ, С.Ф. ЧУМАКОВА

**ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ, КОНСОЛЬНО
ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА УПРУГОМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ**

Аннотация. Предложена трансформационная модель динамического деформирования удлиненной ортотропной композитной пластины стержневого типа, состоящей из двух участков по длине. На незакрепленном участке оси ортотропии материала не совпадают с осями выбранной для пластины декартовой системы координат, а на закрепленном участке перемещения точек граничной поверхности контакта (жесткого соединения) с упругим опорным элементом считаются заданными (известными). Построенная модель основана на использовании для незакрепленного участка соотношений уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко, составленных для стержней в геометрически нелинейном приближении без учета поперечного обжатия. Для участка, закрепленного на упругом опорном элементе, также построена одномерная сдвиговая модель деформирования с учетом поперечного обжатия, которая трансформируется в другую модель путем удовлетворения условиям кинематического сопряжения с упругим опорным элементом с заданными перемещениями точек поверхности сопряжения с пластиной. Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков пластины, при учете которых, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, выведены для участков соответствующие уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков. Построенная модель предназначена для имитации природных процессов и структур при решении прикладных инженерных задач, направленных на разработку инновационных колебательных биомиметических движителей.

Ключевые слова: удлиненная пластина стержневого типа, ортотропный композитный материал, анизотропия, незакрепленный и закрепленный участки, геометрическая нелинейность, модель С.П. Тимошенко, уравнения движения, кинематические и силовые условия сопряжения участков.

УДК: 534.1

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-91-99

Введение. Имитация природных процессов и структур привела к разработке инновационных колебательных биомиметических движителей, нашедших свое применение в таких различных отраслях, как подводные аппараты, водяные насосы и воздушные летательные аппараты [1], [2]. Создание тяги в подобных движителях осуществляется путем задания законов колебательного движения тела [3] (взмахи крыльев) или с помощью периодического

Поступила в редакцию 21.10.2023, после доработки 21.10.2023. Принята к публикации 26.12.2023.
Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-79-10033.

изменения формы тела [4] (локомоция морских животных при плавании). Основной интерес в исследованиях биомиметических движителей направлен на выявление оптимальных параметров закона колебания тела и его деформации для повышения тяги. В частности, даже с помощью такого тела простой формы [5], [6], как круглый цилиндр, за счет задания колебательного закона движения (вращения и малоамплитудного перемещения поперек заданного направления) создается необходимая заданная тяга.

Простым примером реализации биомиметического движителя является консольная пластина стержневого типа, у которой толщина t и ширина b намного меньше ее длины L [7], совершающая сложные согласованные (крутильные и изгибные) колебания в среде [8]. В них для удлиненных пластин, выполненных из композитных материалов, на основе предложенных ранее соотношений непротиворечивого варианта геометрически нелинейных соотношений теории упругости при малых деформациях [9], [10] и уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко [11] выведены уточненные геометрически нелинейные уравнения движения для случая, когда оси выбранной системы координат не совпадают с осями ортотропии материала пластины, находящейся в плоском напряженно-деформированном состоянии. В силу перехода к классической модели Бернулли-Эйлера в теории стержней проведено преобразование выведенных уравнений к упрощенной системе. Показано, что для пластины из косоугольно армированного композитного материала выведенными уравнениями, составленными даже в геометрически линейном приближении, описываются связанные изгибно-крутильные колебания.

В отличие от [8] в данной статье предполагается, что удлиненная ортотропная композитная пластина стержневого типа состоит из двух участков по длине. На незакрепленном (консольном) участке оси ортотропии материала, как и в [7], не совпадают с осями выбранной для пластины декартовой системы координат, а на закрепленном участке перемещения точек граничной поверхности контакта (жесткого соединения) с упругим опорным элементом считаются заданными (известными). Для такой пластины предложена трансформационная модель динамического деформирования, основанная на использовании для незакрепленного участка построенных в [8] моделей, а для участка, закрепленного на упругом опорном элементе, построена одномерная сдвиговая модель деформирования с учетом поперечного обжатия, трансформированная в другую модель путем удовлетворения условиям кинематического сопряжения с упругим опорным элементом с заданными перемещениями точек поверхности закрепления.

1. Трансформационная модель деформирования участка закрепления удлиненной анизотропной пластины стержневого типа при заданных перемещениях опорного элемента. Рассмотрим удлиненную пластину стержневого типа длиной L , толщиной t и шириной b , отнесенную к ортогональной декартовой системе координат $Oxyz$ с единичными ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ (см. рис. 1). Будем считать, что пластина в точках прямоугольной области $-l \leq x \leq 0, -b/2 \leq y \leq b/2$ на поверхности $z = -t/2$ жестко соединена с упругим опорным элементом так, что при деформировании пластины компоненты ее вектора перемещений U_0, V_0, W_0 удовлетворяют условиям:

$$U_0(x, y, z = -t/2) = u^*(x), \quad V_0(x, y, z = -t/2) = 0, \quad W_0(x, y, z = -t/2) = w^*(x), \quad (1)$$

в которых функции $u^*(x), w^*(x)$, представляющие собой перемещения точек граничной поверхности опорного элемента, считаются заданными (известными).

Для перемещений U_0, W_0 закрепленного участка пластины примем аппроксимации

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0 + z\theta_0,$$

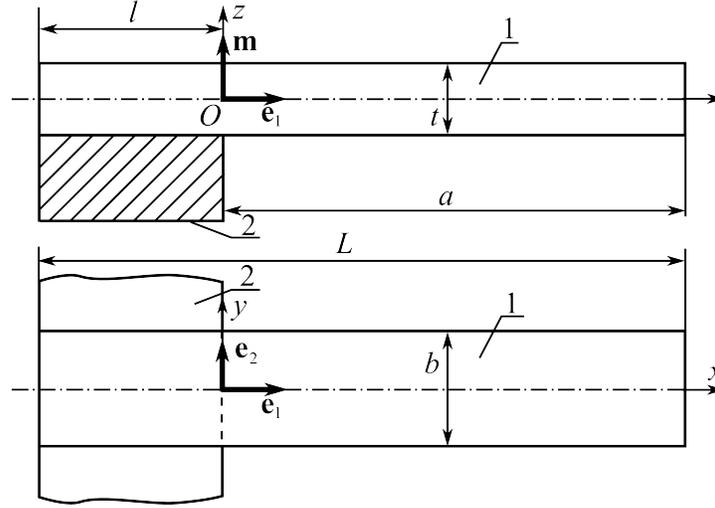


Рис. 1. Схема удлиненной пластины 1, закрепленной на жестком опорном элементе 2

при $z = -t/2$, в силу (1) принимающие вид $u_0 - t\gamma_0/2 = u^*$, $w_0 - t\theta_0/2 = w^*$. Из них вытекают зависимости $\gamma_0 = 2(u_0 - u^*)/t$, $\theta_0 = 2(w_0 - w^*)/t$. Следовательно,

$$U_0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_0 - \frac{2z}{t} u^*, \quad W_0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_0 - \frac{2z}{t} w^*, \quad (2)$$

при этом в геометрически линейном приближении для компонент деформации и вариации потенциальной энергии деформации будут иметь место выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x} - \frac{2z}{t} u_{,x}^*, & \gamma_{xz}^{(0)} &= \frac{2}{t} (u_0 - u^*) + w_{0,x} + \frac{2z}{t} (w_{0,x} - w_{,x}^*), \\ \varepsilon_z^{(0)} &= \frac{2}{t} (w_0 - w^*), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 &= \int_{-l}^0 \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} b \left(\sigma_x^{(0)} \delta\varepsilon_x^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} \delta\gamma_{xz}^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \delta\varepsilon_z^{(0)} \right) dx dz = \\ &= \int_{-l}^0 \left(T_x^{(0)} \delta u_{0,x} + T_z^{(0)} \delta w_0 + N_{xz}^{(0)} \delta w_{0,x} + T_{xz}^{(0)} \delta u_0 \right) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} T_x^{(0)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x^{(0)} b \left(1 + \frac{2z}{t}\right) dz, & T_z^{(0)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_z^{(0)} \frac{2b}{t} dz, \\ N_{xz}^{(0)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xz}^{(0)} b \left(1 + \frac{2z}{t}\right) dz, & T_{xz}^{(0)} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xz}^{(0)} \frac{2b}{t} dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (3) и соотношения обобщенного закона Гука, записанные в приближении

$$\sigma_x^{(0)} = E_1^* \left(\varepsilon_x^{(0)} + \nu_{31} \varepsilon_z^{(0)} \right), \quad \sigma_{33}^{(0)} = E_3^* \left(\varepsilon_z^{(0)} + \nu_{13} \varepsilon_x^{(0)} \right), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13} \gamma_{xz}^{(0)},$$

для определения компонент напряжений запишем выражения

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= E_1^* \left[\left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x} - \frac{2z}{t} u_{,x}^* + \frac{2\nu_{31}}{t} (w_0 - w^*) \right], \\ \sigma_z^{(0)} &= E_3^* \left\{ \nu_{13} \left[\left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_{0,x} - \frac{2z}{t} u_{,x}^* \right] + \frac{2}{t} (w_0 - w^*) \right\}, \\ \sigma_{xz}^{(0)} &= G_{xz} \left[\frac{2}{t} (u_0 - u^*) + \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_{0,x} - \frac{2z}{t} w_{,x}^* \right],\end{aligned}\quad (6)$$

где $G_{13} = G_{13}(|\gamma_{13}|)$ — секущий модуль упругости, уменьшающийся по мере увеличения $|\gamma_{13}|$; E_1^*, E_3^* — упругие характеристики, выражающиеся через модули упругости E_1, E_3 и коэффициенты Пуассона ν_{13}, ν_{31} .

При подстановке (6) в (5) получим соотношения упругости

$$\begin{aligned}T_x^{(0)} &= E_1^* b \left(\frac{4t}{3} u_{0,x} + 2\nu_{31} w_0 \right) - E_1^* b \left(\frac{t}{3} u_{,x}^* + 2\nu_{31} w^* \right), \\ T_z^{(0)} &= E_3^* b \left(\frac{4}{t} w_0 + 2\nu_{13} u_{0,x} \right) - \frac{4E_3^* b}{t} w^*, \\ N_{xz}^{(0)} &= G_{xz} b \left(\frac{4t}{3} w_{0,x} + 2u_0 \right) - G_{xz} b \left(\frac{t}{3} w_{,x}^* + 2u^* \right), \\ T_{xz}^{(0)} &= 2G_{xz} b \left(w_{0,x} + \frac{2}{t} u_0 \right) - \frac{4G_{xz} b}{t} u^*.\end{aligned}$$

В соответствии с (2) вариация работы инерционных сил закрепленного участка будет

$$\begin{aligned}\delta K_0 &= - \int_{-l}^0 \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho b \left(\ddot{U}_0 \delta U_0 + \ddot{W}_0 \delta W_0 \right) dx dz = \\ &= - \frac{\rho t b}{3} \int_{-l}^0 \left[(4\ddot{u}_0 - \ddot{u}^*) \delta u_0 + (4\ddot{w}_0 - \ddot{w}^*) \delta w_0 \right] dx.\end{aligned}\quad (7)$$

2. Сдвиговая модель деформирования незакрепленного участка пластины. Для описания процесса деформирования пластины рассматриваемого класса в незакрепленной области $\Omega = \{0 \leq x \leq a, -b/2 \leq y \leq b/2\}$ будем использовать сдвиговую стержневую модель типа Тимошенко, согласно которой для вектора перемещений имеет место представление вида [7], [8]

$$\mathbf{U} = (u + z\psi - y\chi) \mathbf{e}_1 + (v - z\varphi) \mathbf{e}_2 + (w + y\varphi) \mathbf{m}; \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad -\frac{t}{2} \leq z \leq \frac{t}{2}, \quad (8)$$

где u, v, w — компоненты вектора перемещений точек осевой линии $0x$; φ — угол закручивания поперечного сечения стержня; ψ, χ — компоненты вектора поворотов.

При использовании соотношений непротиворечивого варианта геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях, предложенных и проанализированных ранее в серии работ [9]–[11] и др., в соответствии с (8) компоненты тензора деформации будут определяться кинематическими соотношениями, составленными в приближении

$$\varepsilon_x = u' + \left[(v')^2 + (w')^2 \right] / 2 - y (\chi' - w' \varphi') + z (\psi' - v' \varphi'), \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = v' - \chi + w' \varphi - z \varphi', \quad \gamma_{xz} = \psi + w' - v' \varphi + y \varphi', \quad \gamma_{yz} \approx 0. \quad (10)$$

При формировании на незакрепленном участке пластины из волокнистого композитного материала плоского напряженного состояния ($\sigma_{33} = \sigma_z = 0$) формирующиеся компоненты

тензора напряжений в осях ортотропии связаны с соответствующими компонентами тензора деформаций соотношениями закона Гука следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1^* (\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}), & \sigma_{22} &= E_2^* (\varepsilon_{22} + \nu_{21}\varepsilon_{11}), & \sigma_{12} &= G_{12}\gamma_{12}, & \sigma_{13} &= G_{13}\gamma_{13}, \\ \sigma_{23} &= G_{23}\gamma_{23}, & E_1^*\nu_{12} &= E_2^*\nu_{21}, & E_1^* &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & E_2^* &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{21}$ — упругие характеристики ВКМ, определяемые на основе соответствующих экспериментов.

Если через λ обозначить угол между осью ортотропии x_1 и осью x стержня, то соотношения (11) при переходе от системы координат x_1, x_2, x_3 к осям x, y, z преобразуются к виду [12]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\gamma_{xy}, & \sigma_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= A_{13}\varepsilon_x + A_{23}\varepsilon_y + A_{33}\gamma_{xy}, & \sigma_{xz} &= A_{44}\gamma_{xz} + A_{45}\gamma_{yz}, & \sigma_{yz} &= A_{45}\gamma_{xz} + A_{55}\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для входящих в (12) коэффициентов имеют место известные [12] формулы, использованные в работе [8]. Заметим, что при изменении угла армирования λ на угол $-\lambda$ в соотношениях (12) на противоположные знаки изменяются только коэффициенты A_{13}, A_{23}, A_{45} , что приводит к реализации согласованных изгибно-крутильных и крутильно-изгибных форм колебаний [8].

Если $b \ll L$, то в силу равенства $\sigma_y = 0$ соотношения (12) преобразуются к виду

$$\sigma_x = A_{11}^*\varepsilon_x + A_{13}^*\gamma_{xy}, \quad \sigma_{xy} = A_{13}^*\varepsilon_x + A_{33}^*\gamma_{xy}, \quad (13)$$

а в силу равенства $\gamma_{yz} = 0$ в приближении $\sigma_{yz} \approx 0$ приходим к зависимости

$$\sigma_{xz} = A_{44}\gamma_{xz} = A_{44} (\psi + w' - v'\varphi + y\varphi'),$$

где

$$A_{11}^* = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}, \quad A_{13}^* = \frac{A_{13}A_{22} - A_{12}A_{23}}{A_{22}}, \quad A_{33}^* = \frac{A_{33}A_{22} - A_{23}^2}{A_{22}}.$$

Если действующая на пластину аэродинамическая нагрузка $p(x, y)$ является «следящей» и задана в приближении

$$\mathbf{p} = p\mathbf{m}^* \approx p [-(w' + y\varphi')\mathbf{e}_1 - \varphi\mathbf{e}_2 + \mathbf{m}],$$

то для вариации работы такой внешней нагрузки можно получить выражение

$$\delta A = \int_0^a [P(\delta w - w'\delta u - \varphi\delta v) + m_x\delta\varphi] dx, \quad (14)$$

где

$$P = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p(x, y) dy, \quad m_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p(x, y) y dy.$$

В соответствии с соотношениями (9), (10) вариация потенциальной энергии деформации незакрепленного участка пластины будет

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}) dx dy dz = \\ &= \int_0^a (Q_x\delta u' + Q_y^*\delta v' + Q_z^*\delta w' + M_y\delta\psi' + M_z\delta\chi' + Q_z\delta\psi - Q_y\delta\chi + M_x^*\delta\varphi' + N^*\delta\varphi) dx, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_y^* &= Q_y + Q_x v' - Q_z \varphi - M_y \varphi', & Q_z^* &= Q_z + Q_x w' + Q_y \varphi - M_z \varphi', \\ M_x^* &= M_x - M_z w' - M_y v', & N^* &= Q_y w' - Q_z v' \end{aligned}$$

и введены приведенные к осевой линии погонные внутренние усилия и моменты, определяемые в сечении $x = \text{const}$ через напряжения σ_x, σ_{xy} и σ_{xz} по формулам

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint_F \sigma_x dF, & Q_y &= \iint_F \sigma_{xy} dF, & Q_z &= \iint_F \sigma_{xz} dF, \\ M_y &= \iint_F \sigma_x z dF, & M_z &= - \iint_F \sigma_{xy} dF, & M_x &= \iint_F (\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z) dF, \\ & & & & \iint_F (\dots) dF &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\dots) dy dz. \end{aligned}$$

Используя далее представление (8), для вариации кинетической энергии незакрепленного участка пластины соответствующее выражение составим в приближении (τ — время)

$$\delta K = -\rho \int_0^a \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \ddot{\mathbf{U}} \delta \mathbf{U} dx dy dz = - \int_0^a [\rho t b (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) + \rho J_p \ddot{\varphi} \delta \varphi] dx, \quad (16)$$

где $\ddot{\varphi} = \partial^2 \varphi / \partial \tau^2$, ρ — плотность материала пластины, $J_p = (tb^3 + bt^3)/12$ — полярный момент инерции поперечного сечения.

3. Уравнения движения и условия сопряжения участков. В сечении $x = 0$ перемещения U_0, V_0, W_0 закрепленного участка и U, V, W незакрепленного участка должны быть подчинены кинематическим условиям сопряжения, в силу принятых представлений (3), (8) записываемым в виде

$$\begin{aligned} (u + z\psi - y\chi)|_{x=0} &= \left[\left(1 + \frac{2z}{t}\right) u_0 - \frac{2z}{t} u^* \right] \Big|_{x=0}, \\ (v - z\varphi)|_{x=0} &= 0, & \left(1 + \frac{2z}{t}\right) w_0 \Big|_{x=0} &= (w + y\varphi)|_{x=0}. \end{aligned}$$

Выполнение данных условий требует выполнения следующих кинематических условий сопряжения:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u_0|_{x=0}, & \psi|_{x=0} &= 2(u_0 - u^*)|_{x=0}/t, & w_0|_{x=0} &= w|_{x=0}, \\ v|_{x=0} &= 0, & \chi|_{x=0} &= 0, & \varphi|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (4), (7), (14)–(16), составим вариационное уравнение $\delta \Pi_0 + \delta \Pi - \delta A - \delta K_0 - \delta K = 0$. Из него после ряда стандартных преобразований в силу произвольности вариаций $\delta u_0, \delta u, \delta w_0, \delta w, \delta v, \delta \psi, \delta \chi, \delta \varphi$ следуют

– система уравнений движения закрепленного участка

$$T_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{u}_0 - \ddot{u}^*) = 0, \quad N_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} - \frac{\rho t}{3} (4\ddot{w}_0 - \ddot{w}^*) = 0; \quad (18)$$

– система уравнений движения [8] незакрепленного участка пластины

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \underline{P} w' - \rho b h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, & \quad \frac{\partial Q_y^*}{\partial x} - \underline{P} \varphi - \rho b h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, & \quad \frac{\partial Q_z^*}{\partial x} + P - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z = 0, & \quad \frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y = 0, & \quad \frac{\partial M_x^*}{\partial x} - N^* + m_x - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

– силовые граничные условия в сечении $x = -l$ для уравнений (18)

$$T_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0, \quad N_{xz}^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0;$$

– силовые граничные условия [8] в сечении $x = a$ для уравнений (19)

$$Q_x \Big|_{x=a} = 0, \quad Q_y^* \Big|_{x=a} = 0, \quad Q_z^* \Big|_{x=a} = 0, \quad M_y \Big|_{x=a} = 0, \quad M_z \Big|_{x=a} = 0, \quad M_x^* \Big|_{x=a} = 0;$$

– в силу $\delta u = \delta u_0, \delta w = \delta w_0, \delta \psi = 2\delta u_0/t$ при $x = 0$ силовые условия сопряжения участков

$$\left(T_x^{(0)} - Q_x - 2M_y/t \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(N_{xz}^{(0)} - Q_z^* \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

Заключение. Наличие в соотношениях (13) подчеркнутых слагаемых при кинематическом возбуждении тех или иных форм движения опорного элемента (путем заданий функций $u^*(x), w^*(x)$; в предельно упрощенном случае они могут быть постоянными величинами) позволяет на незакрепленном участке стержня возбудить согласованные изгибно-крутильные или крутильно-изгибные формы колебаний с соответствующими частотами [8]. Как следует из (17), последние три условия являются граничными условиями для соответствующих уравнений в системе (19).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Логвинович Г.В. *Гидродинамика плавания рыб*, Бионика **7**, 3–8 (1973).
- [2] Wu T.Y.-T. *Swimming of a waving plate*, J. Fluid Mech. **10** (3), 321–344 (1961).
- [3] Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W. *A review on fluid dynamics of flapping foils*, Ocean Engineering **195**, article 106712 (2020).
- [4] Siekmann J. *Theoretical studies of sea animal locomotion*, P.1, Ingenieur-Archiv **31**, 214–228 (1962).
- [5] Nuriev A.N., Egorov A.G. *Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section*, J. Fluid Mech. **941**, article A23 (2022).
- [6] Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. *Asymptotic Study of the Aerohydrodynamics of a Flapping Cylindrical Wing in the High-Frequency Approximation*, Lobachevskii J. Math. **43** (8), 2250–2256 (2022).
- [7] Камалутдинов А.М., Паймушин В.Н. *Уточненные геометрически нелинейные уравнения движения удлиненной пластины стержневого типа*, Изв. вузов. Матем. **9**, 84–89 (2016).
- [8] Paimushin V.N., Kamalutdinov A.M. *Refined Geometrically Nonlinear and Linear Equations of Motion of an Elongated Rod-type Plate*, Lobachevskii J. Math. **44** (3), 4461–4468 (2023).
- [9] Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation*, Dokl. Phys. **49** (6), 374–377 (2004).
- [10] Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *On square approximations of the deformation theory and problems of constructing improved versions of geometrical non-linear theory of multilayer construction elements*, J. Appl. Math. and Mech. **69** (5), 861–881 (2005).
- [11] Paimushin V.N. *Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns*, J. Appl. Math. and Mech. **71** (5), 772–805 (2007).
- [12] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов* (Машиностроение, М., 1988).

Виталий Николаевич Паймушин

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: vprajmushin@mail.ru

Артем Наилевич Нурiev

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: nuriev_an@mail.ru

Софья Федоровна Чумакова

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: sfchumakova@mail.ru

V.N. Paimushin, A.N. Nuriev, and S.F. Chumakova

Transformation model of the dynamic deformation of an elongated cantilever plate mounted on an elastic support element

Abstract. A transformation model of the dynamic deformation of an elongated orthotropic composite rod-type plate, consisting of two sections (fastened and free) along its length, is proposed. In the free section, the orthotropic axes of the material do not coincide with the axes of the Cartesian coordinate system chosen for the plate, and in the fastened section, the displacements of points of the contact's boundary surface (rigid connection) with the elastic support element are considered to be known. The constructed model is based on the use for the free section of the relations of the refined shear model of S.P. Timoshenko, compiled for rods in a geometrically nonlinear approximation without taking into account lateral strain deformations. For the section fastened on the elastic support element, a one-dimensional shear deformation model is constructed taking into account lateral strain deformations, which is transformed into another model by satisfying the conditions of kinematic coupling with the elastic support element with given displacements of the interface points with the plate. The conditions for the kinematic coupling of the free and fastened sections of the plate are formulated. Based on the Hamilton–Ostrogradsky variational principle, the corresponding equations of motion and boundary conditions, as well as force conditions for the coupling of sections, are derived. The constructed model is intended to simulate natural processes and structures when solving applied engineering problems aimed at developing innovative oscillatory biomimetic propulsors.

Keywords: elongated rod-type plate, orthotropic composite material, anisotropy, free and fixed sections, geometric nonlinearity, S.P. Timoshenko model, equations of motion, kinematic and force conditions for coupling sections.

Vitaliy Nikolaevich Paimushin

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia;
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (KNRTU–KAI),
10 K. Marksa str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: vpajmushin@mail.ru

Artem Nailevich Nuriev

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: nuriev_an@mail.ru

Sofia Fedorovna Chumakova

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: sfchumakova@mail.ru