

P. КУМАР, С. КАУШАЛ, ПРАГАТИ

**ВОЛНОВОЙ АНАЛИЗ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОЙ ДИФФУЗИИ С
МОДИФИЦИРОВАННЫМ МОМЕНТНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ С УЧЕТОМ
ПУСТОТ, НЕЛОКАЛЬНОСТИ И ФАЗОВЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ**

Аннотация. В представленной работе изучена новая математическая модель термоупругой диффузии с модифицированным моментным напряжением, учитывающая нелокальность, пустоты и фазовые запаздывания. Составляющие ее уравнения для дальнейших исследований выражены в безразмерной форме в терминах элементарных функций в предположении о гармонической по времени вариации полевых переменных (перемещение, поле температуры, поле химического потенциала и поле объемной доли). Для случая устойчивых колебаний получена система уравнений и ее фундаментальные решения, указаны основные свойства таких решений. Также изучены колебания плоских волн в двумерном случае. Из характеристического уравнения получены такие атрибуты волн как фазовая скорость, коэффициенты поглощения, специфическая потеря и глубина проникновения — они найдены численно и представлены в форме различных графиков. Также выведены некоторые уникальные частные случаи. Полученные результаты служат мотивацией для исследования теплопроводного термоупругого материала с модифицированным моментным напряжением с учетом нелокальности, пустоты и фазовых запаздываний как новый класс прикладных материалов.

Ключевые слова: модифицированное моментное напряжение, термоупругая диффузия, нелокальность, пустота, фазовое запаздывание, плоская волна, фундаментальное решение, устойчивое колебание.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-37-58

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория моментного напряжения, разработанная в [1]–[3], является одной из неклассических теорий, содержащих в своих определяющих уравнениях два параметра высшего порядка, описывающих протяженности материала, в дополнение к двум классическим постоянным Ламе для изотропных упругих материалов. В [4] Ф. Янг и др. предложили теорию модифицированного моментного напряжения. В добавлении к двум стандартным уравнениям равновесия в случае классического моментного напряжения они предложили рассматривать дополнительное условие, ограничивающее момент. Это условие касается баланса момента импульса, при его выполнении тензор моментного напряжения становится симметричным.

В [5]–[8] разработана теория термоупругой диффузии с использованием модели термоупругих моментов. В [9] предложена теория обобщенной термоупругой диффузии с одним

Поступила в редакцию 18.01.2023, после доработки 01.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

временем релаксации. В [10] выведены уравнения обобщенной термоупругой диффузии для анизотропной среды с вращением в контексте теории упругости Х. Лорда, Ю. Шульмана [11]. В [12] выведено уравнение линейной теории для задачи термоупругой диффузии с пустотами в анизотропной среде.

Одним из значительных обобщений классической теории упругости является линейная теория упругих материалов с пустотами. В этой теории материалы рассматриваются вместе с распределением мелких пор или пустот, причем объем пустот является одной из кинематических переменных. В [13] предложена гранулярная теория. В [14], [15] представлена нелинейная и линейная теория упругих материалов с пустотами.

В [16] изучено воздействие пустот на движение волны. В [17] Д. Иесан предложил рассмотреть влияние температуры в линейно упругом материале с пустотами и представил линейную теорию термоупругих материалов с пустотами. Нелокальная теория упругости основывается на том, что напряженное состояние в одной и той же точке является функцией деформации всех точек тела, тогда как классическая (локальная) упругость описывает напряженное состояние в данной точке через деформации в той же точке. Нелокальные теории при различных допущениях были разработаны многими исследователями, и полноценный обзор развития таких теорий дан А. Эрингеном в его монографии [18].

Нелокальный и запаздывающий отклики схожи как в пространстве, так и во времени. Д. Цзу в [19] объединил отклик нелокальной теплопроводности с однофазным запаздыванием, сравнивая это с моделью Б. Цао и З. Го [20]. В работе [21] Д. Цзу и З. Го продемонстрировали объединение нелокального отклика с моделью двухфазного запаздывания, предложенной Д. Цзу в [19] и известной как новая теория, включающая оба эффекта. В [22] исследовано влияние вязкости на движение волны в изотропной термоупругой модели Грина–Нагдхи типа II и III.

В [23], а также [24] исследованы различные задачи в упругом твердом теле с пустотами. В [25], [26] изучались некоторые задачи распространения волны и фундаментальные решения в неклассических теориях упругости. В [27] рассмотрены плоская волна и фундаментальное решение в термоупругой среде с пустотами.

В [28], [29] исследованы фундаментальное решение в термоупругом материале с модифицированным моментным напряжением с учетом пустот, а также в микрополярном термоупругом материале с удвоенной пористостью. В [30] исследовано фундаментальное решение в термоупругом материале с пустотами. В [31] построено фундаментальное решение для упругой среды с удвоенной и утроенной пористостью. В [32] представлено фундаментальное решение в материале удвоенной пористости с термоупругой диффузией.

В [33] авторы проанализировали фундаментальное и плоское решения в биотермоупругой среде с дуальным фазовым запаздыванием и в нелокальной теории биотермоупругой диффузии. В [34] произведен анализ плоской волны и фундаментального решения в набухающей пористой термоупругой среде.

В настоящей статье разработана новая математическая модель термоупругой диффузии с модифицированным моментным напряжением (ТДММН) с учетом нелокальности, пустот и фазовых запаздываний. Система уравнений записывается посредством элементарных функций. Получены основные свойства фундаментального решения. Распространение плоской волны в ТДММН изучено с учетом нелокальности, пустот и фазовых запаздываний. Такие волновые характеристики как фазовая скорость, коэффициенты поглощения, специфическая потеря и глубина проникновения изучены численно и представлены в форме графиков. Также обсуждаются некоторые интересные частные случаи.

1. Основные уравнения

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка трехмерного евклидова пространства E^3 , $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$, а t — временная переменная.

Следуя [17] и [35], основные уравнения ТДММН в однородном изотропном твердом теле с модифицированным моментным напряжением с учетом нелокальности, пустот и фазовых запаздываний заданы формулами:

$$t_{ij} = \lambda_0 e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{1}{2} e_{kij} m_{lk,l} - \gamma_1 T \delta_{ij} - \gamma_2 P \delta_{ij} - \gamma_3 \phi^* \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$m_{ij} = 2\alpha \chi_{ij}, \quad (2)$$

$$P = -\beta_2 e_{kk} + b_1 C - aT - \zeta^* \phi^*, \quad (3)$$

$$\left(\lambda_0 + \mu + \frac{\alpha}{4} \Delta \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \left(\mu - \frac{\alpha}{4} \Delta \right) (\Delta \cdot \mathbf{u}) - \gamma_1 \operatorname{grad} T - \gamma_2 \operatorname{grad} P - +\gamma_3 \operatorname{grad} \phi^* + \\ + \rho (1 - \xi_1^2 \Delta) \mathbf{F} = \rho (1 - \xi_1^2 \Delta) \ddot{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

$$\alpha_1 \Delta \phi^* - \gamma_3 \operatorname{div} \mathbf{u} - \xi_0 \phi^* - \omega_0 \dot{\phi}^* + m_0 T + \gamma_4 P + S_1 = \rho \psi \ddot{\phi}^*, \quad (5)$$

$$K^* \left(1 + \tau_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta T + K \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta T - \left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\ \times \left[l_1 T_0 \ddot{T} + \gamma_1 T_0 \ddot{e}_{kk} + m_0 T_0 \ddot{\phi}^* + d T_0 \ddot{P} - \frac{\partial Q_s}{\partial t} \right], \quad (6)$$

$$\left[D^* \left(1 + \tau_R \frac{\partial}{\partial t} \right) + D \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \Delta P - \left(1 + \tau_\eta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\ \times \left[n \ddot{P} + \gamma_2 \ddot{e}_{kk} + d \ddot{T} + \gamma_4 \ddot{\phi}^* - \frac{\partial Q_p}{\partial t} \right]. \quad (7)$$

Здесь $e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, $\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i})$, $\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}$ ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$), где

$$m_0 = m + \frac{\zeta^* a}{b_1}, \quad \lambda_0 = \lambda - \frac{\beta_2^2}{b_1}, \quad \gamma_1 = \beta_1 + \frac{a \beta_2}{b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{b_1},$$

$$\gamma_3 = b - \frac{\beta_2 \zeta^*}{b_1}, \quad \gamma_4 = \frac{\zeta^*}{b_1}, \quad \xi_0 = \xi_1 - \frac{\zeta^{*2}}{b_1}, \quad n = \frac{1}{b_1}, \quad l_1 = \frac{\rho c_e}{T_0} + \frac{a^2}{b}, \quad d = \frac{a}{b_1}.$$

В уравнениях (1)–(7) \mathbf{u} является вектором перемещения, λ , μ , γ , ξ_1 , m_0 , ω_0 , b , α_1 , ξ_0 — параметры пустот; Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор набла (градиента); T — изменение температуры; T_0 — референтная температура такая, что $|T/T_0| \ll 1$; C — концентрация диффундирующего материала в упругом теле; α_1 — параметр моментного напряжения; K — теплопроводность, а K^* — характеризующая материал константа теплового поля; ρ — плотность; c_e — специфическое тепло при постоянной деформации; D — константа термоупругой диффузии, D^* — характеризующая материал константа поля диффузии массы для термоупругого диффундирующего материала; a — коэффициент, описывающий меру тепловой диффузии; b_1 — коэффициент, описывающий меру диффузии массы; \mathbf{F} — объемная сила; S_1 — внешне уравновешенная объемная сила; Q_s — источник тепла; Q_p — сила диффузии массы; P — химический потенциал на единицу массы, C — концентрация диффундирующего материала в упругом теле; t_{ij} — тензор напряжения; m_{ij} — тензор моментного напряжения; δ_{ij} — дельта-символ Кронекера; e_{ijk} — альтернирующий тензор, τ_v — время температурной релаксации; τ_R — время диффузационной релаксации; τ_T — фазовое запаздывание градиента температуры; τ_q — фазовое запаздывание химического потенциала; τ_P —

фазовое запаздывание химического потенциала, а τ_η — фазовое запаздывание потока диффундирующей массы; $\beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, $\beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c$. Здесь α_t , α_c — коэффициенты линейного теплового расширения и диффузационного расширения соответственно.

Определим следующие безразмерные величины:

$$x'_i = \frac{\omega^*}{c_1} x_i, \quad \mathbf{u}' = \frac{\omega^*}{c_1} \mathbf{u}, \quad (t', \tau'_t, \tau'_q, \tau'_p, \tau'_v, \tau'_R, \tau'_\eta) = \omega^*(t, \tau_t, \tau_q, \tau_p, \tau_v, \tau_R, \tau_\eta),$$

$$\phi^{*''} = \frac{\rho c_1^2}{\gamma_1 T_0} \phi^*, \quad P' = \frac{P}{\gamma_2 b_1}, \quad T' = \frac{\gamma_1 T}{\rho c_1^2}, \quad \mathbf{F}' = \frac{\rho c_1}{\omega^* \mu} \mathbf{F}, \quad S'_1 = \frac{S_1}{b},$$

$$Q'_s = \frac{1}{\gamma_1 T_0 \omega^*} Q_s, \quad Q'_p = \frac{1}{\gamma_2 \omega^*} Q_p, \quad ,$$

где

$$\omega^* = \frac{\rho C_e c_1^2}{K}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (8)$$

ω^* и c_1 — характерная частота и скорость продольной волны в среде соответственно.

Используя безразмерные величины из равенств (8) в уравнениях (3)–(6) и опуская штрихи, получаем

$$a_1 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + a_2 \Delta \mathbf{u} + a_3 \Delta (\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}) - \nabla T + a_4 \nabla \phi^* - a_5 \nabla P - (1 - \xi_1^2 \Delta) \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^{(1)}, \quad (9)$$

$$a_6 \Delta \phi^* - a_7 \phi^* - a_8 \nabla \cdot \mathbf{u} + a_9 T - a_{10} \dot{\phi}^* - \ddot{\phi}^* + a_{11} P = F_4, \quad (10)$$

$$a_{13} \tau_v^1 \Delta T + \frac{\partial}{\partial t} \tau_T^1 \Delta T - \tau_q^1 (a_{14} \ddot{T} + a_{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \mathbf{u} + a_{16} \ddot{\phi}^* + a_{17} \ddot{P}) = F_5, \quad (11)$$

$$\left(a_{19} \tau_R^1 + \frac{\partial}{\partial t} \tau_p^1 \right) \Delta P - \tau_\eta^1 (a_{20} \ddot{P} + a_{21} \operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}} + a_{22} \ddot{T} + a_{23} \ddot{\phi}^*) = F_6, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\lambda_0 + \mu)}{\rho c_1^2}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\rho c_1^2}, \quad a_3 = \frac{\alpha \omega^{*2}}{4 \rho c_1^4}, \quad a_4 = \frac{\gamma_3 \gamma_1 T_0}{\rho^2 c_1^4}, \quad a_5 = \frac{\gamma_2^2 b_1}{\rho c_1^2}, \quad a_6 = \frac{\alpha_1}{c_1^2 \rho \psi}, \\ a_7 &= \frac{\xi_0}{\psi \omega^{*2} \rho}, \quad a_8 = \frac{\gamma_3 c_1^2}{\psi \gamma_1 T_0 \omega^{*2}}, \quad a_9 = \frac{m_0 \rho c_1^4}{\gamma_1^2 \psi T_0 \omega^{*2}}, \quad a_{10} = \frac{\omega_0}{\rho \psi \omega^*}, \quad a_{11} = \frac{\gamma_4 \gamma_2 c_1^2 b_1}{\psi \gamma_1 T_0 \omega^{*2}}, \\ a_{12} &= \frac{b c_1^2}{\psi \omega^{*2} \gamma_1 T_0}, \quad a_{13} = \frac{K^*}{K \omega^*}, \quad a_{14} = \frac{l_1 c_1^2 T_0}{K \omega^*}, \quad a_{15} = \frac{T_0 \gamma_1^2}{\rho K \omega^*}, \quad a_{16} = \frac{m_0 T_0^2 \gamma_1^2}{\rho^2 c_1^2 K \omega^*}, \\ a_{17} &= \frac{dT_0 \gamma_1 \gamma_2}{\rho K \omega^*}, \quad a_{18} = \frac{\gamma_1^2 T_0}{K \omega^* \rho}, \quad a_{19} = \frac{D^*}{D \omega^*}, \quad a_{20} = \frac{n c_1^2}{D \omega^*}, \quad a_{21} = \frac{c_1^2}{D \omega^* b_1}, \\ a_{22} &= \frac{d \rho c_1^4}{D \omega^* \gamma_1 \gamma_2 b_1}, \quad a_{23} = \frac{\gamma_4 \gamma_1 T_0}{D \omega^* \rho \gamma_2 b_1}, \quad a_{24} = \frac{c_1^2}{D b_1 \omega^*}, \\ \tau_v^1 &= 1 + \tau_v \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tau_T^1 = 1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tau_q^1 = 1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \tau_R^1 = 1 + \tau_R \frac{\partial}{\partial t}, \\ \tau_P^1 &= 1 + \tau_P \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tau_\eta^1 = 1 + \tau_\eta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = -a_2 (1 - \Delta \xi_1^2) \mathbf{F}, \quad F_4 = -a_{12} S_1, \quad F_5 = -\tau_q^1 a_{18} Q_s, \quad F_6 = -\tau_\eta^1 a_{24} Q_p.$$

1.1. Устойчивые колебания. Обозначим гармонические вариации $\mathbf{u}, \phi^*, T, P, F_j$ через

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \phi^*(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), P(\mathbf{x}, t), F_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} [(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\phi^*}, \overline{T}, \overline{P}, \bar{F}_j) e^{-i\omega t}], \quad (13)$$

где ω — частота колебаний, $\omega > 0$.

Используя равенства (13) в уравнениях (9)–(12), для простоты опуская горизонтальные черты, получим систему уравнений для устойчивых колебаний в виде

$$(a_1 + a_3\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + [\delta_t^1 \Delta - a_3 \Delta^2 + \omega^2] \mathbf{u} + a_4 \operatorname{grad} \phi^* - \operatorname{grad} T - a_5 \operatorname{grad} P = \mathbf{F}^{(1)}, \quad (14)$$

$$-a_8 \operatorname{div} \mathbf{u} + (a_6 \Delta + \delta_t^2) \phi^* + a_9 T + a_{11} P = F_4, \quad (15)$$

$$\delta_t^5 a_{14} \operatorname{div} \mathbf{u} + \delta_t^5 a_{15} \phi^* + [(a_{12} \delta_t^3 - \delta_t^4) \Delta + \delta_t^5 a_{13}] T + \delta_t^5 a_{16} P = F_5, \quad (16)$$

$$\delta_t^8 a_{19} \operatorname{div} \mathbf{u} + \delta_t^8 a_{21} \phi^* + \delta_t^8 a_{20} T + [(a_{17} \delta_t^6 - \delta_t^7) \Delta + \delta_t^8 a_{18}] P = F_6, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_t^1 &= (a_2 - \omega^2 \xi_1^2), \quad \delta_t^2 = (\omega^2 - a_7 + i\omega a_{10}), \quad \delta_t^3 = (1 - i\omega \tau_v), \quad \delta_t^4 = i\omega (1 - i\omega \tau_T), \\ \delta_t^5 &= \omega^2 \left(1 - i\omega \tau_q - \omega^2 \frac{\tau_q^2}{2}\right), \quad \delta_t^6 = (1 - i\omega \tau_R), \quad \delta_t^7 = i\omega (1 - i\omega \tau_P), \quad \delta_t^8 = \omega^2 \left(1 - i\omega \tau_\eta - \omega^2 \frac{\tau_\eta^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Введем матричный дифференциальный оператор

$$\mathbf{B}(\mathbf{D}_x) = \|B_{gh}(\mathbf{D}_x)\|_{6 \times 6},$$

$$\begin{aligned} B_{mn}(\mathbf{D}_x) &= (\delta_t^1 \Delta + \omega^2 - a_3 \Delta^2) \delta_{mn} + (a_1 + a_3 \Delta) \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n}, \quad B_{m4}(\mathbf{D}_x) = a_4 \frac{\partial}{\partial x_m}, \\ B_{m5}(\mathbf{D}_x) &= -\frac{\partial}{\partial x_m}, \quad B_{m6}(\mathbf{D}_x) = -a_5 \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad B_{4n}(\mathbf{D}_x) = -a_8 \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad B_{44}(\mathbf{D}_x) = (a_6 \Delta + \delta_t^2), \\ B_{45}(\mathbf{D}_x) &= a_9, \quad B_{46}(\mathbf{D}_x) = a_{11}, \quad B_{5n}(\mathbf{D}_x) = \delta_t^5 a_{14} \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad B_{54}(\mathbf{D}_x) = \delta_t^5 a_{15}, \\ B_{55}(\mathbf{D}_x) &= (a_{12} \delta_t^3 - \delta_t^4) \Delta + \delta_t^5 a_{13}, \quad B_{56}(\mathbf{D}_x) = \delta_t^5 a_{16}, \quad B_{6n}(\mathbf{D}_x) = \delta_t^8 a_{19} \frac{\partial}{\partial x_n}, \\ B_{64}(\mathbf{D}_x) &= \delta_t^8 a_{21}, \quad B_{65}(\mathbf{D}_x) = \delta_t^8 a_{20}, \quad B_{66}(\mathbf{D}_x) = (a_{17} \delta_t^6 - \delta_t^7) \Delta + \delta_t^8 a_{18}. \end{aligned}$$

Здесь δ_{mn} — дельта-функция Кронекера.

Система уравнений (14)–(17) может быть записана в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{D}_x) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

т. е.

$$\mathbf{B}(\mathbf{D}_x) = \|G_{gh}(D_x)\|_{6 \times 6},$$

где $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \phi^*, T, P)$ и $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_6)$ — шестикомпонентная вектор-функция на E^3 .

Предположим, что

$$a_6 \delta_t^1 (a_{12} \delta_t^3 - \delta_t^4) (a_{17} \delta_t^6 - \delta_t^7) \neq 0. \quad (18)$$

При выполнении условия (18) \mathbf{F} является эллиптическим дифференциальным оператором [36].

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Определение. Фундаментальным решением системы уравнений (14)–(17) (фундаментальной матрицей оператора F) называется матрица $G(\mathbf{x}) = \|G_{gh}(\mathbf{x})\|_{6 \times 6}$, удовлетворяющая условию [36]

$$\mathbf{B}(\mathbf{D}_{\mathbf{x}})\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{I}(\mathbf{x}), \quad (19)$$

где δ — дельта-функция Дирака, $\mathbf{I} = \|\delta_{gh}\|_{6 \times 6}$ — единичная матрица и $\mathbf{x} \in E^3$.

Построим $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ посредством элементарных функций.

Для исследования краевой задачи в модели ТДММН с нелокальностью, пустотами и фазовым запаздыванием необходимо построить фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений в частных производных и выяснить его основные свойства.

Рассмотрим систему неоднородных уравнений

$$(a_1 + a_3\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + [(a_2 - \omega^2 \xi_1^2)\Delta - a_3\Delta^2 + \omega^2] \mathbf{u} + a_8 \operatorname{grad} \phi^* - \delta_t^5 a_{14} \operatorname{grad} T - \delta_t^8 a_{19} \operatorname{grad} P = \mathbf{F}^{(1)}, \quad (20)$$

$$a_4 \operatorname{div} \mathbf{u} + (a_6\Delta + \delta_t^2) \phi^* + \delta_t^5 a_{15} T + \delta_t^8 a_{21} P = F_4, \quad (21)$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{u} + a_9 \phi^* + [(a_{12}\delta_t^3 - \delta_t^4)\Delta + \delta_t^5 a_{13}] T + \delta_t^5 a_{20} P = F_5, \quad (22)$$

$$-a_5 \operatorname{div} \mathbf{u} + a_{11} \phi^* + \delta_t^8 a_{16} T + [(a_{17}\delta_t^6 - \delta_t^7)\Delta + \delta_t^8 a_{18}] P = F_6, \quad (23)$$

Система уравнений (20)–(23) может быть записана в форме

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (24)$$

где \mathbf{B}^T — транспонированная матрица к матрице \mathbf{B} , $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \phi^*, T, P)$ и $\mathbf{F} = (\mathbf{F}^{(1)}, F_4, F_5, F_6)$ — шестикомпонентная вектор-функция на E^3 .

Применяя оператор div к уравнению (23), получим

$$[(a_1 + a_2 - \xi_1^2 \omega^2)\Delta + \omega^2] \operatorname{div} \mathbf{u} - a_8 \Delta \phi^* + a_{14} \delta_t^5 \Delta T + \delta_t^8 a_{19} \Delta P = \operatorname{div} \mathbf{F}^{(1)}, \quad (25)$$

$$a_4 \operatorname{div} \mathbf{u} + (a_6\Delta + \delta_t^2) \phi^* + \delta_t^5 a_{15} T + \delta_t^8 a_{21} P = F_4, \quad (26)$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{u} + a_9 \phi^* + [(a_{12}\delta_t^3 - \delta_t^4)\Delta + \delta_t^5 a_{13}] T + \delta_t^5 a_{20} P = F_5, \quad (27)$$

$$-a_5 \operatorname{div} \mathbf{u} + a_{11} \phi^* + \delta_t^8 a_{16} T + [(a_{17}\delta_t^6 - \delta_t^7)\Delta + \delta_t^8 a_{18}] P = F_6. \quad (28)$$

Уравнения (25)–(28) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{C}(\Delta, \omega) \mathbf{V} = \mathbf{F}^0, \quad (29)$$

где $\mathbf{V} = (\operatorname{div} \mathbf{u}, \phi^* T, P)$, $\mathbf{F}^0 = (\nabla \cdot \mathbf{F}^{(1)}, F_4, F_5, F_6) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$,

$$\mathbf{C}(\Delta, \omega) = \begin{vmatrix} (a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2)\Delta + \omega^2 & -a_8 \Delta & \delta_t^9 \Delta & \delta_t^{10} \Delta \\ a_4 & (a_6\Delta + \delta_t^2) & \delta_t^{11} & \delta_t^{12} \\ -1 & a_9 & (\delta_t^{13} \Delta + \delta_t^{14}) & \delta_t^{15} \\ -a_5 & a_{11} & \delta_t^{16} & \delta_t^{17} \Delta + \delta_t^{18} \end{vmatrix}_{4 \times 4}. \quad (30)$$

Из системы (29) получаем

$$\Gamma_1(\Delta) \mathbf{V} = \psi,$$

где

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \quad \text{и} \quad \psi_n = \frac{1}{(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}} \sum_{m=1}^4 C_{mn}^* f_m, \quad (31)$$

$$\Gamma_1(\Delta) = \frac{1}{(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}} \det \mathbf{C}(\Delta, \omega),$$

и C_{mn}^* — алгебраическое дополнение элементов C_{mn} матрицы C .

Из уравнений (31) видно, что

$$\Gamma_1(\Delta) = \prod_{m=1}^4 (\Delta + \lambda_m^2),$$

где λ_m^2 , $m = 1, 2, 3, 4$, — корни уравнения $\Gamma_1(-\kappa) = 0$ (относительно κ).

Применяя оператор $\Gamma_1(\Delta)$ к уравнению (20), получаем

$$\begin{aligned} & \Gamma_1(\Delta) [(a_2 - \omega^2 \xi_1^2) \Delta - a_3 \Delta^2 + \omega^2] \mathbf{u} = \\ & = [-(a_1 + a_3 \Delta) \operatorname{grad} \psi_1 + a_8 \operatorname{grad} \psi_2 - a_{14} \delta_t^5 \operatorname{grad} \psi_3 - a_{19} \delta_t^8 \operatorname{grad} \psi_4 + \Gamma_1(\Delta) \mathbf{F}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнение (32) может быть записано в виде

$$\Gamma_1(\Delta) \Gamma_2(\Delta) \mathbf{u} = \tilde{\psi},$$

где

$$\Gamma_2(\Delta) = f^* \det \begin{vmatrix} -a_3 \Delta + (a_2 - \omega^2 \xi_1^2) & -\omega \\ \omega & \Delta \end{vmatrix}_{2 \times 2}, \quad f^* = -\frac{1}{a_3}$$

и

$$\tilde{\psi} = f^* \left[-(a_1 + a_3 \Delta) \operatorname{grad} \psi_1 + \left\{ \Gamma_1(\Delta) \mathbf{F}^{(1)} + (a_8) \operatorname{grad} \psi_2 - (a_{14} \delta_t^5) \operatorname{grad} \psi_3 - a_{19} \delta_t^8 \operatorname{grad} \psi_4 \right\} \right]. \quad (33)$$

Очевидно,

$$\Gamma_2(\Delta) = (\Delta + \lambda_5^2)(\Delta + \lambda_6^2),$$

где λ_m^2 , $m = 5, 6$, — корни уравнения $\Gamma_2(-\kappa) = 0$ (относительно κ).

Из (29) и (30) получаем

$$\Theta(\Delta) U(\mathbf{x}) = \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (34)$$

где

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = (\tilde{\psi}, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \quad \Theta(\Delta) = \|\Theta_{gh}(\Delta)\|_{6 \times 6}, \quad \Theta_{mm}(\Delta) = \Gamma_1(\Delta) \Gamma_2(\Delta) = \prod_{q=1}^6 (\Delta + \lambda_q^2),$$

$\Theta_{gh}(\Delta) = 0$, $\Theta_{44}(\Delta) = \Gamma_1(\Delta)$, $\Theta_{55}(\Delta) = \Gamma_1(\Delta)$, $m = 1, 2, 3$, $g, h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $g \neq h$.

Уравнения (31) и (33) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= [f^* \Gamma_1(\Delta) \mathbf{J} + q_{11}(\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div}] \mathbf{F}^{(1)} + q_{21}(\Delta) \operatorname{grad} F_4 + q_{31}(\Delta) \operatorname{grad} F_5 + q_{41}(\Delta) \operatorname{grad} F_6, \\ \psi_2 &= q_{12}(\Delta) \operatorname{div} \mathbf{F}^{(1)} + q_{22}(\Delta) F_4 + q_{32}(\Delta) F_5 + q_{42}(\Delta) F_6, \\ \psi_3 &= q_{13}(\Delta) \operatorname{div} \mathbf{F}^{(1)} + q_{23}(\Delta) F_4 + q_{33}(\Delta) F_5 + q_{43}(\Delta) F_6, \\ \psi_4 &= q_{14}(\Delta) \operatorname{div} \mathbf{F}^{(1)} + q_{24}(\Delta) F_4 + q_{34}(\Delta) F_5 + q_{44}(\Delta) F_6, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\mathbf{J} = \|\delta_{gh}\|_{3 \times 3}$ — единичная матрица. В уравнении (35) были использованы следующие обозначения:

$$q_{m1}(\Delta) = \frac{f^*}{(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}} [-(a_1 + a_3 \Delta) C_{m1}^* + (a_8) C_{m2}^* - (a_{14} \delta_t^5) C_{m3}^* + (a_{19} \delta_t^8) C_{m4}^*],$$

$$q_{m2}(\Delta) = \frac{1}{(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}} C_{m2}^*,$$

$$q_{m3}(\Delta) = \frac{1}{(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}} C_{m3}^* q_{m4}(\Delta) = e^* C_{m4}^*, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Теперь из уравнений (35) находим

$$\hat{\psi}(x, \omega) = \mathbf{R}^{tr}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad (36)$$

где \mathbf{R}^{tr} — транспонированная матрица к матрице \mathbf{R} и

$$\mathbf{R} = \|R_{gh}\|_{6 \times 6},$$

$$\begin{aligned} R_{mn}(\mathbf{D}_x) &= f^* \Gamma_1(\Delta) \delta_{mn} + q_{11}(\Delta) \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n}, \quad R_{14}(\mathbf{D}_x) = q_{12}(\Delta) \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad R_{15}(\mathbf{D}_x) = q_{13}(\Delta) \frac{\partial}{\partial x_m}, \\ R_{41}(\mathbf{D}_x) &= q_{21}(\Delta) \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad R_{44}(\mathbf{D}_x) = q_{22}(\Delta), \quad R_{45}(\mathbf{D}_x) = q_{23}(\Delta), \quad R_{5n}(\mathbf{D}_x) = q_{31}(\Delta) \frac{\partial}{\partial x_m}, \\ R_{54}(\mathbf{D}_x) &= q_{32}(\Delta), \quad R_{55}(\mathbf{D}_x) = q_{33}(\Delta), \quad m, n = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Далее, из уравнений (24), (34) и (36) получаем

$$\Theta \mathbf{U} = \mathbf{R}^{tr} \mathbf{F}^{tr} \mathbf{U}.$$

Откуда $\mathbf{R}^{tr} \mathbf{F}^{tr} = \Theta$,

$$\Theta(\Delta, \omega) = \mathbf{R}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{F}(\mathbf{D}_x, \omega). \quad (37)$$

Предположим, что

$$\lambda_m^2 \neq \lambda_n^2 \neq 0, \quad m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad m \neq n.$$

Пусть

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{x}, \omega) &= \|Y_{rs}(\mathbf{x}, \omega)\|_{6 \times 6}, \quad Y_{mm}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=1}^6 r_{1n} \zeta_n(\mathbf{x}, \omega), \\ Y_{vw}(\mathbf{x}, \omega) &= 0; \quad l = 1, 2, 3, 4, 5; \quad v, w = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad v \neq w, \\ \zeta_n(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{-1}{4\pi |\mathbf{x}|} \exp(i \lambda_n |\mathbf{x}|), \\ r_{1n} &= \prod_{m=1, m \neq n}^5 (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)^{-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \\ r_{2v} &= \prod_{m=1, m \neq v}^5 (\lambda_m^2 - \lambda_v^2)^{-1}, \quad v = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Лемма. Матрица $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \omega)$, заданная выше, является фундаментальной матрицей оператора $\Theta(\Delta, \omega)$, т. е.

$$\Theta(\Delta, \omega) \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}). \quad (38)$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Delta) \Gamma_2(\Delta) Y_{11}(\mathbf{x}, \omega) &= \delta(\mathbf{x}), \\ \Gamma_1(\Delta) Y_{11}(\mathbf{x}, \omega) &= \delta(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15} + r_{16} &= 0, \\ r_{12}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + r_{13}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + r_{14}(\lambda_1^2 - \lambda_4^2) + r_{15}(\lambda_1^2 - \lambda_5^2) + r_{16}(\lambda_1^2 - \lambda_6^2) &= 0, \\ r_{13}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + r_{14}(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) + & \\ + r_{15}(\lambda_1^2 - \lambda_5^2)(\lambda_2^2 - \lambda_5^2) + r_{16}(\lambda_1^2 - \lambda_6^2)(\lambda_2^2 - \lambda_6^2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_{14} (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) (\lambda_2^2 - \lambda_4^2) (\lambda_3^2 - \lambda_4^2) + r_{15} (\lambda_1^2 - \lambda_5^2) (\lambda_2^2 - \lambda_5^2) (\lambda_3^2 - \lambda_5^2) + \\
& + r_{16} (\lambda_1^2 - \lambda_6^2) (\lambda_2^2 - \lambda_6^2) (\lambda_3^2 - \lambda_6^2) = 0, \\
r_{15} (\lambda_1^2 - \lambda_5^2) (\lambda_2^2 - \lambda_5^2) (\lambda_3^2 - \lambda_5^2) (\lambda_4^2 - \lambda_5^2) + & r_{16} (\lambda_1^2 - \lambda_6^2) (\lambda_2^2 - \lambda_6^2) (\lambda_3^2 - \lambda_6^2) (\lambda_4^2 - \lambda_6^2) = 0, \\
r_{16} (\lambda_1^2 - \lambda_6^2) (\lambda_2^2 - \lambda_6^2) (\lambda_3^2 - \lambda_6^2) (\lambda_4^2 - \lambda_6^2) (\lambda_5^2 - \lambda_6^2) & = 1, \\
(\Delta + \lambda_m^2) \zeta_n(\mathbf{x}, \omega) & = \delta(\mathbf{x}) + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \zeta_n(\mathbf{x}, \omega), \quad m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(\Delta) \Gamma_2(\Delta) Y_{11}(\mathbf{x}, \omega) & = (\Delta + \lambda_2^2) (\Delta + \lambda_3^2) (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \times \\
& \times \sum_{n=1}^6 [r_{1n} (\delta + ((\lambda_1^2 - \lambda_n^2))) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_2^2) (\Delta + \lambda_3^2) (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=2}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_3^2) (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=2}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\delta + (\lambda_2^2 - \lambda_n^2)) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_3^2) (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=3}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\lambda_2^2 - \lambda_n^2) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=3}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\lambda_2^2 - \lambda_n^2) (\delta + (\lambda_3^2 - \lambda_n^2)) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_4^2) (\Delta + \lambda_5^2) (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=4}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\lambda_2^2 - \lambda_n^2) ((\lambda_3^2 - \lambda_n^2)) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_6^2) \sum_{n=5}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\lambda_2^2 - \lambda_n^2) ((\lambda_3^2 - \lambda_n^2) (\lambda_4^2 - \lambda_n^2)) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_5^2) \sum_{n=5}^6 [r_{1n} (\lambda_1^2 - \lambda_n^2) (\lambda_2^2 - \lambda_n^2) (\lambda_3^2 - \lambda_n^2) (\lambda_4^2 - \lambda_n^2) (\delta + (\lambda_5^2 - \lambda_n^2)) \zeta_n] = \\
& = (\Delta + \lambda_6^2) \zeta_n(\mathbf{x}, \omega) = \delta.
\end{aligned}$$

Введем матрицу

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{R}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \omega). \quad (39)$$

Из уравнений (37)–(39) получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{F}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{R}(\mathbf{D}_x, \omega) \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \omega) = \Theta(\Delta, \omega) \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x}) \mathbf{I}(\mathbf{x}).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$ — решение (19). \square

Таким образом, доказана

Теорема. Матрица $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$, заданная формулой (39), является фундаментальным решением системы уравнений (14)–(17).

3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$

Свойство 1. Каждый столбец матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$ является решением системы уравнений (14)–(17) в любой точке $\mathbf{x} \in E^3$, кроме начала координат.

Свойство 2. Матрица $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \|G_{gh}\|_{6 \times 6}, \mathbf{G}_{mn}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{R}_{mn}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \omega) \mathbf{Y}_{11}(\mathbf{x}, \omega), \\ \mathbf{G}_{m6}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathbf{R}_{m6}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \omega) \mathbf{Y}_{66}(\mathbf{x}, \omega), \quad m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

Следствие. При выполнении условия $(a_1 + a_2 - \omega^2 \xi_1^2) a_6 \delta_t^{13} \delta_t^{17}$ каждый столбец матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega)$ является решением однородного уравнения

$$\mathbf{B}(\mathbf{D}_\mathbf{x}, \omega) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall x \in R.$$

3.1. Приложение. В качестве приложения задачи рассмотрим различные виды источников.

i) Объемная сила в направлении x_3

$$F_3 = F_0 e^{-i(\zeta x_1 + \omega t)}.$$

ii) Источник тепла

$$Q = \frac{2AQ_0}{\pi r_0^2} \exp \left[-2 \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r_0^2} \right) \right] e^{-i\omega t}.$$

iii) Источник объемной доли

$$S_1 = \zeta_0 e^{-i(\zeta x_1 + \omega t)}.$$

iv) Источник химического потенциала

$$P = \frac{2AP_0}{\pi r_0^2} \exp \left[-2 \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r_0^2} \right) \right] e^{-i\omega t}.$$

В уравнениях выше F_0, ζ_0 — величина силы и внешне уравновешенной объемной силы, Q_0, P_0 — полная мощность падающего лазерного луча, A — поглощающая способность обрабатываемой детали, r_0 — радиус пятна лазерного луча, x_1, x_2 и x_3 — расстояния, измеренные в декартовых координатах от центра лазерного луча.

Подставляя эти источники в основные свойства фундаментального решения, получаем требуемые результаты для различных источников.

4. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение плоской волны в двумерном случае. Имеем

$$u_i = (u_1(x_1, x_3, t), 0, u_3(x_1, x_3, t)), \quad T(x_1, x_3, t), \quad C(x_1, x_3, t). \quad (40)$$

Компоненты перемещения связаны уравнениями

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (41)$$

Уравнения (9)–(12) с учетом формул (40) и (41) принимают вид (в отсутствии объемной силы, внешне уравновешенной силы, источника тепла и источника диффузии массы)

$$[(a_1 + a_2 - \xi_1^2 \omega^2) \Delta + \omega^2] \phi + a_4 \phi^* - a_5 P - T = 0, \quad (42)$$

$$[a_3 \Delta^2 - (a_2 - \omega^2 \xi_1^2) - \omega^2] \psi = 0, \quad (43)$$

$$a_8 \Delta \phi - (a_6 \Delta - \delta_t^2) \phi^* - a_9 T - a_{11} P = 0, \quad (44)$$

$$a_{14}\Delta\phi + a_{15}\phi^* + \left[\left(\frac{a_{12}\delta_t^3 - \delta_t^4}{\delta_t^5} \right) \Delta + a_{13} \right] T + a_{16}P = 0, \quad (45)$$

$$a_{19}\Delta\phi + a_{21}\phi^* + a_{20}T + \left[\left(\frac{a_{17}\delta_t^6 - \delta_t^7}{\delta_t^8} \right) \Delta + a_{18} \right] P = 0, \quad (46)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$.

Для решений уравнений (42)–(46) в виде плоских волн предположим, что

$$(\phi, \phi^*, T, C, \psi) = (\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^*, \tilde{T}, \tilde{C}, \tilde{\psi}) e^{-[i(\zeta(l_1x_1 + l_3x_3))]}, \quad (47)$$

где $\omega (= \zeta c)$ — частота; ζ — волновое число и c — фазовая скорость; $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^*, \tilde{T}, \tilde{C}, \tilde{\psi}$ — неопределенные амплитуды, l_1 и l_3 — направляющие косинусы волн, нормальной к плоскости x_1x_3 со свойством $l_1^2 + l_3^2 = 1$.

Используя равенство (47) в уравнениях (42)–(46), получаем

$$[\zeta^2 (\omega^2 \xi_1^2 - (a_1 + a_2)) + \omega^2] \tilde{\phi} + a_4 \tilde{\phi}^* - \tilde{T} - a_5 \tilde{P} = 0, \quad (48)$$

$$a_8 \zeta^2 \tilde{\phi} - (a_6 \zeta^2 + a_7 - a_{10} i \omega - \omega^2) \tilde{\phi}^* - a_9 \tilde{T} + a - \tilde{P} = 0, \quad (49)$$

$$\zeta^2 a_{14} \tilde{\phi} - a_{15} \tilde{\phi}^* + \left[\left(\frac{a_{12}\delta_t^3 - \delta_t^4}{\delta_t^5} \right) (\zeta^2) - a_{13} \right] \tilde{T} - a_{16} \tilde{P} = 0, \quad (50)$$

$$\zeta^2 a_{19} \tilde{\phi} - a_{21} \tilde{\phi}^* - a_{20} \tilde{T} + \left[\left(\frac{a_{17}\delta_t^6 - \delta_t^7}{\delta_t^8} \right) (\zeta^2) - a_{18} \right] \tilde{P} = 0, \quad (51)$$

$$[a_3 \zeta^4 + \zeta^2 (a_2 - \omega^2 \xi_1^2) - \omega^2] \tilde{\psi} = 0. \quad (52)$$

Для нетривиального решения системы уравнений (48)–(51) выполняется следующее полиномиальное характеристическое уравнение относительно ζ :

$$M_1 \zeta^8 + M_2 \zeta^6 + M_3 \zeta^4 + M_4 \zeta^2 + M_5 = 0, \quad (53)$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 — даны в приложении.

Решая уравнение (53), находим восемь корней для ζ , т. е. $\pm\zeta_1, \pm\zeta_2, \pm\zeta_3$ и $\pm\zeta_4$. Этим корням соответствуют четыре волны в порядке убывания их скоростей, а именно: продольная волна (Р-волна), тепловая волна (Т-волна), волна диффузии массы (MD-волна) и волна объемной доли (VF-волна) соответственно.

Из уравнения (52) получаем четыре корня для ζ , т. е. $\pm\zeta_5$ и $\pm\zeta_6$. Этим корням соответствуют две волны в порядке убывания их скоростей, а именно набор связанных поперечных волн (SV1 и SV2). Заметим, что эти два значения не зависят от теплового и диффузационного свойств среды.

Получим теперь выражения для фазовой скорости, коэффициента поглощения, специфической потери и глубины проникновения этих типов волн.

i) *Фазовая скорость.* Фазовые скорости задаются следующим образом:

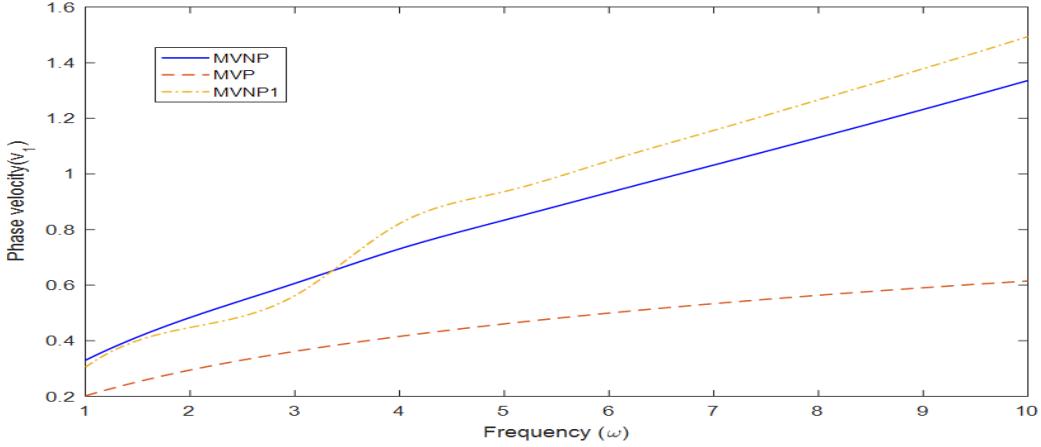
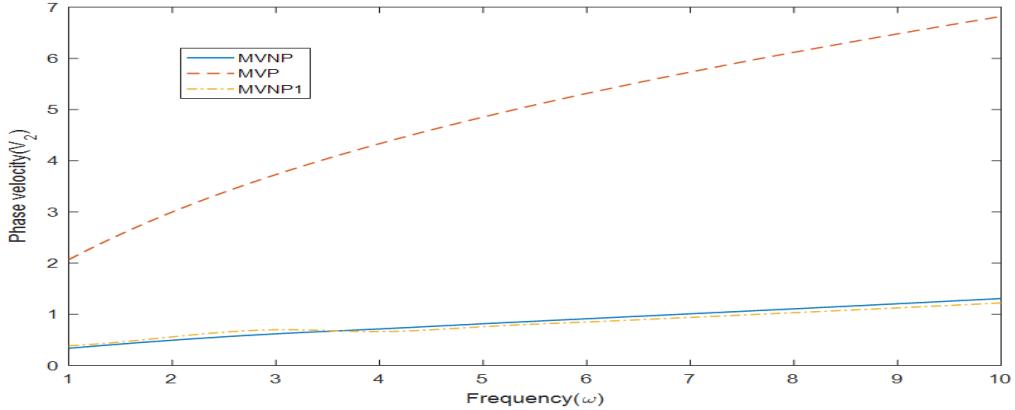
$$V_i = \frac{\omega}{|Re(\zeta)|}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

здесь V_1, V_2, V_3, V_4 — фазовые скорости волн Р, Т, MD, SV1 и SV2 соответственно.

ii) *Коэффициент поглощения.* Коэффициенты поглощения имеют вид

$$Q_i = \text{Im}(\zeta), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — коэффициенты поглощения волн Р, Т, VF и MD соответственно.

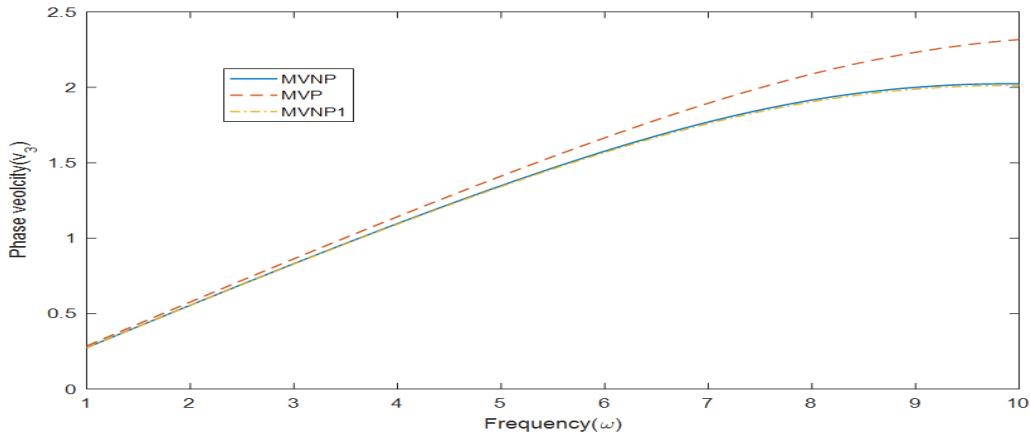
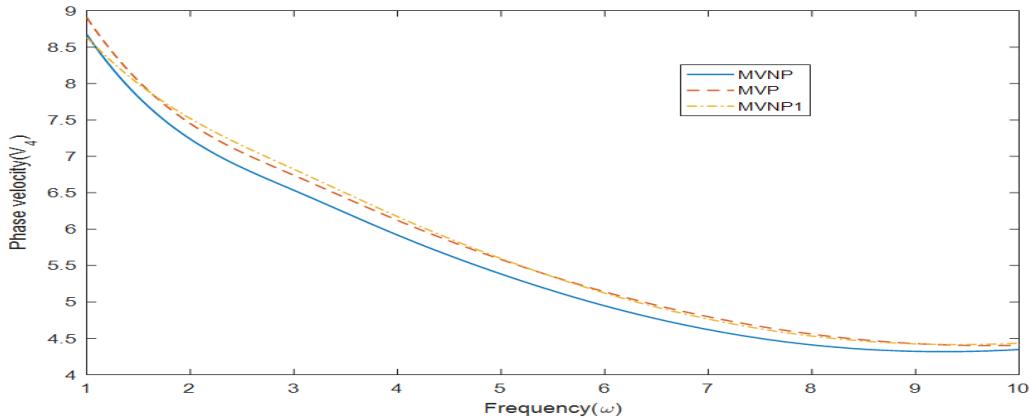
Рис. 1. Изменение фазовой скорости V_1 в зависимости от частотыРис. 2. Изменение фазовой скорости V_2 в зависимости от частоты

iii) *Специфическая потеря.* Специфическая потеря — это отношение энергии (ΔW), рассеянной при нахождении образца в цикле напряжения, к упругой энергии (W), запасенной в образце при максимуме напряжения. Специфическая потеря является наиболее прямым методом определения внутреннего трения в материале. Для синусоидальной плоской волны малой амплитуды Колски [36] показал, что специфическая потеря $\Delta W/W$ в 4π раз больше модуля отношения мнимой части ζ к ее вещественной части, т. е.

$$R_i = \left(\frac{\Delta W}{W} \right)_i = 4\pi \left| \frac{\text{Im}(\zeta_i)}{\text{Re}(\zeta_i)} \right|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

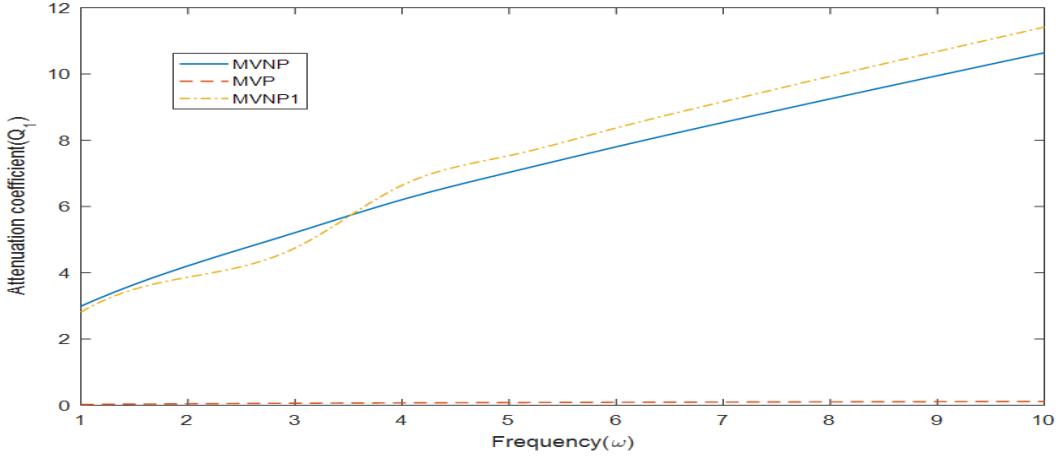
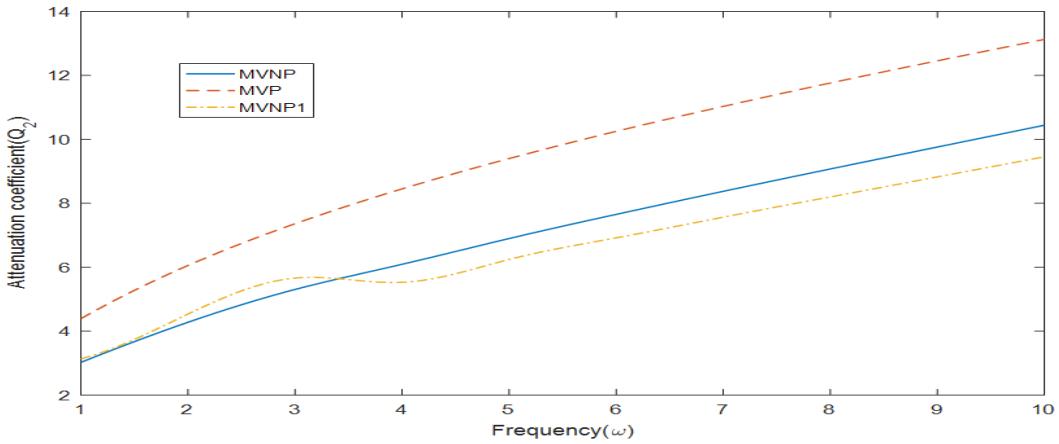
iv) *Глубина проникновения.* Глубина проникновения задается условием

$$S_i = \frac{1}{|\text{Im}(\zeta_i)|}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Рис. 3. Изменение фазовой скорости V_3 в зависимости от частотыРис. 4. Изменение фазовой скорости V_4 в зависимости от частоты

5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

- 1) При $\alpha \rightarrow 0$ получаем фундаментальное решение и результирующее характеристическое уравнение для плоских волн в модели нелокальной термоупругой диффузии с пустотами, нелокальностью и фазовыми запаздываниями.
- 2) При $\xi_1 \rightarrow 0$ получаем результаты для ТДММН с пустотами.
- 3) При $\gamma_2, D, D^*, d, n, \tau_\eta, \tau_\eta^2 \rightarrow 0$ получаем требуемые результаты для ТДММН с нелокальностью, пустотами и фазовыми запаздываниями.
- 4) При $\gamma_3, \alpha_1, \omega_0, \varsigma^* \rightarrow 0$ получаем соответствующие результаты для ТДММН с нелокальностью и фазовыми запаздываниями.

Рис. 5. Изменение коэффициента поглощения Q_1 в зависимости от частотыРис. 6. Изменение коэффициента поглощения Q_2 в зависимости от частоты

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для численных расчетов мы, следуя за Х. Шерифом и Х. Салехом [37], выбрали медный материал со следующими значениями нужных нам параметров:

$$\lambda = 77.6 \times 10^9 Kgm^{-1}s^{-2}, \quad \mu = 3.86 \times 10^{10} Kgm^{-1}s^{-2}, \quad T_o = 293K,$$

$$C_e = 0.3831 \times 10^3 JKg^{-1}K^{-1}, \quad \alpha_t = 1.78 \times 10^{-5} K^{-1}, \quad \rho = 8954 Kgm^{-3}, \quad K = 386 Wm^{-1}K^{-1},$$

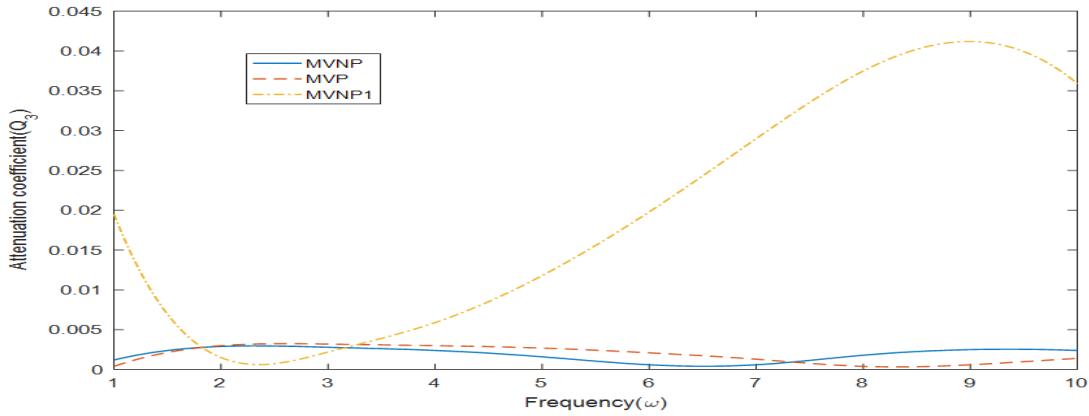
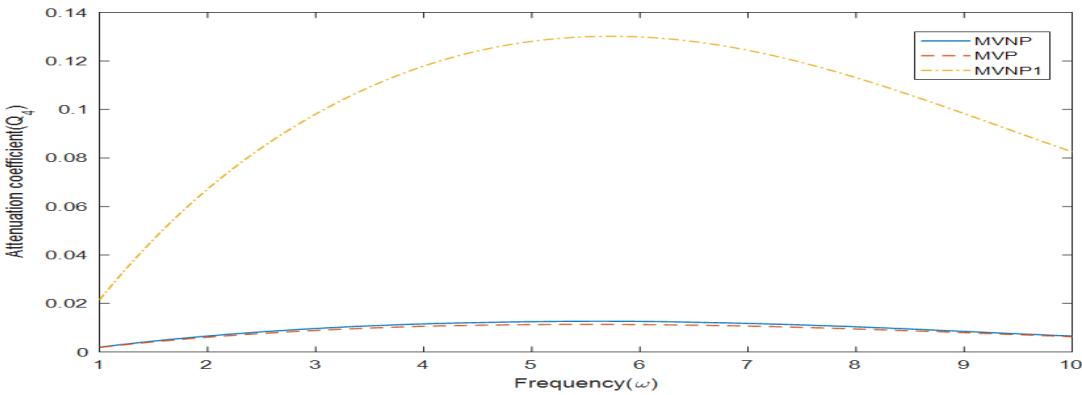
$$\alpha = 0.05 Kgms^{-2}, \quad t = 0.01s, \quad D = 0.85 \times 10^{-8} Kgm^{-3}s, \quad \tau_v = 0.2s, \quad \tau_t = 0.4s,$$

$$\tau_q = 0.6s, \quad \tau_R = 0.1 \quad \tau_p = 0.3s, \quad \tau_\eta = 0.5s, \quad a = 1.02 \times 10^4 m^2 sec^{-2} k^{-1}s^{-2} K^{-1},$$

$$b_1 = 9 \times 10^5 Kg^{-1}m^5 s^{-2}, \quad \alpha_c = 1.98 \times 10^{-4} m^3 Kg^{-1}, \quad \omega = 0.2, \quad D^* = 0.289 \times 10^3 kgm^{-3},$$

при этом параметры пустот следующие:

$$\alpha_1 = 3.688 \times 10^{-5} N, \quad \Psi = 1.753 \times 10^{-15} m^2, \quad \xi_0 = 1.475 \times 10^{10} Nm^{-2},$$

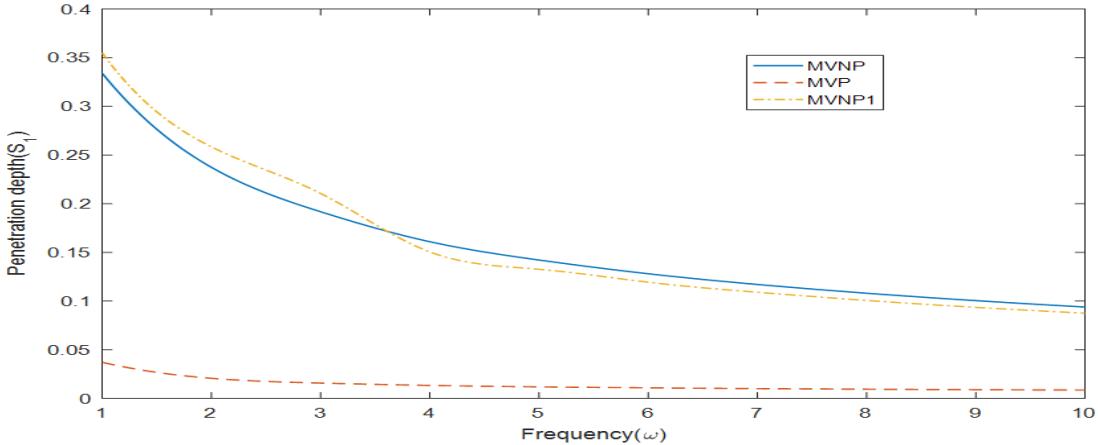
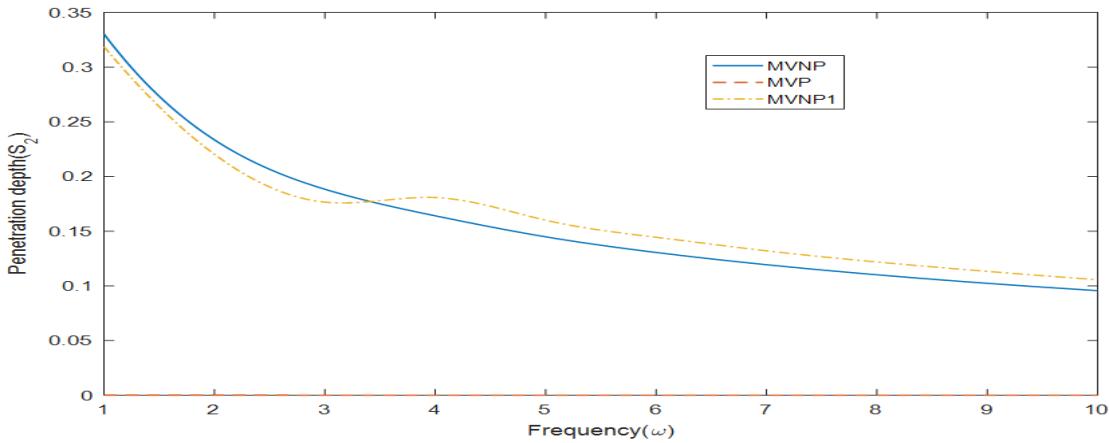
Рис. 7. Изменение коэффициента поглощения Q_3 в зависимости от частотыРис. 8. Изменение коэффициента поглощения Q_4 в зависимости от частоты

$$\zeta^* = 0.87 \times 10^8 m^2 s^{-2}, \quad b = 1.13849 \times 10^{10} Nm^{-2},$$

$$m = 2 \times 10^6 Nm^{-2} K^{-1}, \quad \omega_0 = 0.0787 \times 10^{-1} Nm^{-2} s.$$

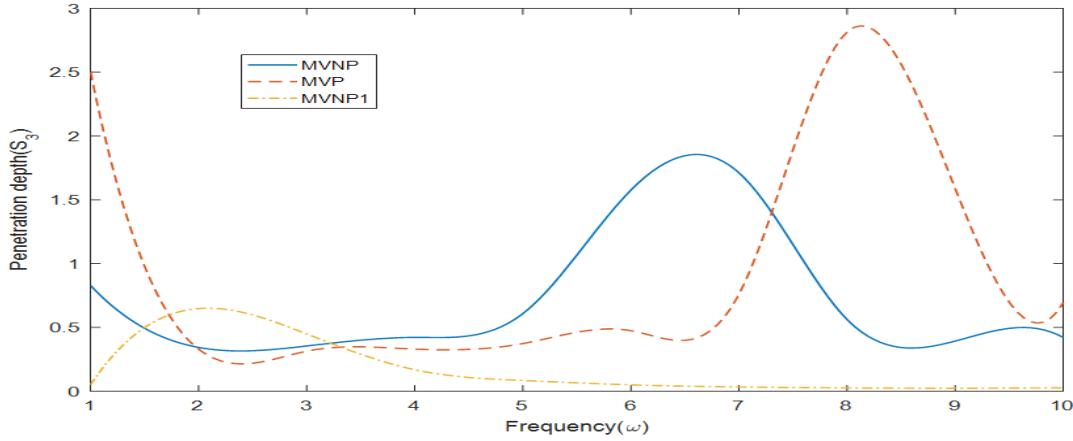
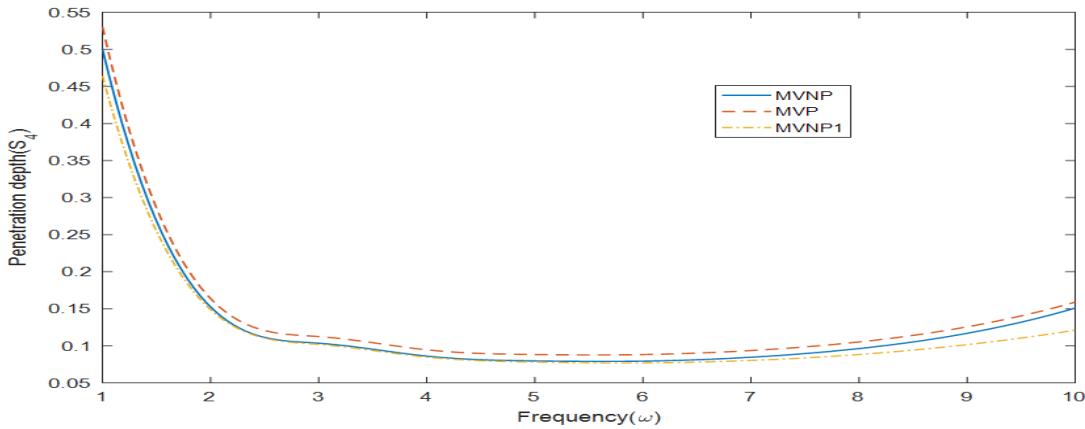
Для нахождения значений фазовой скорости, коэффициента поглощения, специфической потери и глубины проникновения плоских волн было использовано программное обеспечение Matlab 7.10.4. На всех приведенных нами рисунках MVNP обозначает ТДММН с учетом нелокальности, пустот и фазовых запаздываний, MVP — ТДММН с учетом пустот и фазовых запаздываний, а MVNP1 — ТДММН с учетом нелокальности, пустот и изменяющихся фазовых запаздываний.

Фазовая скорость. На рис. 1 можно заметить, что при малых значениях частоты фазовая скорость V_1 в MVNP1 остается меньше в сравнении с MVNP, однако с ростом частоты наблюдается обратное поведение, при этом величина V_1 растет с ростом частоты. На рис. 2 видно, что нелокальность влияет на рост величины V_2 , если сравнивать MVNP и MVNP1, а характер увеличения фазового запаздывания V_2 остается схожим при различных величинах. На рис. 3 видно, что поведение и изменение V_3 схожи для всех значений частот, хотя влияние фазового запаздывания увеличивает величину V_3 . На рис. 4 видно, что величина

Рис. 9. Изменение глубины проникновения S_1 в зависимости от частотыРис. 10. Изменение глубины проникновения S_2 в зависимости от частоты

V_4 убывает во всех случаях с ростом частоты. Эффект нелокальности сначала увеличивает величину V_4 , затем она убывает в промежуточных значениях и снова начинает расти с ростом частоты.

Коэффициент поглощения. На рис. 5 и 6 видно, что величина Q_1 при увеличении частоты остается ниже ввиду эффекта нелокальности, если сравнивать MVNP с MVP, тогда как величина Q_2 остается выше при сравнении MVNP и MVNP1. На рис. 7 показано, что при $0 \leq \omega \leq 2$ значения Q_3 для MVNP и MVP растут, а затем убывают, когда ω достигает своего значения 7.3, а за этим значением поведение MVNP и MVP становится обратным. Также ввиду изменения фазы величина Q_2 имеет колебательный характер. На рис. 8 видно, что поведение и изменение MVNP и MVP остаются схожими. Ввиду вариации фазового запаздывания коэффициент поглощения Q_4 сначала монотонно растет, а затем монотонно убывает с увеличением ω .

Рис. 11. Изменение глубины проникновения S_3 в зависимости от частотыРис. 12. Изменение глубины проникновения S_4 в зависимости от частоты

Глубина проникновения. Рис. 9 и 10 показывают, что эффект нелокальности уменьшает амплитуду значений глубины проникновения S_1 и S_2 при всех ω . Также в случаях MVNP и MVNP1 величина S_2 ведет себя противоположно величине S_1 при всех ω . На рис. 11 и 12 видно, что значение глубины проникновения S_3 имеет колебательный характер при всех значениях ω во всех рассматриваемых случаях. Значения глубины проникновения S_4 для MVNP лежат между MVP и MVNP1 при всех значениях ω . Также эффект нелокальности влияет на величину S_4 при всех ω .

Специфическая потеря. На рис. 13 можно заметить, что значения специфической потери R_1 для MVP сначала возрастают, а потом медленно убывают при всех ω . Эта величина для MVNP1 остается ниже по сравнению с MVNP при $0 < \omega < 3.1$, а при дальнейшем росте ω наблюдается обратное поведение. На рис. 14 величина R_2 убывает медленно и равномерно по всем ω . Величина R_2 в случае MVNP остается чуть выше по сравнению с MVNP1 для небольших значений ω , а затем поведение меняется на противоположное. На рис. 15 значение специфической потери R_3 колеблется при изменении ω во всех случаях.

Рис. 16 показывает, что значение специфической потери R_4 сначала растет при небольших значениях ω , а затем убывает с ростом частоты.

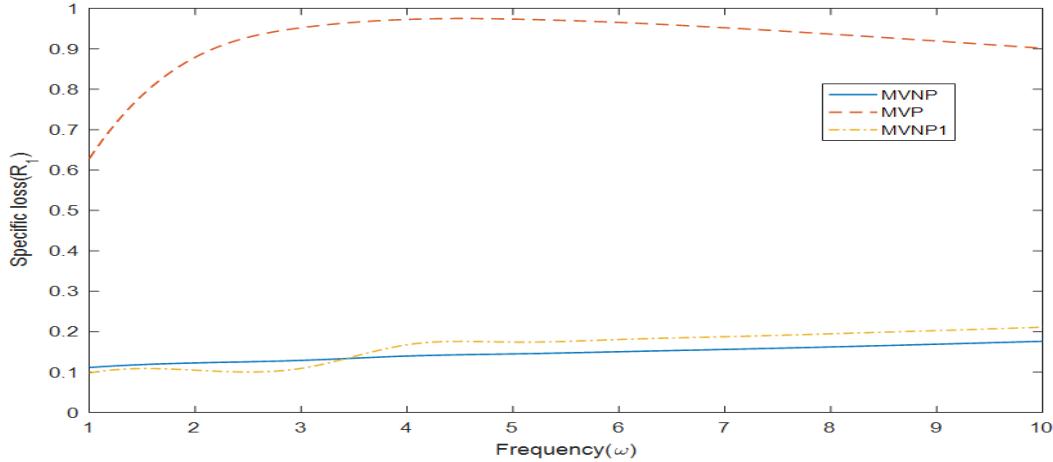


Рис. 13. Изменение специфической потери R_1 в зависимости от частоты

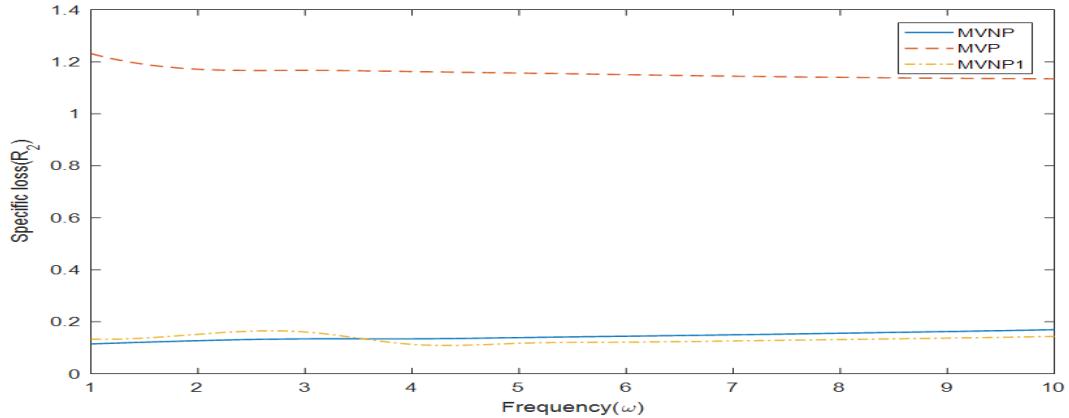
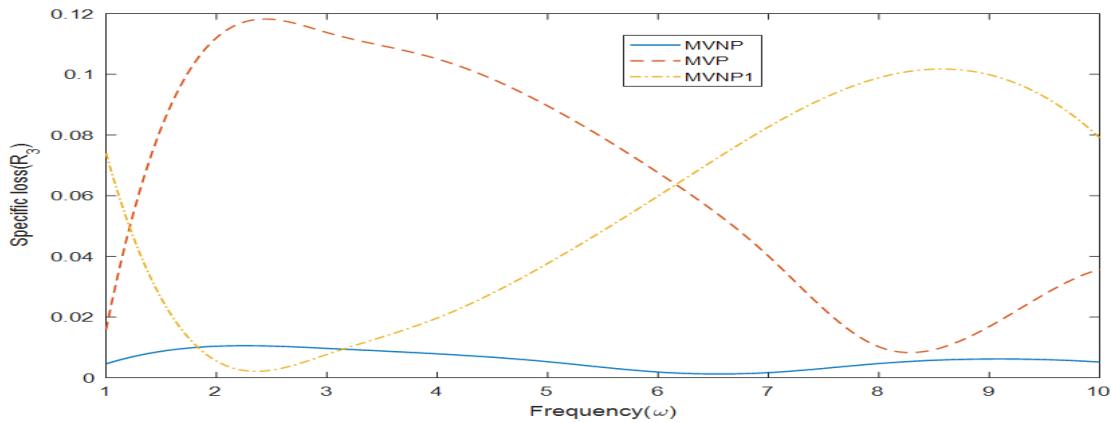
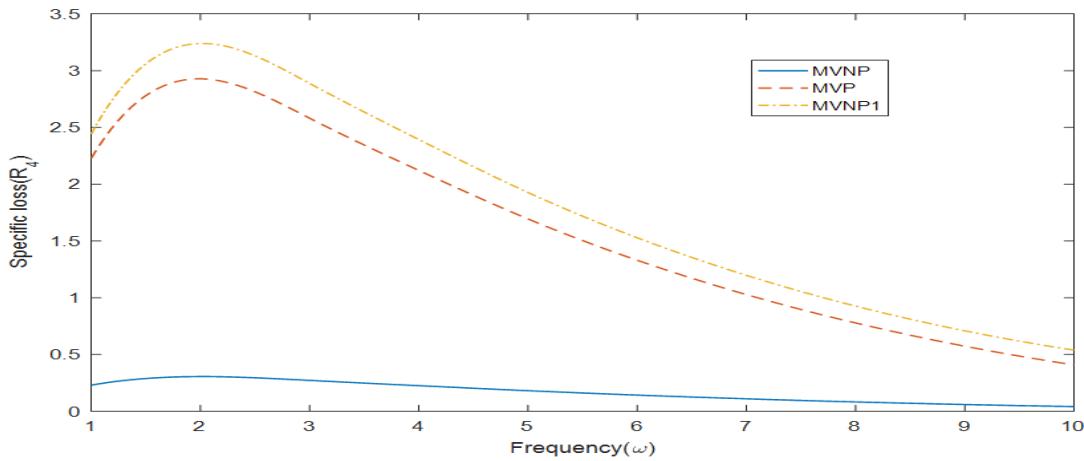


Рис. 14. Изменение специфической потери R_2 в зависимости от частоты

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье дается анализ новой математической формулировки термоупругой диффузии с учетом модифицированного моментного напряжения, нелокальности, пористости и фазовых запаздываний. В рассматриваемой модели для системы дифференциальных уравнений было построено фундаментальное решение. В случае устойчивых колебаний такие (фундаментальные) решения выражены в терминах элементарных функций, представлены их основные свойства. В той же модели изучены движения плоских волн. Для плоских волн получены и представлены графически их характеристики. На основании вышеприведенного исследования возможно:

Рис. 15. Изменение специфической потери R_3 в зависимости от частотыРис. 16. Изменение специфической потери R_4 в зависимости от частоты

- 1) для рассматриваемой модели построить поверхностный и объемный потенциалы и указать их основные свойства,
- 2) изучение 3D-краевой задачи линейной теории (ТДММН) с помощью метода потенциала (метод краевого интегрального уравнения) и схожей теории 2D-интегральных уравнений; получение явных решений краевых задач в областях специального вида (сфера, полупространство и т.д.),
- 3) установить, что эффект нелокальности уменьшает величину V_1 и увеличивает величину V_2 ; фазовое запаздывание увеличивает величину V_3 ; нелокальность и фазовые запаздывания уменьшают величину V_4 ,
- 4) установить, что поведение коэффициентов поглощения Q_1 и Q_2 является противоположным в случаях MVNP и MVP; фазовое запаздывание увеличивает величину Q_3 в ограниченной области и увеличивает величину Q_4 при всех ω ,
- 5) установить, что эффект нелокальности уменьшает величину S_1 и S_2 , тогда как фазовое запаздывание способствует уменьшению величины S_3 и S_4 ,

- 6) установить, что эффект фазового запаздывания увеличивает величину R_1 и R_2 для всех ω ; для нелокальности и фазового запаздывания колебательное поведение R_3 имеет противоположный характер; ввиду эффекта нелокальности величина R_4 лежит в области между MVNP и MVNP1.

Рассматриваемая модель обладает рядом важных параметров (нелокальность, пористость, диффузия и шесть фазовых запаздываний) и находит приложения в различных теориях нелокальных сплошных сред. Хотя исследуемая задача является теоретической, она также подводит к исследованиям в области экспериментальной механики сплошных средств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned} M_1 &= -a_6a_{25}a_{28}a_{31}, \quad M_2 = [a_{28}a_{31}(a_{25}a_{26} - a_6\omega^2 + a_4a_8) - a_6a_{25}(a_{29}a_{31} + a_{28}a_{32}) - a_6a_{27}a_{31}], \\ M_3 &= [a_{25}a_{26}(a_{29}a_{31} + a_{25}a_{29}) - a_6a_{25}(a_{29}a_{32} - a_{16}a_{20}\omega^4) - \omega^2(a_9a_{15}a_{31}a_{25} + \\ &\quad + a_{11}a_{25}a_{21}a_{28} - a_{23}a_{25}a_{28} + a_6a_{29}a_{31} + a_6a_{28}a_{32} - a_8a_{15}a_{31} - a_6a_{16}a_{30} + a_5a_8a_{21}a_{28}) - \\ &\quad - \omega^2(a_5a_6a_{20}a_{27}) + a_4a_8(a_{29}a_{31} + a_{28}a_{32}) + a_{27}a_{31}(a_4a_9 + a_{26}) + a_{30}(a_4a_{11}a_{28} + a_5a_6a_{29})], \\ M_4 &= [a_{25}a_{26}(a_{29}a_{32} - a_{16}a_{20}\omega^4) - a_6a_{25}(a_{29}a_{32} - a_{16}a_{20}\omega^4) - \omega^2(a_9a_{15}a_{32}a_{25} + a_{11}a_{25}a_{21}a_{29} - \\ &\quad - a_{26}a_{29}a_{31} - a_{26}a_{28}a_{32} + a_6a_{29}a_{32} + a_4a_9a_{16}a_{30} + a_4a_{11}a_{20}a_{27} - a_8a_{15}a_{32}) - \omega^2(a_{26}a_{16}a_{30} + \\ &\quad + a_{11}a_{21}a_{27}) + \omega^2(a_{11}a_{15}a_{30} - a_5a_8a_{21}a_{29} + a_5a_{26}a_{20}a_{27} - a_5a_9a_{27}a_{21} + a_5a_9a_{15}a_{30}) + \\ &\quad + \omega^4(a_{25}a_9a_{16}a_{21} + a_{11}a_{15}a_{20}a_{25} - a_9a_{15}a_{31} - a_{11}a_{21}a_{28}) + a_{16}\omega^4(a_4a_{20} - a_8a_{21}) + \\ &\quad + a_5a_8a_{15}a_{20}\omega^4 + a_6a_{16}a_{20}\omega^6 + a_4a_{32}(a_8a_{29} + a_9a_{27}) + a_{26}a_{27}a_{32} + a_{29}a_{30}(a_4a_{11} - a_5a_{26})], \\ M_5 &= [(a_{26}a_{29}a_{32}\omega^2 - a_{16}a_{20}a_{26}\omega^6 - a_9a_{15}a_{32}\omega^4) + \omega^6(a_9a_{16}a_{21} + a_{11}a_{15}a_{20}) - a_{11}a_{21}a_{29}\omega^4], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{25} &= \omega^2\xi_1^2 - (a_1 + a_2), \quad a_{26} = -a_7 + a_{10}i\omega + \omega^2, \quad a_{27} = -a_{15}\omega^2, \quad a_{28} = -(a_{13}\tau_v^1 + \tau_T^1), \\ a_{29} &= \tau_q^1a_{14}\omega^2, \quad a_{30} = -a_{21}\omega^2, \quad a_{31} = -a_{19}\tau_R^1 - \tau_P^1, \quad a_{32} = \omega^2\tau_\eta^1. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mindlin R.D., Tiersten H.F. *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch.Ration. Mech. Anal. **11** (1), 415–448 (1962).
- [2] Toupin R.A. *Perfectly elastic materials with couple-stresses*, Arch. Ration. Mech. Anal. **11**, 385–414 (1962).
- [3] Koiter W.T. *Couple Stresses in the Theory of Elasticity I and II*, Proc. R. Ser. B, Koninklijke Nederlandse Acad. Wetenschappen **67**, 17–44 (1964).
- [4] Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. *Couple stress based strain gradient theory for elasticity*, Int. J. Solids Struct. **39** (10), 2731–2743 (2002).
- [5] Nowacki W. *Dynamical problems of thermodiffusion in solids – I*, Bull. Polish Acad. Sci. Ser., Sci. and Technology **22**, 55–64 (1974).
- [6] Nowacki W. *Dynamical problems of thermodiffusion in solids – II*, Bull. Polish Acad. Sci. Ser., Sci. and Technology **22**, 205–211 (1974).
- [7] Nowacki W. *Dynamical problems of thermodiffusion in solids – III*, Bull. Polish Acad. Sci. Ser., Sci. and Technology **22**, 257–266 (1974).
- [8] Nowacki W. *Dynamical problems of diffusion in solids*, Engin. Fracture Mech. **8** (1), 261–266 (1976).
- [9] Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H.A. *The theory of generalized thermoelastic diffusion*, Int. J. Engin. Sci. **42** (5–6), 591–608 (2004).
- [10] Kumar R., Kansal T. *Dynamic problem of generalized thermoelastic diffusive medium*, J. Mech. Sci. and Techn. **24** (1), 337–342 (2010).
- [11] Lord H., Shulman Y. *A generalized dynamical theory of thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids **15** (5), 299–309 (1967).
- [12] Aouadi M. *A theory of thermoelastic diffusion materials with voids*, ZAMP **61** (2), 357–379 (2010).

- [13] Goodman M.A., Cowin S.C. *A continuum theory for granular materials*, Arch. Ration. Mech. Anal. **44**, 249–266 (1972).
- [14] Nunziato J.W., Cowin S.C. *A nonlinear theory of elastic materials with voids*, Arch. Ration. Mech. Anal. **72**, 175–201 (1979).
- [15] Cowin S.C., Nunziato J.W. *Linear elastic materials with voids*, J. Elast. **13**, 125–147 (1983).
- [16] Puri P., Cowin S.C. *Plane waves in linear elastic material with voids*, J. Elasticity **15** (2), 167–183 (1985).
- [17] Iesan D. *A theory of thermoelastic materials with voids*, Acta Mech. **60** (1–2), 67–89 (1986).
- [18] Eringen A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories* (Springer-Verlag, New York, 2002).
- [19] Tzou D.Y. *A Unified Field Approach for Heat Conduction from Macro- to Micro-Scales*, J. Heat Transf. **117** (1), 8–16 (1995).
- [20] Cao B.-Y., Guo Z.-Y. *Equation of motion a phonon gas and non-Fourier heat conduction*, J. Appl. Phys. **102** (5), 053503 (2007).
- [21] Tzou D.Y., Guo Z.-Y. *Nonlocal behavior in thermal lagging*, Int. J. Therm. Sci. **49** (7), 1133–1137 (2010).
- [22] Sharma S., Sharma K., Bhargava R.R. *Effect of viscosity on wave propagation in anisotropic thermoelastic with Green-Naghdi theory type-II and type-III*, Mat. Phys. Mech. **16** (2), 144–158 (2013).
- [23] Iesan D., Nappa L. *Thermal Stresses in Plane Strain of Porous Elastic Solids*, Meccanica **39** (2), 125–138 (2004).
- [24] Iesan D. *Nonlinear Plane Strain of Elastic Materials with Voids*, Math. Mech. Solid **11** (4), 361–384 (2006).
- [25] Sharma S., Sharma K., Bhargava R.R. *Wave motion and representation of fundamental solution in electro-microstretch viscoelastic solids*, Mat. Phys. Mech. **17** (2), 93–110 (2013).
- [26] Sharma S., Sharma K., Bhargava R.R. *Plane waves and fundamental solution in an electro-microstretch elastic solids*, Afr. Math. **25** (2), 483–497 (2014).
- [27] Sharma K., Kumar P. *Propagation of Plane Waves and Fundamental Solution in Thermoviscoelastic Medium with Voids*, J. Therm. Stresses **36** (2), 94–111 (2013).
- [28] Kumar R., Devi Shaloo, Sharma V. *Plane waves and fundamental solution in a modified couple stress generalized thermoelastic with mass diffusion*, Mat. Phys. Mech. **24** (1), 72–85 (2015).
- [29] Kumar R., Vohra R., Gorla M.G. *Some consideration of fundamental solution in micropolar thermoelastic materials with double porosity*, Archives of Mech. **68**, 263–284 (2016).
- [30] Biswas S. *Fundamental solution of steady oscillations in thermoelastic medium with voids*, Waves in Random and Complex Media **30** (4), 759–775 (2020).
- [31] Svanadze M. *The fundamental solution and uniqueness theorem in the theory of viscoelasticity for materials with double porosity*, Math. int. **172**, 276–292, 633–648 (2018).
- [32] Kansal T. *Fundamental solution in the theory of thermoelastic diffusion materials with double porosity*, J. Solid Mech. **11** (2), 281–296 (2019).
- [33] Kumar R., Ghangas S., Vashisth A. *Fundamental solution in the theory of thermoelastic diffusion materials with double porosity*, J. Solid Mech. **11** (2), 281–296 (2021).
- [34] Kumar R., Batra D. *Plane wave and fundamental solution in steady oscillation swelling porous thermoelastic medium*, Waves in Random and Complex Media (2022).
- [35] Kumar R. *Response of Thermoelastic Beam due to Thermal Source in Modified Couple Stress Theory*, Computational Methods Sci. and Technology **22** (2), 95–101 (2016).
- [36] Hörmander L. *Linear Partial Differential Operators* (Springer-Verlag, Berlin, 1963).
- [37] Sherif H.H., Saleh H. *A half space problem in the theory of generalised thermoelastic diffusion*, Int. J. Solids Struct. **42**, 4484–4493 (2005).

Раджниш Кумар

Университет Курукшетры,
Курукшетра, Харьяна, 136119, Индия,
e-mail: rajneesh_kuk@redifmail.com

Сачин Каушал

Школа химической инженерии и физических наук, Профессиональный университет Лавли,
Пхагвара, 144411, Индия,

e-mail: sachin_kuk@yahoo.co.in

Прагати

*Школа химической инженерии и физических наук, Профессиональный университет Лавли,
Пхагвара, 144411, Индия,*

e-mail: pragatibhardwaj7@gmail.com

R. Kumar, S. Kaushal and Pragati

**Wave analysis and representation of fundamental solution in modified couple stress
thermoelastic diffusion with voids, nonlocal and phase lags**

Abstract. In the present study, we explore a new mathematical formulation involving modified couple stress thermoelastic diffusion (MCTD) with nonlocal, voids and phase lags. The governing equations are expressed in dimensionless form for the further investigation. The desired equations are expressed in terms of elementary functions by assuming time harmonic variation of the field variables (displacement, temperature field, chemical potential and volume fraction field). The fundamental solutions are constructed for the obtained system of equations for steady oscillation, and some basic features of the solutions are established. Also, plane wave vibrations has been examined for two dimensional cases. The characteristic equation yields the attributes of waves like phase velocity, attenuation coefficients, specific loss and penetration depth which are computed numerically and presented in form of distinct graphs. Some unique cases are also deduced. The results provide the motivation for the researcher to investigate thermally conducted modified couple stress elastic material under nonlocal, porosity and phase lags impacts as a new class of applicable materials.

Keywords: modified couple stress, thermoelastic diffusion, non-local, void, phase lag, plane wave, fundamental solution, steady oscillation.

Rajneesh Kumar

*Kurukshetra University,
Kurukshetra, Haryana, 136119 India,*

e-mail: rajneesh_kuk@redifmail.com

Sachin Kaushal

*School of Chemical Engineering and Physical Sciences, Lovely Professional University,
Phagwara, 144411 India,*

e-mail: sachin_kuk@yahoo.co.in

Pragati

*School of Chemical Engineering and Physical Sciences, Lovely Professional University,
Phagwara, 144411 India,*

e-mail: pragatibhardwaj7@gmail.com