

Краткое сообщение

М.Э. МУМИНОВ, И.Н. БОЗОРОВ, Т.Х. РАСУЛОВ

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 2×2 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Аннотация. Рассматривается 2×2 блочно-операторная матрица H как ограниченный и самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Местоположение существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ операторной матрицы H описано через спектр обобщенной модели Фридрихса, т. е. выделены двухчастичные и трехчастичные ветви существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$. Установлено, что множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из не более пяти отрезков (компонентов).

Ключевые слова: блочно-операторная матрица, собственное значение, дискретный спектр, существенный спектр, компонент.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-85-90

Введение. В непрерывном пространстве и на решетке имеются в определенном смысле более интересные задачи, возникающие в задачах физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физики [3], магнитогидродинамики [4] и квантовой механики [5], в которых число частиц не сохраняется. Системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц в непрерывном пространстве рассмотрены в [6], [7], а на решетке рассмотрены в работах [8]–[10]. Обычно изучение таких систем сводится к изучению спектральных свойств ограниченных самосопряженных блочно-операторных матриц, действующих в обрезаемом подпространстве, состоящем из нолчастичного, одночастичного, двухчастичного и n -частичного подпространств фоковского пространства. Здесь под блочно-операторной матрицей понимается матрица, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространствах [11].

Спектральные свойства двухчастичных операторов Шрёдингера исследованы путем построения инвариантных подпространств при $d \geq 1$ в [12]–[17]. Найдены условия существования собственных значений и их расположения, лежащих вне существенного спектра, в зависимости от параметров рассматриваемых операторов и размерности решеток.

В данной работе рассматривается 2×2 блочно-операторная матрица H в прямой сумме одночастичного и двухчастичного подпространства фоковского пространства. Определено максимальное число отрезков (компонентов), которые составляют существенный спектр оператора H .

1. 2×2 блочно-операторная матрица и его существенный спектр. Пусть $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$ — трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ — декартово произведение, $L^2(\mathbb{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $L^{2,s}((\mathbb{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 := L^{2,s}((\mathbb{T}^3)^2)$, т. е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим матричную модель H , которая действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и задается как операторная матрица

$$H := \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix},$$

где операторы $H_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$, определяются формулами

$$\begin{aligned} (H_{11}f_1)(p) &= u(p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_2(p, t)dt, \\ (H_{22}f_2)(p, q) &= w(p, q)f_2(p, q) - \lambda \int_{\mathbb{T}^3} f_2(t, q)dt - \lambda \int_{\mathbb{T}^3} f_2(p, t)dt - \\ &- \mu \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \cos(p_\alpha - t_\alpha) f_2(t, q)dt - \mu \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \cos(t_\alpha - q_\alpha) f_2(p, t)dt, \end{aligned}$$

$f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$; $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — вещественнозначные аналитические функции на $\mathbb{T}^3$, функция $w(\cdot, \cdot)$ определена по формуле

$$w(p, q) := l_1\varepsilon(p) + l_2\varepsilon(p + q) + l_1\varepsilon(q),$$

где $l_1, l_2, \gamma, \lambda, \mu > 0$, функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется равенством

$$\varepsilon(q) := \sum_{\alpha=1}^3 \left(1 - \cos(2q^{(\alpha)})\right), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3,$$

H_{12}^* — сопряженный оператор к H_{12} . Оператор H_{12} называется оператором уничтожения, $H_{12}^* = H_{21}$ называется оператором рождения. Здесь

$$(H_{21}f_1)(p, q) = \frac{1}{2}(v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)).$$

Можно проверить, что матричный оператор H является ограниченным и самосопряженным в $\mathcal{H}$.

Существенный и дискретный спектры операторов типа H_{22} изучены в работах [18]–[20].

Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$. Для формулировки основных результатов работы введем обобщенную модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, действующую в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по правилу

$$h(p) := \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(p) \end{pmatrix},$$

где операторы $h_{ii}(p) : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $p \in \mathbb{T}^3$ и $h_{01} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$, определяются формулами

$$\begin{aligned} h_{00}(p)f_0 &= u(p)f_0, \quad h_{01}f_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_1(t)dt, \\ h_{11}(p) &= h_{11}^0(p) - \mathbf{v}, \quad (h_{11}^0(p)f_1)(q) = w(p, q)f_1(q), \end{aligned}$$

$$(\mathbf{v}f_1)(q) = \lambda \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt + \mu \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{\alpha=1}^3 \cos(q_\alpha - t_\alpha) f_1(t)dt.$$

Очевидно, что оператор $h(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$, ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Следующая теорема [21] описывает местоположение существенного спектра оператора H .

Теорема 1. *Для существенного спектра оператора H имеет место равенство*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [0; M], \quad M = \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} w(p, q).$$

Множества

$$\bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \quad \text{и} \quad [0; M]$$

называются двухчастичной и трехчастичной ветвью существенного спектра оператора H соответственно.

2. Компоненты существенного спектра 2×2 блочно-операторной матрицы. На протяжении всей работы предположим, что функция $v(\cdot) \in L^2(\mathbb{T}^3)$ вещественнозначная и периодическая по каждой переменной с периодом π , т.е. $v(p + \vec{\pi}) = v(p)$, где $\vec{\pi} := (\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{T}^3$. Отметим, что функции вида $v(p) = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha \cos(2p_\alpha)$, $v(p) = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha \cos^2 p_\alpha$, $v(p) = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha \sin(2p_\alpha)$, $v(p) = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha \sin^2 p_\alpha$, где c_α , $\alpha = 1, 2, 3$, — любое вещественное число, удовлетворяют этому условию.

Положим

$$\Delta(p; z) := \Delta_{\gamma\lambda}(p; z) \prod_{\alpha=1}^3 \Delta_{\mu, \alpha}^c(p; z) \Delta_{\mu, \alpha}^s(p; z),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma\lambda}(p; z) &:= \left[\Delta_\gamma(p; z) \Delta_\lambda(p; z) - \frac{\gamma\lambda}{2} a^2(p; z) \right], \quad a(p; z) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)dt}{w(p, t) - z}, \\ \Delta_\gamma(p; z) &:= u(p) - z - \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)dt}{w(p, t) - z}, \quad \Delta_\lambda(p; z) := 1 - \lambda \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w(p, t) - z}, \\ \Delta_{\mu, \alpha}^c(p; z) &:= 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 t_\alpha dt}{w(p, t) - z}, \quad \Delta_{\mu, \alpha}^s(p; z) := 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 t_\alpha dt}{w(p, t) - z}. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$. При этом*

$$\bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z : \Delta(p; z) = 0, \text{ хотя бы одного } p \in \mathbb{T}^3\}.$$

Лемма 2. а) Для каждого $p \in \mathbb{T}^3$ число нулей функции $\Delta_{\gamma\lambda}(p; \cdot)$ не превосходит двух.

б) Для каждого $p \in \mathbb{T}^3$ функции $\Delta_{\mu, \alpha}^c(p; \cdot)$ и $\Delta_{\mu, \alpha}^s(p; \cdot)$ могут иметь по одному нулю.

Замечание 1. Если координаты p равны, т.е. $p_1 = p_2 = p_3$, то функция $w(p, q)$ является симметричной относительно перестановки переменных q_α и q_β , $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Поэтому имеют места равенства

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 t_1 dt}{w(p, t) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 t_\alpha dt}{w(p, t) - z}, \quad \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 t_1 dt}{w(p, t) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 t_\alpha dt}{w(p, t) - z}, \quad \alpha = 2, 3.$$

В этом случае, если $\Delta_{\mu, \alpha}^c(p; z_0) = 0$ (или $\Delta_{\mu, \alpha}^s(p; z_0) = 0$), то z_0 является трехкратным собственным значением оператора $h(p)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\lambda} &:= \{z : \Delta_{\gamma\lambda}(p; z^\pm) = 0 \text{ хотя бы для одного } p \in \mathbb{T}^3\}, \\ \Gamma_{\mu, \alpha}^c &:= \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^c(p; z_\alpha) = 0 \text{ хотя бы для одного } p \in \mathbb{T}^3\}, \\ \Gamma_{\mu, \alpha}^s &:= \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^s(p; z_\alpha) = 0 \text{ хотя бы для одного } p \in \mathbb{T}^3\}. \end{aligned}$$

Положим $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. Заметим, что для наименьшего и наибольшего элементов множества имеют место равенства

$$\inf \Gamma_\mu^c = \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^c(\mathbf{0}; z) = 0\}, \quad \inf \Gamma_\mu^s = \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^s(\mathbf{0}; z) = 0\}$$

и

$$\sup \Gamma_\mu^c = \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^c(\vec{\pi}; z) = 0\}, \quad \sup \Gamma_\mu^s = \{z : \Delta_{\mu, \alpha}^s(\vec{\pi}; z) = 0\}.$$

Поэтому множества $\Gamma_{\mu, \alpha}^c$ и $\Gamma_{\mu, \alpha}^s$ не зависят от $\alpha = 1, 2, 3$. При этом $\Gamma_{\mu, \alpha}^c = [\inf \Gamma_\mu^c; \sup \Gamma_\mu^c] = \Gamma_\mu^c$ и $\Gamma_{\mu, \alpha}^s = [\inf \Gamma_\mu^s; \sup \Gamma_\mu^s] = \Gamma_\mu^s$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Положим

$$\mu_0^c := \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 t_\alpha dt}{w(\mathbf{0}, t)} \right)^{-1}, \quad \mu_0^s := \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 t_\alpha dt}{w(\mathbf{0}, t)} \right)^{-1}.$$

Замечание 2. Если $\mu \in (0; \mu_0^c]$ и $\mu \in (0; \mu_0^s]$, то множества Γ_μ^c и Γ_μ^s являются пустыми. Если $\mu \in (\mu_0^c; +\infty)$ и $\mu \in (\mu_0^s; +\infty)$, то множества Γ_μ^c и Γ_μ^s являются непустыми.

Теорема 2. Для существенного спектра оператора H имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \Gamma_{\gamma\lambda} \cup \Gamma_\mu^c \cup \Gamma_\mu^s \cup [0; M].$$

Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более чем пяти отрезков (компонентов).

Последняя теорема играет важную роль при изучении числа и расположения собственных значений оператора H .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mogilner A.I. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*, Advances Sov. Math. **5**, 139–194 (1991).
- [2] Фридрихс К.О. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве* (Мир, М., 1969).
- [3] Malishev V.A., Minlos R.A. *Linear Infinite-Particle Operators*, Translations of Mathematical Monographs (Providence, RI, 143, Amer. Math. Soc., 1995).
- [4] Lifschitz A.E. *Magnetohydrodynamics and spectral theory*, V. 4, *Developments in Electromagnetic Theory and Applications* (Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989).
- [5] Thaller B. *The Dirac equation. Texts and Monographs in Physics* (Springer, Berlin, 1992).
- [6] Minlos R.A., Spohn H. *The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons. Topics in Statistical and Theoretical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Providence, RI **177** (2), 159–193 (1996).
- [7] Жуков Ю.В., Минлос Р.А. *Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами*, Теорет. и матем. физ. **103** (1), 63–81 (1995).

- [8] Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case*, J. Math. Phys. **56**, 053507 (2015).
- [9] Расулов Т.Х. *О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами*, Теорет. и матем. физ. **186** (2), 293–310 (2016).
- [10] Расулов Т.Х. *Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–69 (2008).
- [11] Tretter C. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications* (Imperial College Press, 2008).
- [12] Bozorov I.N., Khamidov Sh.I., Lakaev S.N. *The number and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (11), 3079–3090 (2022).
- [13] Имомов А.А., Бозоров И.Н., Хуррамов А.М. *О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. **78**, 22–37 (2022).
- [14] Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I.N. *Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice*, Наносистемы: физика, химия, матем. **13** (3), 237–244 (2022).
- [15] Muminov M.I., Hurramov A.M., Bozorov I.N. *On eigenvalues and virtual levels of a two-particle Hamiltonian on a d-dimensional lattice*, Наносистемы: физика, химия, матем. **14** (3), 295–303 (2023).
- [16] Муминов М.Э., Хуррамов А.М. *Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке*, Теорет. и матем. физ. **177** (3), 482–496 (2013).
- [17] Муминов М.Э., Хуррамов А.М. *О кратности виртуального уровня нижнего края непрерывного спектра одного двухчастичного гамильтониана на решетке*, Теорет. и матем. физ. **180** (3), 329–341 (2014).
- [18] Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. *Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана*, Изв. вузов. Матем. (7), 3–12 (2023).
- [19] Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Расулов Т.Х. *Инвариантные подпространства и собственные значения трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера*, Изв. вузов. Матем. (9), 3–19 (2023).
- [20] Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. *Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Изв. вузов. Матем. (1), 61–70 (2014).
- [21] Muminov M.I., Rasulov T.H. *Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2×2 operator matrix*, Eurasian Math. J. **5** (2), 60–77 (2014).

Мухиддин Эшқобилович Муминов

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: mmuminov@mail.ru

Ислом Намозович Бозоров

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,

ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: islomnb@mail.ru

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,

ул. М.Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

M.I. Muminov, I.N. Bozorov, and T.Kh. Rasulov

On the number of components of the essential spectrum of one 2×2 operator matrix

Abstract. In this paper, a 2×2 block operator matrix H is considered as a bounded and self-adjoint operator in a Hilbert space. The location of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H)$ of operator matrix H is described via the spectrum of the generalized Friedrichs model, i.e. the two- and three-particle branches of the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H)$ are singled out. We prove that the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H)$ consists of no more than six segments (components).

Keywords: block operator matrix, eigenvalue, discrete spectrum, essential spectrum, component.

Mukhiddin Ishkobilovich Muminov

*Samarkand State University,
15 University blv., Samarkand, 140104, Republic of Uzbekistan,*

e-mail: mmuminov@mail.ru

Islom Namozovich Bozorov

*V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan,
9 University str., Tashkent, 100174, Republic of Uzbekistan,*

e-mail: islomnb@mail.ru

Tulkin Khusenovich Rasulov

*Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200118, Republic of Uzbekistan,*

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz