Известия вузов. Математика
2024, № 2, с. 22–36

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Ю. ГРАФ

О КВАЗИИНВАРИАНТНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ И ТЕОРЕМЕ ХЕЙМАНА-ВУ

Аннотация. Статья посвящена определению и свойствам класса диффеоморфизмов единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, для которых гармоническая мера граничных дуг круга с разрезами искажается в ограниченное число раз, т. е. является квазиинвариантной. Получены оценки производных отображений данного класса. Доказывается, что подобные отображения являются квазиконформными, а также представляют собой квазиизометрии относительно псевдогиперболической метрики. Приводится пример отображения, обладающего указанным свойством. В качестве приложения доказывается обобщение теоремы Хэймана–Ву на данный класс отображений.

Ключевые слова: гармоническая мера, квазиконформное отображение, псевдогиперболическая метрика, квазиизометрия, теорема Хэймана–Ву.

УДК: 517.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-22-36

Введение

Понятие гармонической меры было введено Ральфом Неванлинной в 1928 году [1] для плоских областей, хотя сама идея гармонической меры появилась несколько раньше в работах братьев Ф. и М. Рис, Т. Карлемана и некоторых других математиков.

Рассмотрим ограниченную конечносвязную область $D \subset \mathbb{C}$ и непрерывную функцию φ на ее границе ∂D. Пусть u_φ — единственное решение (см, например, [2], [3]) задачи Дирихле в D с граничными значениями $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$.

Если E — открытое подмножество ∂D, то ***гармонической мерой*** E относительно точки $z \in D$ называется значение гармонической в D функции ω такой, что

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u_\varphi(z) : \ \varphi \in C(\partial D), \ 0 \le \varphi(\zeta) \le \chi_E(\zeta) \text{ для всех } \zeta \in \partial D\},$$

где χ_E является характеристической функцией множества E. Для произвольного подмножества $E \subset \partial D$ гармоническая мера $\omega(z, E, D)$ определяется равенством

$$\omega(z, E, D) = \inf\{\omega(z, U, D) : \ U \text{ открыто в } \partial D, U \supset E\}.$$

В данной работе мы ограничимся случаем, когда множество $E \subset \partial D$ представляет собой открытую или замкнутую жорданову дугу. Для дуг E определение гармонической меры может быть сформулировано в более простой форме: пусть D — ограниченная конечносвязная жорданова область и открытая дуга $E \subset \partial D$. Пусть $z \in D$. *Гармоническая мера* $\omega(z, E, D)$ представляет собой единственное ограниченное решение обобщенной задачи Дирихле в области D такое, что $\omega(z, E, D) \to 0$ при $z \in D$, $z \to \zeta \in \partial D \setminus \overline{E}$, и $\omega(z, E, D) \to 1$

Поступила в редакцию 27.01.2023, после доработки 27.01.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

при $z \in D$, $z \to \zeta \in \operatorname{int}(E)$, где $\overline{E}$ и $\operatorname{int}(E)$ — соответственно замыкание и внутренняя часть дуги E относительно ∂D. Гармонические меры открытой жордановой дуги и ее замыкания совпадают.

В частности, гармоническая мера дуги $E = \{z = e^{it} : \alpha < t < \beta\}$ относительно точки z в круге $\mathbb{D}$ выражается интегралом Пуассона

$$\omega(z, E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt.$$

Геометрически $\omega(0, E, \mathbb{D})$ представляет собой угловую меру дуги E, деленную на 2π.

Гармоническая мера в случае нежордановых односвязных областей (например, областей с разрезами) определяется с помощью конформных отображений таких областей на круг или полуплоскость.

Понятие гармонической меры является полезным во многих областях математики (теория аналитических функций, геометрическая теория функций, теория пространств Харди, потенциальная теория) и математической физики (например, существует тесная связь между гармонической мерой и броуновским движением). Подробнее со свойствами гармонической меры и ее приложениями можно познакомиться в монографиях [2]–[4].

Значимая роль гармонической меры в различных математических вопросах привлекает внимание к задаче оценки величины $\omega(z, E, D)$ с помощью различных геометрических характеристик области D и множества E. Среди наиболее известных результатов в этом направлении следует назвать теоремы Бёрлинга о проекции и о толчке (shove theorem), а также оценки гармонической меры с помощью метода экстремальных длин [3]–[6].

Следующий результат, принадлежащий Бёрлингу и известный как теорема о проекции, потребуется нам далее.

Теорема A ([5], [3])**.** *Пусть множество $E \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ компактно и состоит из конечного числа жордановых дуг. Пусть $E^* = \{|z| : z \in E\}$ — круговая проекция множества E на положительный луч действительной оси. Тогда для любого $z \in \mathbb{D} \setminus E$ справедлива оценка*

$$\omega(z, E, \mathbb{D} \setminus E) \geq \omega(-|z|, E^*, \mathbb{D} \setminus E^*).$$

Одним из ключевых свойств гармонической меры $\omega(z, E, D)$ является ее конформная инвариантность. А именно, $\omega(z, E, D) = \omega(f(z), f(E), f(D))$ для любого конформного отображения f области D на область $f(D)$. Очевидно, что это свойство нарушается в случае, когда отображение f не является конформным.

Характер искажения гармонической меры для однолистных отображений общего вида может быть достаточно сложным. При потере конформности величина $\omega(z, E, D)$ может искажаться в неограниченное число раз. Оценкам деформаций гармонической меры при квазиконформных и локально квазиконформных отображений посвящены, в частности, работы [7], [8].

Напомним, что однолистный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f является квазиконформным в области D, если его первая лаврентьевская характеристика

$$p_f(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|}$$

равномерно ограничена в D. В этом случае величина $K_f := \sup_{z \in D} p_f(z) < \infty$ называется коэффициентом квазиконформности, а само отображение f называют также K_f-квазиконформным. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f конформен в том и только том случае, когда он квазиконформен и $K_f = 1$. Свойствам квазиконформных и локально квазиконформных отображений посвящено значительное число работ (см., например, [9]–[12]).

В настоящей работе определяется класс отображений, обладающих свойством ограниченной деформации (квазиинвариантности) гармонической меры, изучаются его свойства и доказывается аналог теоремы Хэймана–Ву для функций данного класса.

1. Отображения со свойством квазиинвариантности гармонической меры

Далее мы ограничимся рассмотрением сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов единичного круга $\mathbb{D}$ на односвязные собственные подобласти плоскости $\mathbb{C}$, хотя применяемый подход может быть распространен на гомеоморфизмы, дифференцируемые в обобщенном смысле.

Определение 1. Будем говорить, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f единичного круга $\mathbb{D}$ на себя, $f(0) = 0$, продолжимый до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на себя, обладает свойством *квазиинвариантности* (или ограниченной деформации) *гармонической меры*, если существует число $C \geq 1$ такое, что для любого радиального отрезка $\gamma = \{\zeta = \rho e^{i\alpha} : r \leq \rho \leq 1\}$, $r \in (0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и для любой открытой дуги $E \subset \mathbb{T} \setminus \{e^{i\alpha}\}$ неравенства

$$\begin{aligned} &\omega(f(z), f(E), \mathbb{D} \setminus f(\gamma)) \geq \frac{1}{C}\, \omega(z, E, \mathbb{D} \setminus \gamma), \\ &\omega(f(z), E, \mathbb{D} \setminus \gamma) \leq C\, \omega(z, f^{-1}(E), \mathbb{D} \setminus f^{-1}(\gamma)) \end{aligned} \tag{1}$$

выполняются при всех $z \in \mathbb{D} \setminus \gamma$ и $z \in \mathbb{D} \setminus f^{-1}(\gamma)$ соответственно.

В частности, при отсутствии радиального разреза γ неравенства (1) означают ограниченное искажение гармонической меры дуг окружности $\mathbb{T}$ относительно точек единичного круга при отображении f. Очевидно также, что если диффеоморфизм f обладает свойством квазиинвариантности гармонической меры, то обратное отображение f^{-1} также обладает этим свойством.

Данное выше определение может быть распространено на случай, когда $f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{D}$.

Определение 2. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f единичного круга $\mathbb{D}$ на область $D \neq \mathbb{C}$, продолжимый до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на замыкание области D в смысле простых концов Каратеодори (см., например, [2]), будем называть обладающим свойством *квазиинвариантности гармонической меры*, если таким свойством обладает отображение $\hat{f} = \Phi \circ f$, где Φ — конформное однолистное отображение области D на круг $\mathbb{D}$, $\Phi(f(0)) = 0$, т. е. если неравенства (1) выполнены для отображения $\hat{f}$.

Очевидно, что всякое однолистное конформное отображение f единичного круга обладает свойством ограниченной деформации гармонической меры с константой $C = 1$.

Заметим также, что свойство (1) является локальным в следующем смысле: если неравенства (1) выполняются для любых достаточно малых дуг E при всех $r \in (0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и $z \in \mathbb{D}$, то оценки (1) справедливы для любых допустимых дуг E.

Этот результат следует непосредственно из аддитивности гармонической меры, т. е. из равенства

$$\omega(z, E_1 \cup E_2, \mathbb{D} \setminus \gamma) = \omega(z, E_1, \mathbb{D} \setminus \gamma) + \omega(z, E_2, \mathbb{D} \setminus \gamma)$$

при условии $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Действительно, сумма в правой части представляет собой гармоническую функцию, в силу принципа максимума принимающую значения в интервале $(0, 1)$ и стремящуюся к 1 и 0 при стремлении z к внутренним точкам дуги $\overline{E_1 \cup E_2}$ и множества

$\partial(\mathbb{D}\setminus\gamma)\setminus\overline{E_1\cup E_2}$ соответственно. Следовательно, если неравенства (1) выполняются для дуг E_1, E_2, то они будут верны и для $E_1\cup E_2$.

Следующие теоремы описывают некоторые свойства отображений со свойством ограниченной деформации гармонической меры.

Теорема 1. *Пусть диффеоморфизм f единичного круга $\mathbb{D}$ на область D обладает свойством квазиинвариантности гармонической меры. Тогда для любого $z\in\mathbb{D}$*

$$|\hat f_z(z)|+|\hat f_{\overline{z}}(z)|\le C^2\,\frac{1-|\hat f(z)|^2}{1-|z|^2},\quad |\hat f_z(z)|-|\hat f_{\overline{z}}(z)|\ge \frac{1}{C^2}\,\frac{1-|\hat f(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{2}$$

В частности, отображение f является C^4-квазиконформным в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим конформное однолистное отображение Φ области D на круг $\mathbb{D}$, $\Phi(f(0))=0$, и определим функцию $\hat f=\Phi\circ f$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм единичного круга $\mathbb{D}$ на себя, $\hat f(0)=0$.

1. Во-первых, докажем справедливость неравенств (2) в точке $z=0$.

Зафиксируем произвольное малое $r>0$. Без ограничения общности можно считать, что $\hat f(r)=\max_{|z|=r}|\hat f(z)|>0$. Отображение $\hat f$ дифференцируемо в начале координат, и в силу сделанного допущения максимум модуля его производной по направлению $\dfrac{\partial \hat f}{\partial l}(0)$ достигается в направлении действительной оси, так что $\left|\dfrac{\partial\hat f}{\partial r}(0)\right|=|\hat f_z(0)|+|\hat f_{\overline{z}}(0)|$.

Рассмотрим далее радиальный отрезок $\hat\sigma=[\hat f(r),1]$, соединяющий точку $\hat f(r)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$. Пусть $\sigma=\hat f^{-1}(\hat\sigma)$. В качестве граничной дуги рассмотрим $E=\mathbb{T}\setminus\{1\}$.

Тогда в силу условия квазиинвариантности (1) гармонической меры при отображении $\hat f$ получим

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\{1\},\mathbb{D}\setminus\hat\sigma)\le C\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma). \tag{3}$$

Значение $\omega(0,\mathbb{T}\setminus\{1\},\mathbb{D}\setminus\hat\sigma)=\omega(0,\mathbb{T}\setminus\{1\},\mathbb{D}\setminus[f(r),1])$ может быть вычислено с помощью конформной инвариантности гармонической меры.

Пусть $R>0$ достаточно мало. Конформное однолистное отображение Ψ круга с разрезом $\mathbb{D}\setminus[R,1]$ на единичный круг $\mathbb{D}$ представимо в виде композиции $\Psi=\Psi_3\circ\Psi_2\circ\Psi_1$ трех конформных отображений:

$$\Psi_1(z)=\frac12\left(z+\frac1z\right),\ \Psi_2(z)=\frac{z-(A-1)/2}{(A+1)/2}\ \left(\text{где } A=\Psi_1(R)=\frac12\left(R+\frac1R\right)>1\right),$$
$$\text{и }\ \Psi_3(z)=z+\sqrt{z^2-1}\ (\text{использована ветвь корня, для которой } \sqrt{1}=-1).$$

Непосредственно проверяется, что $\Psi(0)=0$ и разрез $[R,1]$ при отображении Ψ переходит в дугу единичной окружности $\mathbb{T}$ с концевыми точками $e^{\pm i\alpha(R)}$, причем

$$\Psi_1(1)=1,\ \Psi_2(1)=\frac{3-A}{1+A}=:B\ (B<0\ \text{ для достаточно малых } R>0),$$
$$e^{\pm i\alpha(R)}=\Psi_3(B)=\frac{6R-R^2-1\pm 4i\sqrt{R}(1-R)}{(1+R)^2}=e^{\pm i\left(\pi-\arctan\frac{4\sqrt{R}(1-R)}{R^2-6R+1}\right)}.$$

Следовательно, гармоническая мера дуги $\mathbb{T}\setminus\{1\}$ относительно круга с разрезом $\mathbb{D}\setminus[R,1]$ для малых положительных R имеет вид

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\{1\},\mathbb{D}\setminus[R,1]) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{4\sqrt{R}(1-R)}{R^2-6R+1}. \tag{4}$$

Полагая $R=\hat{f}(r)$, из (3), (4) получаем

$$\frac{1}{\pi}\arctan\frac{4\sqrt{\hat{f}(r)}(1-\hat{f}(r))}{\hat{f}(r)^2-6\hat{f}(r)+1} \le C\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma) \tag{5}$$

для малых $r>0$.

С другой стороны, при $r\to 0+$ дуга σ расположена вне круга $\{|z|<r\}$ в силу сделанных выше допущений о $\hat{f}(r)$ и $\hat{\sigma}$. Следовательно, круговая проекция σ^* дуги σ совпадает с отрезком $[r,1]$.

Рассмотрим гармоническую ограниченную функцию $h(z)=\omega(z,\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)+\omega(z,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)$ в области $\mathbb{D}\setminus\sigma$. Предельные значения $h(z)$ равны единице при z, стремящихся к внутренним точкам дуги σ, поскольку $\omega(z,\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)\to 1$ и $\omega(z,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)\to 0$ в этой ситуации. Аналогично можно видеть, что $h(z)$ также имеет предельные значения, равные единице, когда z стремится к дуге $\mathbb{T}\setminus\sigma$. Следовательно, ограниченная гармоническая функция h равна единице на $\partial(\mathbb{D}\setminus\sigma)$ за исключением быть может одной точки $\mathbb{T}\cap\sigma$. В силу единственности ограниченного решения обобщенной задачи Дирихле (см., например, [2], [3]) $h(z)\equiv 1$ и

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)=1-\omega(0,\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma).$$

Те же аргументы приводят к равенству

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma^*,\mathbb{D}\setminus\sigma^*)=1-\omega(0,\sigma^*,\mathbb{D}\setminus\sigma^*).$$

В силу теоремы Бёрлинга о проекции (теоремы А) приходим к неравенству

$$\omega(0,\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)\ge\omega(0,\sigma^*,\mathbb{D}\setminus\sigma*).$$

Следовательно,

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)\le\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma^*,\mathbb{D}\setminus\sigma^*).$$

Отсюда, применяя равенство (4) к области $\mathbb{D}\setminus\sigma^*=\mathbb{D}\setminus[r,1]$, получаем оценку

$$\omega(0,\mathbb{T}\setminus\sigma,\mathbb{D}\setminus\sigma)\le\frac{1}{\pi}\arctan\frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2-6r+1}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (5), приходим к соотношению

$$\frac{1}{\pi}\arctan\frac{4\sqrt{\hat{f}(r)}(1-\hat{f}(r))}{\hat{f}(r)^2-6\hat{f}(r)+1}\le C\frac{1}{\pi}\arctan\frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2-6r+1} \tag{6}$$

для достаточно малых $r>0$.

Применение стандартной асимптотической формулы $\arctan x = x+o(x)$ при $x\to 0$ приводит к равенству

$$\arctan\frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2-6r+1}=\frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2-6r+1}+o\left(\frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2-6r+1}\right)=4\sqrt{r}+o(\sqrt{r}).$$

Используя данную асимптотику в обеих частях неравенства (6), получаем оценку

$$4\sqrt{\hat{f}(r)}\,(1+o(1))\le 4C\sqrt{r}\,(1+o(1))$$

при $r \to 0$. Возводя обе части последнего выражения в квадрат, имеем

$$\frac{\hat{f}(r)}{r} \leq C^2 \left(1 + o(1)\right).$$

Наконец, переходя к пределу при $r \to 0$, приходим к неравенству

$$|\hat{f}_z(0)| + |\hat{f}_{\overline{z}}(0)| = \left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(0)\right| \leq C^2.$$

Верхняя оценка в (2) доказана в точке $z = 0$.

Для доказательства нижней оценки используем схожие построения и первое из неравенств (1). Рассмотрим отрезок $\sigma = [r, 1]$, полагая без ограничения общности, что $|\hat{f}(r)| = \min_{|z|=r} |\hat{f}(z)|$ и, следовательно, $\left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(0)\right| = |\hat{f}_z(0)| - |\hat{f}_{\overline{z}}(0)|$ при $r \to 0+$. В этом случае $\hat{\sigma} = \hat{f}(\sigma)$ представляет собой дугу, соединяющую точку $\hat{f}(r)$ с окружностью $\mathbb{T}$, более того, $\hat{\sigma}$ лежит вне круга $\{|z| < |\hat{f}(r)|\}$. Следовательно, круговая проекция дуги $\hat{\sigma}$ совпадает с радиальным отрезком $\hat{\sigma}^* = [|\hat{f}(r)|, 1]$.

Далее, используя (1) и незначительно меняя выкладки предыдущей части доказательства, получаем неравенства

$$\frac{1}{C}\omega(0, \mathbb{T} \setminus \{1\}, \mathbb{D} \setminus \sigma) \leq \omega(0, \mathbb{T} \setminus \hat{\sigma}, \mathbb{D} \setminus \hat{\sigma}) \leq \omega(0, \mathbb{T} \setminus \{1\}, \mathbb{D} \setminus \hat{\sigma}^*). \tag{7}$$

Затем, применяя равенство (4) к кругам с разрезами $\mathbb{D} \setminus \sigma = \mathbb{D} \setminus [r, 1]$ и $\mathbb{D} \setminus \hat{\sigma}^* = \mathbb{D} \setminus [|f(r)|, 1]$, из неравенства (7) находим, что

$$\frac{1}{C}\frac{1}{\pi} \arctan \frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2 - 6r + 1} \leq \frac{1}{\pi} \arctan \frac{4\sqrt{|\hat{f}(r)|}(1 - |\hat{f}(r)|)}{|\hat{f}(r)|^2 - 6|\hat{f}(r)| + 1}.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $r \to 0+$ и используя асимптотическую формулу $\arctan \frac{4\sqrt{r}(1-r)}{r^2 - 6r + 1} = 4\sqrt{r}(1 + o(1))$, как и в предыдущей части доказательства приходим к требуемой оценке

$$|\hat{f}_z(0)| - |\hat{f}_{\overline{z}}(0)| = \left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(0)\right| \geq \frac{1}{C^2}.$$

2. Для доказательства неравенств (2) в общем случае рассмотрим произвольную точку $z_0 \in \mathbb{D}$, $\arg z_0 = \theta$, и определим конформные отображения

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta + z_0}{1 + \overline{z_0}\zeta}, \quad \psi(w) = \frac{w - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}w} \tag{8}$$

единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. Заметим при этом, что радиальные отрезки вида $[re^{i\theta}, e^{i\theta}]$ при отображении φ переходят в отрезки, расположенные на том же радиусе единичного круга, что и точка z_0. Аналогично, если $\arg f(z_0) = \Theta$, радиальные отрезки, расположенные на том же радиусе круга, что и точка $f(z_0)$, при отображении ψ переходят в радиальные отрезки вида $\left[re^{i\Theta}, e^{i\Theta}\right]$.

Пусть отображение $\hat{f}$ определено как и ранее и обладает свойством ограниченной деформации гармонической меры (1). Тогда композиция $\tilde{f}(\zeta) = \psi \circ \hat{f} \circ \varphi(\zeta)$, $\tilde{f}(0) = 0$, является диффеоморфизмом единичного круга $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет неравенствам (1) в начале координат в силу сделанных выше замечаний об образах радиальных отрезков при отображениях φ, ψ и инвариантности гармонической меры при конформных отображениях. Следовательно, к функции $\tilde{f}$ применимы полученные в первой части доказательства оценки производных:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_\zeta(0)| - |\tilde{f}_{\overline{\zeta}}(0)| &\geq \frac{1}{C^2}, \\ |\tilde{f}_\zeta(0)| + |\tilde{f}_{\overline{\zeta}}(0)| &\leq C^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\psi'(\hat{f}(z_0)) = \frac{1}{1 - |\hat{f}(z_0)|^2}, \quad \varphi'(0) = 1 - |z_0|^2,$$

и, как следствие,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\zeta(0) &= \psi'(\hat{f}(z_0)) \cdot \hat{f}_z(z_0) \cdot \varphi'(0) = \hat{f}_z(z_0) \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |\hat{f}(z_0)|^2}, \\ \tilde{f}_{\overline{\zeta}}(0) &= \psi'(\hat{f}(z_0)) \cdot \hat{f}_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{\varphi'(0)} = \hat{f}_{\overline{z}}(z_0) \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |\hat{f}(z_0)|^2}. \end{aligned}$$

Значит, справедливость неравенств (2) в точке z_0 вытекает из оценок (9).

3. Квазиконформность отображений $\hat{f}$ и f является следствием неравенств (2). Действительно, функция $\hat{f}$ представляет собой диффеоморфизмом единичного круга на себя. Характеристика Лаврентьева $p_{\hat{f}}$ в силу (2) ограничена сверху при всех $z \in \mathbb{D}$:

$$p_{\hat{f}}(z) = \frac{|\hat{f}_z(z)| + |\hat{f}_{\overline{z}}(z)|}{|\hat{f}_z(z)| - |\hat{f}_{\overline{z}}(z)|} \leq C^4.$$

Таким образом, отображение $\hat{f}$ C^4-квазиконформно. Функция f, отличающаяся от $\hat{f}$ конформным отображением Φ^{-1}, имеет тот же коэффициент квазиконформности C^4. $\square$

Напомним, что *псевдогиперболическая метрика* в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется по формуле

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| = \tanh d(z_1, z_2),$$

где $d(z_1, z_2)$ — гиперболическое расстояние между точками z_1 и z_2 в $\mathbb{D}$. Если D — произвольная односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, псевдогиперболическое расстояние в D определяется равенством

$$\rho_D(w_1, w_2) = \rho_{\mathbb{D}}(\Phi(w_1), \Phi(w_2)),$$

где Φ — однолистное конформное отображение области D на единичный круг $\mathbb{D}$. Например, псевдогиперболическое расстояние в правой полуплоскости $\mathbb{H}_R = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ имеет вид

$$\rho_{\mathbb{H}_R}(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 + \overline{z_2}} \right|.$$

Очевидно, что величина $\rho_D(w_1, w_2)$ является конформным инвариантом, т.е. не меняется при однолистных конформных отображениях области D. Более детально свойства гиперболической метрики $d(z_1, z_2)$ и псевдогиперболической метрики $\rho_D(w_1, w_2)$ изложены, например, в [3], [10].

Напомним также, что однолистное отображение f круга $\mathbb{D}$ на область D называется Q-квазиизометрией относительно метрики ρ, если существует константа $Q \geq 1$ такая, что

$$\frac{1}{Q}\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leq \rho_D(f(z_1), f(z_2)) \leq Q\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$$

для любой пары точек $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Теорема 2. *Пусть отображение f обладает свойством квазиинвариантности гармонической меры. Тогда f является C^2-квазиизометрией относительно псевдогиперболических метрик $\rho_{\mathbb{D}}$ и ρ_D в единичном круге и области $D = f(\mathbb{D})$ соответственно, т. е.*

$$\frac{1}{C^2}\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leq \rho_D(f(z_1), f(z_2)) \leq C^2\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \tag{10}$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Доказательство. В силу определения псевдогиперболической метрики в области D достаточно доказать, что отображение $\hat{f} = \Phi \circ f$, $\hat{f}(0) = 0$, где функция Φ определена как в теореме 1, является C^2-квазиизометрией круга $\mathbb{D}$ на себя.

Во-первых, установим, что отображение $\hat{f}$ является локальной квазиизометрией относительно псевдогиперболической метрики $\rho_{\mathbb{D}}$ в следующем смысле: для произвольной точки $z_0 \in \mathbb{D}$ и любого малого значения $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\frac{1-\varepsilon}{C^2}\rho_{\mathbb{D}}(z_0, z) \leq \rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(z_0), \quad \hat{f}(z)) \leq (1+\varepsilon)C^2\rho_{\mathbb{D}}(z_0, z), \tag{11}$$

если $|z - z_0| < \delta,\ z \in \mathbb{D}$.

Начнем со случая $z_0 = 0$. Тогда для точек z, достаточно близких к нулю, можно применить асимптотическую формулу

$$\hat{f}(z) = \hat{f}_z(0)z + \hat{f}_{\overline{z}}(0)\overline{z} + o(z).$$

Неравенства (2) позволяют нам в этом случае получить двусторонние оценки $|\hat{f}(z)|$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^2}|z|(1+o(1)) &\leq (|\hat{f}_z(0)| - |\hat{f}_{\overline{z}}(0)|)|z|(1+o(1)) \leq |\hat{f}(z)| \leq \\ &\leq (|\hat{f}_z(0)| + |\hat{f}_{\overline{z}}(0)|)|z|(1+o(1)) \leq C^2|z|(1+o(1)).\end{aligned}$$

Заметим, что в силу определения псевдогиперболического расстояния $|z| = \rho_{\mathbb{D}}(0, z)$, $|\hat{f}(z)| = \rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(0), \hat{f}(z))$. Пусть $\varepsilon > 0$ дано. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $|o(1)| < \varepsilon$ для всех $|z| < \delta$. Следовательно, неравенство (11) выполняется в окрестности начала координат.

Для доказательства неравенства (11) в общем случае рассмотрим композицию $\tilde{f}(\zeta) = \psi \circ \hat{f} \circ \varphi(\zeta)$, где конформные отображения φ, ψ определены выше равенствами (8) при произвольном фиксированном значении $z_0 \in \mathbb{D}$. Тогда $\tilde{f}(0) = 0$ и

$$\frac{1-\varepsilon}{C^2}\rho_{\mathbb{D}}(0, \zeta) \leq \rho_{\mathbb{D}}(0, \tilde{f}(\zeta)) \leq (1+\varepsilon)C^2\rho_{\mathbb{D}}(0, \zeta),$$

если $|\zeta| < \delta$. Конформная инвариантность псевдогиперболического расстояния приводит к равенствам $\rho_{\mathbb{D}}(0, \zeta) = \rho_{\mathbb{D}}(z_0, z)$, $\rho_{\mathbb{D}}(0, \tilde{f}(\zeta)) = \rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(z_0), \hat{f}(z))$, где $z = \varphi(\zeta)$. Следовательно, неравенства (11) верны в окрестности точки z_0, а именно: если $|z - z_0|/|1 - \overline{z_0}z| < \delta$ и, как следствие, для $|z - z_0| < \tilde{\delta}$. Значение $\tilde{\delta} > 0$ здесь зависит от ε и выбора точки z_0.

Для завершения доказательства теоремы 2 покажем глобальную квазиинвариантность расстояния ρ при отображении $\hat{f}$.

Рассмотрим произвольную пару точек z_1, z_2 в круге $\mathbb{D}$. Рассмотрим геодезическую $\gamma \subset \mathbb{D}$ относительно псевдогиперболической метрики, соединяющую точки z_1, z_2. Пусть кривая

$\hat{\gamma} = \hat{f}(\gamma)$ (образ геодезической γ при отображении $\hat{f}$) имеет концевые точки $\hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2$. Множество γ компактно в $\mathbb{D}$. Следовательно, γ может быть покрыто конечным числом открытых окрестностей $U_k(\zeta_k) = \{z \in \mathbb{D} : \ |z - \zeta_k| < \delta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, с центрами $\zeta_k \in \hat{\gamma}$ и радиусами $\delta_k > 0$ настолько малыми, что оценки (11) верны в $U_k(\zeta_k)$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Точки ζ_k, безусловно, можно выбрать так, чтобы $\zeta_{k+1} \in U_k(\zeta_k)$ и $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_n = z_2$.

Тогда

$$\rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(\zeta_k), \hat{f}(\zeta_{k+1})) \leq (1+\varepsilon)C^2 \rho_{\mathbb{D}}(\zeta_k, \zeta_{k+1})$$

для всех $k = 1, \ldots, n-1$. Псевдогиперболическое расстояние $\rho_{\mathbb{D}}(w_1, w_2)$ не больше, чем длина $L_\rho(\hat{\gamma})$ кривой $\hat{\gamma}$ в метрике $\rho_{\mathbb{D}}$. В свою очередь, эта длина может быть приближена с произвольной точностью ε_1 длиной ломаной, составленной из геодезических отрезков с вершинами $\hat{f}(\zeta_k)$, $k = 1, \ldots, n$, при соответствующем выборе числа n вершин ломаной. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \rho_{\mathbb{D}}(\zeta_k, \zeta_{k+1}) = L_\rho(\gamma) = \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$, поскольку кривая γ является геодезической в метрике $\rho_{\mathbb{D}}$.

Таким образом, мы приходим к цепочке оценок

$$\rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(z_1), \hat{f}(z_2)) \leq L_\rho(\hat{\gamma}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(\zeta_k), \hat{f}(\zeta_{k+1})) + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq C^2(1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\mathbb{D}}(\zeta_k, \zeta_{k+1}) + \varepsilon_1 = C^2(1+\varepsilon)\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \varepsilon_1.$$

В силу произвола в выборе ε, ε_1 справедливость верхней оценки в (10) следует из полученных неравенств.

Для доказательства нижней оценки в (10) применим аналогичные рассуждения, выбрав геодезическую $\hat{\gamma}$, соединяющую точки $\hat{f}(z_1)$, $\hat{f}(z_2)$, ее прообраз $\gamma = \hat{f}^{-1}(\hat{\gamma})$, и используем первое из неравенств (11) для оценки сверху расстояния

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leq L_\rho(\gamma) \leq C^2(1-\varepsilon)^{-1} \rho_{\mathbb{D}}(\hat{f}(z_1), \hat{f}(z_2)) + \varepsilon_1.$$

Требуемая оценка следует отсюда в силу произвола в выборе ε, ε_1. □

2. Пример

В качестве примера отображений, обладающих свойством квазиинвариантности гармонической меры, приведем автоморфизмы единичного круга вида

$$f(z) = \rho(|z|)e^{i \arg z},$$

где функция $\rho(r)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[0, 1]$, $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$, и $0 < \min \rho'(r), \ \max \rho'(r) < \infty$. В частности, таким условиям удовлетворяет функция $\rho(r) = (e^r - 1)/(e - 1)$.

Соответствующее отображение $f(z) = (e^{|z|} - 1)/(e - 1)\, e^{i \arg z}$ представляет собой квазиконформный автоморфизм единичного круга с коэффициентом квазиконформности $K_f = e/(e-1)$. Отображение f определено в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ и переводит радиусы единичного круга в себя.

Покажем, что f обладает свойством ограниченной деформации гармонической меры (1). В силу геометрических свойств отображения f для этого достаточно оценить сверху и снизу гармоническую меру $\omega(f(z), E, \mathbb{D} \setminus f(\gamma))$ дуг $E \subset \mathbb{T}$ для радиальных разрезов γ.

В силу приведенного выше свойства локальности будем оценивать искажение гармонической меры малых дуг E окружности $\mathbb{T}$ при отображениях круга $\mathbb{D}$ с радиальными разрезами $\gamma = [-1, -r]$, $r \in (0, 1]$, по отрицательному лучу действительной оси при отображении f.

Во-первых, рассмотрим случай, когда разрез γ отсутствует, т. е. $r = 1$. Рассмотрим дугу $E = \{e^{it} : |t| < \varepsilon/2\}$ малой угловой меры ε и покажем, что отношение $\omega(f(z), E, \mathbb{D})/\omega(z, E, \mathbb{D})$ отделено от нуля и ограничено при всех $z \in \mathbb{D}$. Для $z = x \in (-1, 1)$ из определения гармонической меры следует, что при малых ε

$$\omega(f(x), E, \mathbb{D})/\omega(x, E, \mathbb{D}) = \frac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{1+x}{1-x}\right)} \approx \frac{(1+f(x))(1-x)}{(1-f(x))(1+x)} = \frac{\left(1+\dfrac{e^x-1}{e-1}\right)(1-x)}{\left(1-\dfrac{e^x-1}{e-1}\right)(1+x)}.$$

Последнее отношение монотонно убывает по $x \in (-1, 1)$ и стремится к $(e-1)/e$ при $x \to 1$. Таким образом,

$$\omega(f(x), E, \mathbb{D})/\omega(x, E, \mathbb{D}) \geq \frac{e-1}{e} \approx 0.63.$$

Аналогично показывается, что

$$\omega(f(x), E, \mathbb{D})/\omega(x, E, \mathbb{D}) \leq \frac{e}{e-1} \approx 1.58.$$

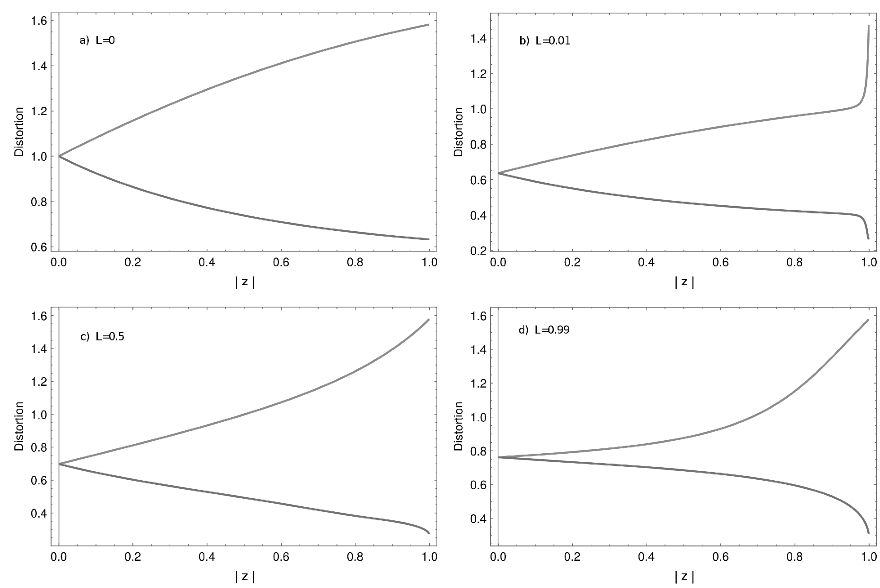

Рис. 1. Зависимость минимума и максимума отношения $\omega(h(z), h(\hat{E}), \mathbb{D})/\omega(z, \hat{E}, \mathbb{D})$ на окружностях $|z| = c$ от радиуса окружности; дуга $E = \{e^{it}, t \in (\pi - \varepsilon, \pi)\}$, длины l разрезов равны 0, 0.01, 0.5 и 0.99 на диаграммах a)–d) соответственно

Диаграмма a) на рис. 1 демонстрирует, что данные оценки остаются в силе и для точек z, не лежащих на действительной оси.

Рассмотрим конформные отображения Φ_r, Ψ_r единичного круга $\mathbb{D}$ на область $\mathbb{D} \setminus \gamma$ и области $\mathbb{D} \setminus f(\gamma)$ на круг $\mathbb{D}$ соответственно такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, $\Phi'(0), \Psi'(0) > 0$, и

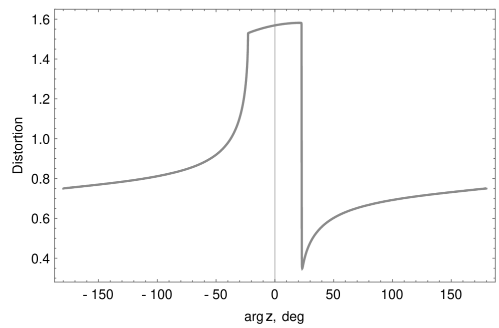

Рис. 2. Зависимость отношения $\omega(h(z), h(\hat{E}), \mathbb{D})/\omega(z, \hat{E}, \mathbb{D})$ от $\arg z$ при фиксированном $|z| = 0.9999$, длине разреза $l = 0.99$ и дуге $E = \{e^{it} : t \in (\pi - \varepsilon, \pi)\}$, где ε составляет 0.1 градуса

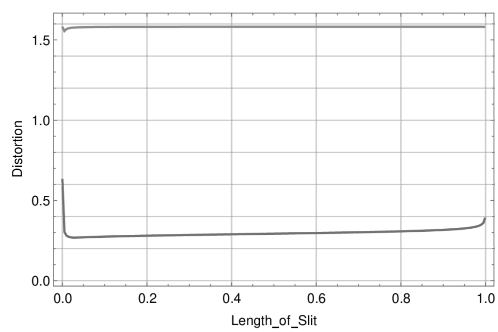

Рис. 3. Минимум и максимум отношения $\omega(h(z), h(\hat{E}), \mathbb{D})/\omega(z, \hat{E}, \mathbb{D})$ по кругу $\mathbb{D}$ в зависимости от длины разреза l. Дуга $E = \{e^{it} : t \in (\pi - \varepsilon, \pi)\}$

определим автоморфизм $h = \Psi_r \circ f \circ \Phi_r$ круга $\mathbb{D}$. В силу инвариантности свойства (1) при композициях с конформными отображениями достаточно продемонстрировать ограниченность искажения гармонической меры дуг $\hat{E} = \Phi_r^{-1}(E)$ при отображении h.

При наличии разреза $\gamma = [-1, -r]$, $r \in (0, 1)$, численные оценки с помощью пакета Wolfram Mathematica демонстрируют, что наибольшее искажение гармонической меры наблюдается для дуг $E = \{e^{it} : t \in (\pi - \varepsilon, \pi)\}$ при малых $\varepsilon > 0$ и z, близких к концевым точкам дуги E, что проиллюстрировано на рис. 2.

На рис. 1, диаграммы b)–d) приведены графики минимума и максимума отношения $\omega(h(z), h(\hat{E}), \mathbb{D})/\omega(z, \hat{E}, \mathbb{D})$ на окружностях $|z| = c$ для дуг $\hat{E} = \Phi_r^{-1}(E)$ в зависимости от значений $c \in [0, 1)$ и длин разрезов $l = 0.01$, $l = 0.5$ и $l = 0.99$. Далее предполагается, что дуга $E = \{e^{it} : t \in (\pi - \varepsilon, \pi)\}$ при $\varepsilon \approx 0.01$ градуса.

Наибольшее значение отношения $\omega(h(z), h(\hat{E}), \mathbb{D})/\omega(z, \hat{E}, \mathbb{D})$ оценивается как $e/(e-1)$ и наблюдается в том числе в случае кругов без разрезов. Наименьшее значение фиксируется при коротких разрезах γ, т. е. при положительных r, близких к единице, что иллюстрируется на рис. 3.

Из проведенного численного анализа следует, что для отображения

$$f(z) = (e^{|z|} - 1)/(e - 1)\, e^{i \arg z}$$

искажение гармонической меры ограничено и

$$0.26 < \frac{\omega(f(z), f(E), \mathbb{D} \setminus f(\gamma))}{\omega(z, E, \mathbb{D} \setminus \gamma)} < 1.6.$$

Вопрос о достаточных условиях выполнения условий (1) в общем виде остается открытым.

3. Приложение к теореме Хэймана–Ву

В заключительной секции мы применим полученные выше результаты к доказательству обобщения теоремы Хэймана–Ву. Эта хорошо известная в теории функций теорема (см., например, [3]) утверждает, что для любого конформного однолистного отображения F круга $\mathbb{D}$ на односвязную область D длина $L(\gamma)$ прообраза γ пересечения области D с произвольной прямой Γ ограничена абсолютной константой M, т. е.

$$L(F^{-1}(\Gamma \cap D)) \leq M.$$

В. Хэйман и Дж. Ву [13] доказали этот результат в 1981 г. с некоторым достаточно большим значением M. Точное значение константы M на настоящий момент остается неизвестным, но доказано, что M расположено в достаточно узком интервале $[\pi^2, 4\pi)$ (детали можно найти в работах С. Роде [14] и К. Ойма [15], [16]).

Ниже мы доказываем обобщение теоремы Хэймана–Ву на случай отображений со свойством ограниченной деформацией гармонической меры.

Теорема 3. *Пусть диффеоморфизм f обладает свойством квазиинвариантности гармонической меры и $D = f(\mathbb{D})$ — жорданова область. Тогда для любой прямой Γ*

$$L\left(f^{-1}(\Gamma \cap D)\right) \leq C^3 4\pi, \tag{12}$$

где L — евклидова длина кривой.

Доказательство следует идее и методу, использованным К. Ойма и С. Роде при получении классического варианта теоремы Хэймана–Ву [3], [14], [15]. Не претендуя на оригинальность, мы лишь несколько модифицируем оценки в необходимых местах и приводим общую схему для удобства читателя. Выкладки производятся с рядом технических упрощений, восполнить которые можно в [3].

Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma = \mathbb{R}$ и $\Gamma \cap D$ состоит из конечного или счетного числа интервалов Γ_k. Пусть $\gamma_k = f^{-1}(\Gamma_k)$. Пусть $D^{\#} = \{w : \overline{w} \in D\}$ — область, полученная зеркальным отражением D относительно действительной оси. Определим симметричные относительно действительной оси области D_k компоненты связности множества $D \cap D^{\#}$, содержащие интервалы Γ_k. Рассмотрим конформные однолистные отображения Ψ_k областей D_k на правую полуплоскость $\mathbb{H}_R$. Интервалы Γ_k при этом переходят в положительный луч действительной оси, а жордановы дуги $\partial D_k \cap \partial D$ — на положительные или отрицательные лучи мнимой оси.

Функция f продолжима до гомеоморфизма замкнутых областей. Определим гомеоморфные отображения

$$G_k(\zeta) = f^{-1}\left(\Psi_k^{-1}(|\Psi_k(f(\zeta))|)\right)$$

дуг $f^{-1}(\partial D_k \cap \partial D)$ единичной окружности $\mathbb{T}$ на дуги γ_k. Идея К. Ойма и С. Роде заключается в доказательстве ограниченности градиента функций G_k.

Фиксируя точку $\zeta \in f^{-1}(\partial D_k \cap \partial D)$, рассмотрим близкую к ней точку ζ' на той же дуге γ_k. Пусть $\omega = f(\zeta)$, $\omega' = f(\zeta')$, $x = |\Psi_k(\omega)|$, $x' = |\Psi_k(\omega')|$ и $w = \Psi_k^{-1}(x)$, $w' = \Psi_k^{-1}(x')$. Ясно, что $G_k(\zeta') = f^{-1}(w')$ стремится к $G_k(\zeta) = f^{-1}(w)$ при $\zeta' \to \zeta$.

Известная лемма Шварца (см., например, [2]) приводит к монотонности псевдогиперболического расстояния при расширении областей $\rho_{D'}(z_1, z_2) \geq \rho_D(z_1, z_2)$ для $D' \subset D$.

Тогда в силу теоремы 2 и инвариантности псевдогиперболического расстояния при конформных отображениях получаем

$$\rho_{\mathbb{D}}(G_k(\zeta), G_k(\zeta')) \leq C^2 \rho_D(w, w') \leq C^2 \rho_{D_k}(w, w') = C^2 \rho_{\mathbb{H}_R}(x, x') = C^2 \left| \frac{x - x'}{x + x'} \right|. \tag{13}$$

С другой стороны, рассмотрим кратчайшую дугу E, соединяющую точки ζ, ζ' на $\mathbb{T}$. В силу конформной инвариантности гармонической меры, ее монотонности при расширении области, следующей из принципа Линделёфа [3], [4], и того, что отображение f обладает свойством ограниченной деформации гармонической меры, приходим к оценкам

$$\omega(x, \Psi_k(f(E)), \mathbb{H}_R) = \omega(w, f(E), D_k) \leq \omega(w, f(E), D) \leq C\omega(G_k(\zeta), E, \mathbb{D}). \tag{14}$$

Далее, опуская технические детали, при $\zeta' \to \zeta$ выводим асимптотическое равенство

$$\rho_{\mathbb{D}}(G_k(\zeta), G_k(\zeta')) = \frac{|G_k(\zeta) - G_k(\zeta')|}{1 - |G_k(\zeta)|^2}(1 + o(1)). \tag{15}$$

Кроме того, гармоническая мера дуги E в единичном круге при $\zeta' \to \zeta$ может быть вычислена с помощью интеграла Пуассона

$$\omega(G_k(\zeta), E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\arg \zeta}^{\arg \zeta'} \frac{1 - |G_k(\zeta)|^2}{|e^{it} - G_k(\zeta)|^2} dt \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |G_k(\zeta)|^2}{|\zeta - G_k(\zeta)|^2} |\zeta - \zeta'|(1 + o(1)). \tag{16}$$

Аналогично, с помощью интеграла Пуассона в полуплоскости находится гармоническая мера $\omega(x, \Psi_k(f(E)), \mathbb{H}_R) = \dfrac{1}{\pi}|\Theta|$, где Θ — угол, под которым из точки x в правой полуплоскости виден интервал $(ix,\, ix')$ на мнимой оси. Поэтому

$$\omega(x, \Psi_k(f(E)), \mathbb{H}_R) = \frac{1}{\pi} \left| \operatorname{arctg} \frac{x'}{x} - \frac{\pi}{4} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{x - x'}{x + x'} \right| (1 + o(1)). \tag{17}$$

Комбинируя соотношения (13)–(17), приходим к оценкам

$$\frac{|G_k(\zeta) - G_k(\zeta')|}{1 - |G_k(\zeta)|^2}(1 + o(1)) \leq C^2 \pi \omega(x, \Psi_k(f(E)), \mathbb{H}_R)(1 + o(1)) \leq$$
$$\leq \pi C^3 \omega(G_k(\zeta), E, \mathbb{D})(1 + o(1)) = \frac{1}{2} C^3 \frac{1 - |G_k(\zeta)|^2}{|\zeta - G_k(\zeta)|^2} |\zeta - \zeta'|(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\frac{|G_k(\zeta) - G_k(\zeta')|}{|\zeta - \zeta'|} \leq \frac{1}{2} C^3 \frac{(1 - |G_k(\zeta)|^2)^2}{|\zeta - G_k(\zeta)|^2}(1 + o(1)) \leq \frac{1}{2} C^3 (1 + |G_k(\zeta)|)^2 (1 + o(1)).$$

Из полученного неравенства ясно, что функции G_k дифференцируемы, за исключением, быть может, конечного числа точек, и

$$\frac{|G_k(\zeta) - G_k(\zeta')|}{|\zeta - \zeta'|} \leq 2C^3(1 + o(1)), \quad \text{т. е.} \ |\nabla G_k(\zeta)| \leq 2C^3.$$

В итоге, длина прообраза совокупности интервалов Γ_k оценивается сверху следующим образом:

$$L(f^{-1}(\cup_k \Gamma_k)) = \sum_k \int_{f^{-1}(\partial D_k \cap \partial D)} |dG_k(\zeta)| \leq 2C^3 \int_{\mathbb{T}} |d\zeta| = 4\pi C^3.$$

$\square$

Если отображение f конформно, то константа $C = 1$ и неравенство (12) в теореме 3 принимает вид $L\left(f^{-1}(\Gamma \cap D)\right) \leq 4\pi$, как в классическом варианте теоремы Хэймана–Ву.

Литература

[1] Nevanlinna R. *Das harmonische mass von punktmengen und seine anwendung in der funktionentheorie*, in : *Comptes rendus du huitéme Congrés des mathématiciens Scandinaves*, 116–133 (Stockholm, 1934).
[2] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
[3] Garnett J.B., Marshall D.E. *Harmonic measure* (Cambridge Univ. Press, 2005).
[4] Ahlfors L.V. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory* (McGraw-Hill, New York, 1973).
[5] Beurling A. *The Collected Works of Arne Beurling. Complex analysis* (L. Carleson, et al., eds.) V. 1 (Birkhäuser, 1989).
[6] Betsakos D., Solynin A.Yu. *Extensions of Beurling's shove theorem for harmonic measure*, Complex Variables and Elliptic Equat. **42** (1), 57–65 (2000).
[7] Kelingos J. A. *Characterizations of quasiconformal mappings in terms of harmonic and hyperbolic measure*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **368**, 1–16 (1965).
[8] Graf S.Yu. *On distortion of harmonic measure under locally quasiconformal mappings*, Complex Variables and Elliptic Equat. **66** (9), 1550–1564 (2020).
[9] Ahlfors L.V. *Lectures on Quasiconformal Mappings: Second Edition* (AMS, University Lecture Ser., V. 38, 2006).
[10] Anderson G.D., Vamanamurthy M.K., Vuorinen M. *Conformal Invariants, Inequalities an Quasiconformal Maps* (Wiley, New York, 1997).
[11] Vasil'ev A. *Moduli of Families of Curves for Conformal and Quasiconformal Mappings* (Springer, Berlin; N. Y., 2002).
[12] Граф С.Ю. *Аналог леммы Шварца для локально-квазиконформных автоморфизмов круга*, Изв. вузов. Матем. (11), 87–92 (2014).
[13] Hayman W.K., Wu J.M.G. *Level sets of univalent functions*, Comment. Math. Helv. **56** (3), 366–403 (1981).
[14] Rohde S. *On the theorem of Hayman and Wu*, Proc. Amer. Math. Soc. **130**, 387–394 (2002).
[15] Øyma K. *Harmonic measure and conformal length*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (3), 687–689 (1992).
[16] Øyma K. *The Hayman–Wu Constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1), 337–338 (1993).

Сергей Юрьевич Граф

Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия;
Петрозаводский государственный университет,
пр. Ленина, д. 33, г. Петрозаводск, 185910, Россия,

e-mail: Sergey.Graf@tversu.ru

S.Yu. Graf

On quasiinvariance of harmonic measure and Hayman-Wu theorem

Abstract. The article is devoted to the definition and properties of the class of diffeomorphisms of the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ on the complex plane $\mathbb{C}$ for which the harmonic measure of the boundary arcs of the slit disk has a limited distortion, i.e. is quasiinvariant. Estimates for derivative mappings of this class are obtained. We prove that such mappings are quasiconformal and are also quasiisometries with respect to the pseudohyperbolic metric. An example of a mapping with the specified property is given. As an application, a generalization of the Hayman–Wu theorem to this class of mappings is proved.

Keywords: harmonic measure, quasiconformal mapping, pseudohyperbolic metric, quasiisometry, Hayman–Wu theorem.

Sergey Yur'evich Graf

Tver State University,
33 Zheliabova str., Tver, 170100 Russia;
Petrozavodsk State University,
33 Lenina Ave., Petrozavodsk, 185910 Russia,

`e-mail:` Sergey.Graf@tversu.ru