

Краткое сообщение, представленное С.Р. Насыровым

С.Л. БЕРБЕРЯН

О КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\mathfrak{A}^*$

Аннотация. В статье рассматривается класс $\mathfrak{A}^*$, состоящий из субгармонических в единичном круге таких функций, что их суперпозиции с некоторыми семействами дробно-линейных автоморфизмов круга образуют нормальные семейства. Установлена теорема о том, что для любой функции класса $\mathfrak{A}^*$ множество точек единичной окружности представимо в виде объединения множества точек Фату, множества обобщенных точек Плеснера и некоторого множества меры нуль.

Ключевые слова: субгармоническая функция, предельное множество, угловой предел, класс $\mathfrak{A}^*$.

УДК: 517.538

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-81-84

Введение. Классификации точек единичной окружности для мероморфных и гармонических функций, определенных в единичном круге, посвящены многие монографии и статьи (см., например, [1]–[5]). В случае нормальных субгармонических функций вопрос классификации точек единичной окружности рассматривался в работах [6] и [7]. В настоящей работе аналогичный вопрос изучается для субгармонических функций класса $\mathfrak{A}^* = \bigcap_{0 \leq \theta < \pi} \mathfrak{A}^\theta$, который является более широким классом, чем класс нормальных субгармонических функций (см. [8]). Классы $\mathfrak{A}^\theta$ будут определены ниже.

В статье будем придерживаться общепринятых обозначений (см. [1]–[5]). Обозначим через D , Γ соответственно единичный круг $|z| < 1$ и единичную окружность $|z| = 1$. Рассмотрим действительнзначную функцию $f(z)$, определенную в D . Для произвольного подмножества S круга D , для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S . Это значит, что любое действительное число α (конечное или бесконечное) принадлежит множеству $C(f, \xi, S)$, если существует такая последовательность $\{z_n\} \in S$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \alpha$. Приведем дополнительно несколько обозначений и определений.

Точку $\xi \in \Gamma$ называют точкой Вейерштрасса для действительнзначной функции $f(z)$, определенной в D , если $C(f, \xi, D) = \bar{\mathbb{R}}$. Множество всех точек Вейерштрасса функции

Поступила в редакцию 17.10.2023, после доработки 25.12.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Благодарности. Статья выполнена в рамках финансовой поддержки программы развития Российско-Армянского Университета.

$f(z)$ обозначим через $W(f)$. Назовем точку $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ обобщенной точкой Вейерштрасса для действительной функции $f(z)$, определенной в D , если предельное множество $C(f, \xi, D)$ не ограничено сверху. Множество всех обобщенных точек Вейерштрасса обозначим через $W_1(f)$.

Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения [4], было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции (см. [9] или [10]). В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $S(z): T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z + a) \cdot (1 + \bar{a}z)^{-1}\}$, a — произвольная точка в D , α — произвольное действительное число. Придерживаясь обозначений из работы [11], скажем, что субгармоническая функция нормальная, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi: \{f(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ , где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D к субгармонической функции или же равномерно сходящуюся к $+\infty$ либо к $-\infty$ на любом компакте K в D . В этом случае говорят [11], что $f(z) \in \mathfrak{A}$. Достигнутые в теории нормальных субгармонических функций результаты позволяют сформулировать задачу о распространении свойств нормальных субгармонических функций, которые порождают нормальные в D семейства не относительно всей группы T , а относительно некоторой ее подгруппы $T_1 \subset T$. В данной работе рассмотрим подгруппы $T^\theta: \{S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta})(1 + ae^{-i\theta}z)^{-1}\}$, где a изменяется в интервале $(-1, 1)$ и $\theta, 0 \leq \theta < \pi$ фиксировано. Субгармоническую в D функцию относят к классу $\mathfrak{A}^\theta$ ($\theta, 0 \leq \theta < \pi$ фиксировано), если порождаемое ею семейство $\Phi^\theta: \{f(S_a^\theta(z)); S_a^\theta \in T^\theta\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности $\{f(S_n^\theta(z))\}$ семейства Φ^θ , где $S_n^\theta(z) \in T^\theta$ и $0 \leq \theta < \pi$ фиксировано, можно выделить подпоследовательность $\{f(S_{n_k}^\theta(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D к субгармонической функции или же равномерно сходящуюся к $+\infty$ либо к $-\infty$ на любом компакте K в D . Обозначим $\mathfrak{A}^* = \bigcap_{\theta \in [0, \pi)} \mathfrak{A}^\theta$.

Неотрицательная функция $f(z)$ называется логарифмически субгармонической, если $\ln f(z)$ — субгармоническая функция.

1. Основная теорема. Основным результатом данной работы является

Теорема. Для произвольной субгармонической функции $f(z)$ класса $\mathfrak{A}^*$ справедливо разложение

$$\Gamma = F(f) \cup I_*(f) \cup E,$$

где $F(f)$ — множество точек Фату функции $f(z)$, $I_*(f)$ — множество обобщенных точек Плеснера, а E — некоторое множество линейной меры нуль.

Справедлива

Лемма. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция класса $\mathfrak{A}^*$ и допустим существует такое множество E на Γ , что линейная мера множества E положительная, т.е. $mE > 0$. Тогда существует такая звездообразная подобласть $G \subset D$, в которой функция $f(z)$ ограничена сверху. При этом $m(\bar{G} \cap \Gamma) > 0$ и $\bar{G} \cap \Gamma \subset E$.

Схема доказательства. Доказательство леммы существенно опирается на построении звездообразной области, которое впервые было предложено И. И. Приваловым и Н. Н. Лузиным (см. [1] или [2]). Кроме того, используется свойство ограниченности сверху субгармонических функций в любом замкнутом круге.

Схема доказательства теоремы. Проведем его методом от противного. При доказательстве существенно используется инвариантность множеств меры нуль и сохранение углов почти всюду при конформных отображениях круга на область со спрямляемой границей.

Применяя нашу теорему о классификации точек единичной окружности для субгармонических функций класса $\mathfrak{A}^*$, получим следствия.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ — субгармоническая в D функция класса $\mathfrak{A}^*$. Тогда почти каждая точка $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ принадлежит по крайней мере одному из множеств $W_1(f)$, $F(f)$.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ — субгармоническая в D функция класса $\mathfrak{A}^*$. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в почти каждой точке множества $E \subset \Gamma$, $mE > 0$, конечные угловые граничные значения, необходимо и достаточно, чтобы в почти каждой точке $\xi \in E$ предельное множество $C(f, \xi, L_\xi)$ было ограничено сверху по некоторой кривой L_ξ , некасательной к Γ в точке ξ .

Следствие 3. Пусть $f(z)$ — произвольная субгармоническая функция класса $\mathfrak{A}^*$, удовлетворяющая условию

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\alpha}^{\beta} f^+(re^{i\theta}) d\theta < +\infty, \quad \text{где } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \text{ и } f^+(re^{i\theta}) = \max\{0, f(re^{i\theta})\}.$$

Тогда почти всюду на дуге $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ функция $f(z)$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Следствие 4. Пусть логарифмическая субгармоническая в D функция $f(z)$ из класса $\mathfrak{A}^*$ ограничена в некоторой окрестности дуги $\gamma \subset \Gamma$. Если существует такая последовательность $\{z_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = M < +\infty$, каждая точка дуги γ является предельной точкой для последовательности $\{z_n\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$, то $f(z) \equiv 0$.

Замечание 1. М. Цудзи [12] построил пример ограниченной субгармонической функции $f(z)$, для которой в почти каждой точке $\xi \in \Gamma$ не существуют угловые пределы. Для такой функции, очевидно, что $mF(f) = 0$ и множество $I_*(f)$ для рассматриваемой функции будет пустым множеством. Поэтому для этой функции не имеет место утверждение нашей теоремы.

Замечание 2. Отметим, что необходимые и достаточные условия существования конечных угловых пределов у произвольных голоморфных и гармонических функций на множестве E , $mE > 0$, рассматривались еще И. И. Приваловым [13].

Замечание 3. Приведем пример субгармонической функции $f(z)$ класса $\mathfrak{A}$, для которой утверждение классической теоремы Плеснера не имеет места, но справедливо утверждение нашей основной теоремы. Для этого рассмотрим модулярную функцию $\mu(z)$, голоморфную в D и не принимающую значений $0, 1, \infty$ [14]. В силу того, что $\mu(z)$ — нормальная голоморфная функция, $|\mu(z)|$ является нормальной субгармонической функцией. Так как множество точек Фату для модулярной функции $\mu(z)$ не более чем счетно [14], то $mF(\mu) = 0$ и в силу теоремы Плеснера ([1] или [2]) для голоморфных функций почти каждая точка на Γ является точкой Плеснера для функции $\mu(z)$. Следовательно, в почти каждой точке $\xi \in \Gamma$ предельное множество по любому углу $\Delta(\xi)$ $C(|\mu|, \xi, \Delta(\xi))$ совпадает с $[0, +\infty]$. Таким образом, почти каждая точка на Γ не является ни точкой Фату,

ни точкой Плеснера, а значит, утверждение теоремы Плеснера не имеет место. Однако почти каждая точка ξ на Γ является обобщенной точкой Плеснера и, следовательно, утверждение основной теоремы для функции $|\mu(z)|$ справедливо.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций* (ГИТТЛ, М.-Л., 1950).
- [2] Коллингвуд Э., Ловатер А. *Теория предельных множеств* (Мир, М., 1971).
- [3] Yamashita S. *Boundary behaviour of functions harmonic in the unit ball*, Proc. Japan Acad. **46** (6), 490–493 (1970).
- [4] Носиро К. *Предельные множества* (Индит, М., 1963).
- [5] Гаврилов В.И. *Поведение вдоль хорд мероморфных функций в единичном круге*, ДАН СССР **216** (1), 21–23 (1974).
- [6] Берберян С.Л. *О граничных особенностях нормальных субгармонических функций*, Math. Montisnigri **18–19**, 5–14 (2005–2006).
- [7] Берберян С.Л. *Классификация граничных особенностей нормальных субгармонических функций и ее применения*, УМН **62** (3), 207–208 (2007).
- [8] Берберян С.Л. *Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций*, Изв. вузов. Матем. (3), 22–28 (1986).
- [9] Lappan P. *Some results on harmonic normal functions*, Math. Zeitschrift **90** (2), 155–159 (1965).
- [10] Rung D.C. *Asymptotic values of normal subharmonic functions*, Math. Zeitschrift **84** (1), 9–15 (1964).
- [11] Гаврилов В.И. *Нормальные функции и почти-периодические функции*, ДАН СССР **240** (4), 768–770 (1978).
- [12] Tsuji M. *Littlewood's theorem on subharmonic functions in a unit circle*, Comm. Math. Univ. St. Paul **5** (7), 3–16 (1956).
- [13] Привалов И.И. *Обобщение теоремы Fatou*, Матем. сб. **31** (2), 232–235 (1923).
- [14] Bagemihl F., Seidel W. *Sequential and continuous limits of meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **I** (280), 1–17 (1960).

Самвел Левонович Берберян

Российско-Армянский (Славянский) университет,
ул. Овсепя Эмина, д. 123, г. Ереван, 0051, Армения,

e-mail: samvel357@mail.ru

S.L. Berberyan

On the classification of points of the unit circle for subharmonic functions of class $\mathfrak{A}^*$

Abstract. In this article, we consider a class $\mathfrak{A}^*$ consisting of functions, subharmonic in the unit disk and such that their compositions with some families of linear fractional automorphisms of the disk form normal families. We prove a theorem which states that for any function of class $\mathfrak{A}^*$ the set of points of the unit circle can be represented as a union of Fatou points, generalized point Plesner, and a set of zero measure.

Keywords: subharmonic function, limit set, angular limit, class $\mathfrak{A}^*$.

Samvel Levonovich Berberyan

Russian-Armenian (Slavic) State University,
123 Hovsep Emin str., Yerevan, 0051, Republic of Armenia,

e-mail: samvel357@mail.ru