

О.В. ГЛАЗЫРИНА, Р.З. ДАУТОВ, Д.А. ГУБАЙДУЛЛИНА

ТОЧНОСТЬ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО ШТРАФОМ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Аннотация. Предложен и исследован численный метод на основе метода штрафа, конечных элементов и неявной схемы Эйлера для решения параболического вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором и односторонним ограничением на решение. Получены оценки точности приближенного решения в энергетической норме.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод штрафа, параболическое вариационное неравенство, неявная схема, оценка точности.

УДК: 517.63

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-2-3-21

ВВЕДЕНИЕ

0.1. В последние годы большое внимание уделяется изучению нелокальных уравнений и неравенств в частных производных различных типов. В связи с данной работой для нас интерес представляют нелокальные задачи, в которых некоторые коэффициенты уравнения довольно общим образом зависят от интеграла решения задачи по пространственным переменным. В связи с этим отметим работы [1]–[7], посвященные эллиптическим и параболическим уравнениям, а также статьи [1], [8], посвященные односторонним параболическим вариационным неравенствам. Интерес к подобным задачам связан как с моделированием разнообразных физических и биологических явлений (см., например, [1], [3], §1.2), так и с рядом интересных математических особенностей этих задач [2], [5].

В указанных выше работах основное внимание уделялось изучению вопросов существования, единственности и асимптотическому поведению решения нелокальной задачи. Значительно меньше работ посвящено вопросам их численного решения. Для рассматриваемого типа нелокальности нам известна лишь статья [9], посвященная решению параболического уравнения, и статьи [10], [11], в которых изучались явные схемы для вариационных неравенств, но оценки точности не были получены.

0.2. В данной работе мы изучаем приближенный метод решения модельного параболического вариационного неравенства вида (подробнее см. раздел 1)

$$u \in K : \quad (u' + Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (1)$$

Поступила в редакцию 31.01.2023, после доработки 31.01.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

где A — нелокальный оператор, определяемый скалярной функцией $a(s)$ по правилу

$$Au = -a(l(u))\Delta u, \quad l(v) = \int_{\Omega} v \, dx, \quad (2)$$

а множество ограничений имеет следующий вид:

$$K = \{v \in V : v(x) \geq 0, \, x \in \Omega\}. \quad (3)$$

Здесь $u' = du/dt$, Δ — оператор Лапласа, $V = H_0^1(\Omega)$.

Предлагаемый нами метод решения неравенства (1) основан на комбинации метода штрафа, метода конечных элементов (МКЭ) и неявной схемы Эйлера (метода Рунге). К несомненным достоинствам метода штрафа относится то, что он позволяет легко адаптировать методы решения нелинейных уравнений для решения вариационных неравенств.

0.3. Охарактеризуем кратко содержание статьи. Первоначально в разделе 1 мы даем эквивалентную формулировку исходной задачи в виде неравенства без ограничений вида

$$(u' + Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

где j — некоторый липшиц-непрерывный функционал. Подобная формулировка для локальных параболических неравенств с препятствием была получена ранее в [12]. Она представляет самостоятельный интерес, поскольку позволяет просто изучить регулярность решения неравенства (1), а также построить новые методы его решения.

Задача со штрафом изучается в разделе 2. Она получается после аппроксимации j в (4) дифференцируемым функционалом j_ε и сводится к решению нелинейного уравнения

$$u'_\varepsilon + Au_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = f, \quad \varepsilon > 0,$$

где $\beta_\varepsilon = j'_\varepsilon$ — равномерно по ε ограниченный оператор штрафа. Выбранный нами способ его определения позволяет не только легко, по сравнению с известными методиками, получить оценку точности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ метода штрафа, но и доказать равномерную по ε оценку точности порядка $O(h)$ метода конечных элементов для его аппроксимации. Полностью дискретная схема изучается в разделе 3. Доказывается оптимальная оценка точности схемы порядка $O(\sqrt{\varepsilon} + h + \tau)$ для достаточно гладких данных задачи. Здесь параметры h и τ характеризуют шаги сетки по пространству и времени. Все оценки получаются в энергетической норме. В заключительном разделе 4 обсуждаются вопросы численной реализации построенной схемы и приводятся результаты тестовых расчетов, подтверждающих точность теоретической оценки погрешности полностью дискретной схемы.

0.4. Основную трудность при получении оценок точности представляет недостаточная гладкость решения задачи, особенно по временной переменной. Например, если в определении оператора A в (2) функция $a(s)$ является постоянной, то известно, что даже при сколь угодно гладких данных производная $u'(t)$ может быть разрывной (см., например, [13]). В этом случае вторая производная u'' не может быть элементом пространства $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (и тем более $L_2(0, T; L_2(\Omega))$), что обычно требуется для получения оценок точности схемы Эйлера. Для преодоления этой трудности в [13] разработана специальная методика оценки точности неявной схемы Эйлера для абстрактного неравенства вида (4) в случае линейного оператора A при весьма слабых условиях на функционал j (см. также [14]). Эта методика была обобщена на случай нелинейного оператора A в [15]. Мы адаптируем результаты [15] для рассматриваемого нами дискретного аналога неравенства (4).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Пространства функций. Далее $T > 0$, Ω — ограниченная область в R^d , $d \geq 1$, с липшицевой границей $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$. Будем использовать традиционные обозначения $L_p(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ для пространств Лебега и Соболева соответственно, $p \in [1, \infty]$, $m \geq 1$. Пусть также $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Как обычно будем отождествлять H с его сопряженным H^* . В этом случае имеют место непрерывные и плотные вложения $V \subset H \subset V^*$. Через $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать как скалярное произведение в H , так и отношение двойственности между V^* и V . Норму в V и V^* определим равенствами

$$\|v\|_V = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{(f, v)}{\|v\|_V}.$$

Для банахова пространства B и измеримых функций $(0, T) \rightarrow B$ далее мы также будем иметь дело с известными банаховыми пространствами $C([0, T]; B)$, $L_p(0, T; B)$ и $H^1(0, T; B)$ (см., например, [16], с. 469). Через $E = L_{\infty}(0, T; H) \cap L_2(0, T, V)$ будем обозначать "энергетическое" пространство с нормой

$$\|v\|_E = \left(\|v\|_{L_{\infty}(0, T; H)}^2 + \|v\|_{L_2(0, T, V)}^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство функций

$$W = L_2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V^*), \quad \|v\|_W^2 = \|v\|_{L_2(0, T; V)}^2 + \|v'\|_{L_2(0, T, V^*)}^2,$$

непрерывно вложено в $C([0, T]; H)$ (см., например, [16], теорема 1, с. 473). Более того, для $v \in W$ отображение $t \rightarrow \|v(t)\|_H$ абсолютно непрерывно на $[0, T]$ и

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_H^2 = (v'(t), v(t)) \quad \text{для почти всех (п.в.) } t \in [0, T].$$

Далее нам понадобятся неравенства Гронуолла в дифференциальной ([17], приложение В) и дискретной формах ([18], лемма 8).

Лемма 1. Пусть $\zeta(t)$ — неотрицательная измеримая функция, определенная почти всюду на $[0, T]$, $\eta(t)$ — неотрицательная абсолютно непрерывная функция на $[0, T]$ и пусть

$$\eta'(t) + \zeta(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \psi(t) \quad \text{для п.в. } t \in (0, T],$$

где $\phi, \psi \in L_1(0, T)$ — неотрицательные функции. Тогда

$$\max_{t \in [0, T]} \eta(t) + \int_0^T \zeta(s) ds \leq C \left(\eta(0) + \int_0^T \psi(s) ds \right), \quad C = e^{\int_0^T \phi(s) ds}.$$

Лемма 2. Пусть $\phi_0, \phi_1, \{\eta^n\}_{n=0}^N, \{\zeta^n\}_{n=1}^N$ и $\{\psi^n\}_{n=1}^N$ — неотрицательные числа. Пусть также $\tau \in (0, 1/(2\phi_0)]$ и

$$\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{\tau} + \zeta^n \leq \phi_0 \eta^n + \phi_1 \eta^{n-1} + \psi^n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда при $C = \exp\{(2\phi_0 + \phi_1)N\tau\}$ справедлива оценка

$$\max_{0 \leq n \leq N} \eta^n + \tau \sum_{n=1}^N \zeta^n \leq C \left(\eta^0 + \tau \sum_{n=1}^N \psi^n \right).$$

1.2. Исходная задача. Нелокальный оператор A , определенный в (2), будем рассматривать как оператор, действующий из V в V^* согласно равенству

$$(Au, v) = a(l(u)) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in V, \quad (5)$$

где $\cdot$ — скалярное произведение векторов. Относительно функции a будем предполагать выполненными условия

$$(H_1) \quad 0 < m_0 < a(s) < m_1 \text{ для } \forall s \in R, \quad |a(s) - a(s')| \leq m_2 |s - s'| \text{ для } \forall s, s' \in R,$$

где $m_i = \text{const} > 0$, $0 \leq i \leq 2$. Далее пусть также заданы f и u_0 такие, что

$$(H_2) \quad f \in L_{\infty}(Q), \quad u_0 \in K,$$

где K определено в (3). Отметим, что из определения (5) и (H_1) вытекает очевидная оценка

$$m_0 \|v\|_V^2 \leq (Av, v) \leq m_1 \|v\|_V^2, \quad v \in V. \quad (6)$$

Нас интересуют приближенные методы решения следующей задачи.

Задача (P_0) . Найти функцию $u \in W$ такую, что $u(0) = u_0$, и для п.в. $t \in (0, T)$

$$u(t) \in K : \quad (u'(t) + Au(t) - f(t), v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (7)$$

Из результатов работ [8], [19], в которых рассматривались более сложные операторы, чем (5), имеем, что решение задачи (P_0) существует и единственно.

Отметим следующие свойства оператора A .

Лемма 3. Пусть выполнены условия (H_1) , $r > 0$, $B_r(V) = \{v \in V : \|v\|_V \leq r\}$. Тогда для любых $u \in V$ и $v \in B_r(V)$ справедливы оценки

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \beta \|u - v\|_V, \quad (8)$$

$$(Au - Av, u - v) \geq \alpha \|u - v\|_V^2 - \lambda \|u - v\|_H^2, \quad (9)$$

где $\beta = m_1 + c_1 m_2 r$, $\alpha = m_0/2$, $\lambda = (rm_2 c_0)^2/(2m_0)$, c_0 и c_1 постоянные в оценках

$$\|v\|_{L_1(\Omega)} \leq c_0 \|v\|_H, \quad \|v\|_{L_1(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_V, \quad v \in V.$$

Доказательство. Для любого $w \in V$ справедливо представление

$$(Au - Av, w) = a(l(u)) \int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx + (a(l(u)) - a(l(v))) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx. \quad (10)$$

Значит, в силу условия (H_1) и неравенства Коши–Буняковского

$$|(Au - Av, w)| \leq m_1 \|u - v\|_V \|w\|_V + m_2 \|u - v\|_{L_1(\Omega)} \|v\|_V \|w\|_V \leq \beta \|u - v\|_V \|w\|_V.$$

Отсюда следует (8). Аналогично, выбирая $w = u - v$ в (10), получим

$$\begin{aligned} (Au - Av, u - v) &\geq m_0 \|u - v\|_V^2 - r m_2 \|u - v\|_{L_1(\Omega)} \|u - v\|_V \geq m_0 \|u - v\|_V^2 - \\ &- r m_2 c_0 \|u - v\|_H \|u - v\|_V \geq m_0/2 \|u - v\|_V^2 - (rm_2 c_0)^2/(2m_0) \|u - v\|_H^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $ab \leq \delta a^2 + 1/(4\delta)b^2$ при $\delta = m_0/2$. $\square$

Далее мы будем использовать оценки леммы 3 в случаях, когда v есть решение изучаемой задачи в некоторый момент времени. Априорная оценка $\|v\|_{L_{\infty}(0,T;V)} \leq C$, получаемая далее в каждом конкретном случае, позволяет это сделать.

1.3. Эквивалентная формулировка задачи. Пусть $v^+ = \max\{v, 0\}$, $v^- = \max\{-v, 0\}$ — положительная и отрицательная части функции v соответственно. Определим функцию θ на R такую, что

$$\theta \in C(-\infty, 0] \text{ является неубывающей, } \theta(s) = \begin{cases} 0, & s > 0; \\ \in [\Lambda, -1], & s \leq 0, \end{cases}$$

где $\Lambda = \text{const} \leq -1$. Определим также ее первообразную

$$\hat{\theta}(s) = \int_0^s \theta(\xi) d\xi, \quad s \in R.$$

Ясно, что $\hat{\theta}$ является невозрастающей выпуклой функцией. Обозначим через $J(f)$ множество функционалов вида

$$j(v) = M \int_{\Omega} \hat{\theta}(v) dx, \quad v \in H, \quad M = \|f\|_{L_{\infty}(Q)}. \quad (11)$$

Отметим, что j является выпуклым и липшиц-непрерывным функционалом. Кроме того,

- а) $j(v) = 0$ для любого $v \in K$;
- б) $j(v) \geq M \int_{\Omega} v^- dx \geq 0$ для любого $v \in H$;
- в) $|j(u) - j(v)| \leq L \|u - v\|_H$ для любых $u, v \in H$, $L = M \Lambda |\Omega|^{1/2}$, где $|\Omega|$ — мера Ω .

Обозначим через $\partial j(u) = \{\chi \in H : \phi(v) - \phi(u) \geq (\chi, v - u) \quad \forall v \in H\}$ субдифференциал j в точке $u \in H$. Поскольку $j(0) = 0$, из в) получаем оценку

- д) $\|\chi\|_H \leq \Lambda$ для любых $\chi \in \partial j(u)$, $u \in H$.

Рассмотрим следующую задачу без ограничений.

Задача (P). Для заданного $j \in J(f)$ найти такую функцию $u \in W$, что $u(0) = u_0$, и для п.в. $t \in (0, T)$ справедливо неравенство

$$(u'(t) + Au(t) - f(t), v - u(t)) + j(v) - j(u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in V. \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) . Тогда решение задачи (P) существует, единственно и совпадает с решением задачи (P_0) . Более того,

$$u \in L_{\infty}(0, T; V), \quad u' \in L_2(0, T; H), \quad \Delta u \in L_2(0, T; H), \quad (13)$$

и справедлива оценка

$$\|u'\|_{L_2(0, T; H)} + \|u\|_{L_{\infty}(0, T; V)} + \|\Delta u\|_{L_2(0, T; H)} \leq C (\|u_0\|_V + \|f\|_{L_{\infty}(Q)}), \quad (14)$$

где постоянная C зависит лишь от m_0 , m_1 , Λ и области Q .

Доказательство проведем в два этапа: 1) решение задачи (P) существует, единственно и справедлива оценка (14); 2) решение задачи (P) также является решением (P_0) .

1) Разрешимость задачи (P) докажем, опираясь на теорему Шаудера о неподвижной точке. Пусть $w \in L_2(0, T; H) = L_2(Q)$. Тогда функция

$$t \rightarrow l(w) = \int_{\Omega} w(x, t) dx$$

измерима и в силу условия (H_1) измерима также функция $t \rightarrow a(l(w))$, $a(l(w)) \in L_\infty(0, T)$. Обозначим через G оператор, ставящий в соответствие функции w решение следующей задачи: найти $u \in W$ такую, что $u(0) = u_0$ и для п.в. $t \in (0, T)$

$$(u' - f, v - u) + a(l(w)) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in V. \quad (15)$$

Докажем, что отображение $w \rightarrow Gw = u$ имеет неподвижную точку. Она, очевидно, и будет решением задачи (P) . Установим прежде всего необходимые нам свойства G .

Отображение G корректно определено, так как неравенство (15) однозначно разрешимо (см., например, [20], теорема 1). Из него вытекает, что $u \in W$ является решением уравнения

$$u' - a(l(w)) \Delta u = F, \quad u(0) = u_0, \quad (16)$$

где $F = f - \chi$, $\chi \in \partial j(u)$. Из (H_1) и (d) следует $F \in L_\infty(Q)$. Так как $a(l(w)) \in L_\infty(Q)$, то для решения уравнения (16) справедливы включения (13) и оценка (14) ([17], с. 360, теорема 5). Таким образом, в силу оценки (14) найдутся постоянные R и C такие, что

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq R, \quad \|u\|_{H^1(Q)} \leq C. \quad (17)$$

Следовательно, G отображает шар $B(R) = \{u : \|u\|_{L_2(Q)} \leq R\}$ пространства $L_2(Q)$ в себя. Поскольку вложение $H^1(Q) \subset L_2(Q)$ вполне непрерывно (теорема Реллиха–Кондрашова), шары $H^1(Q)$ относительно компактны в $L_2(Q)$ и в силу (17) $G(B(R))$ относительно компактно в $B(R)$. Чтобы иметь возможность применить теорему Шаудера о неподвижной точке, остается доказать, что G непрерывно действует из $B(R)$ в себя. Пусть $z = u_1 - u_2$, где u_1 и u_2 — решения неравенства (15) при $w = w_1$ и $w = w_2$ соответственно, т. е.

$$(u'_i - f, v - u_i) + a(l(w_i)) \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla (v - u_i) dx + j(v) - j(u_i) \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

где $i = 1, 2$. Положим здесь $v = u_{3-i}$ и просуммируем неравенства. Получим

$$(z', z) + a(l(w_1)) \|z\|_V^2 \leq (a(l(w_1)) - a(l(w_2))) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla z dx.$$

Таким образом, с учетом условий (H_1) и оценки (14) будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_H^2 + m_0 \|z\|_V^2 \leq m_1 |\Omega|^{1/2} \|w_1 - w_2\|_H \|u_2\|_V \|z\|_V \leq C \|w_1 - w_2\|_H \|z\|_V. \quad (18)$$

Отсюда вытекает искомая оценка

$$\|Gw_1 - Gw_2\|_{L_2(Q)} = \|u_1 - u_2\|_{L_2(Q)} \leq C \|w_1 - w_2\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, отображение G непрерывно на $B(R)$ и существует его неподвижная точка. Докажем его единственность. Пусть имеются два решения u_1 и u_2 и пусть $z = u_1 - u_2$. Тогда имеет место оценка (18) при $w_1 = u_1$ и $w_2 = u_2$. Из нее следует

$$\frac{d}{dt} \|z\|_H^2 + m_0 \|z\|_V^2 \leq \frac{C^2}{m_0} \|z\|_H^2$$

и равенство $\|z\|_H = 0$ в силу леммы 1, так как $z(0) = 0$. Таким образом, $u_1 = u_2$.

2. Пусть u — решение задачи (P) . Докажем, что $u(t) \in K$ для п.в. $t \in [0, T]$. Для этого выберем $v = u(t) + u^-(t) = u^+(t) \in K$ в неравенстве (12) и учтем свойства а) и б) функционала j . Получим, что справедливы оценки

$$(u'(t), u^-(t)) + a(l(u(t))) (\nabla u(t), \nabla u^-(t)) \geq j(u(t)) + (f(t), u^-(t)) \geq \int_{\Omega} (M + f(t)) u^-(t) dx \geq 0. \quad (19)$$

Так как $u \in H^1(Q)$, то $\nabla u \cdot \nabla u^- = -|\nabla u^-|^2$, $u'u^- = -0.5d(u^-)^2/dt$, тогда из (19) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_H^2 + m_0 \|\nabla u^-(t)\|_H^2 \leq 0.$$

Следовательно, $u^-(t) = 0$ в силу неравенства Гронуолла, так как $u^-(0) = 0$. Также имеем $u(t) \in K$ и $j(u(t)) = 0$. Выбирая теперь v из множества K в неравенстве (12), получаем, что u удовлетворяет неравенству (7), т. е. u также является решением исходной задачи (P_0) . $\square$

2. ПОЛУДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА СО ШТРАФОМ

2.1. Метод штрафа. Аппроксимируем недифференцируемый функционал $j \in J(f)$ дифференцируемым j_ε и определим оператор штрафа β_ε как градиент j_ε . Для этого аппроксимируем разрывную в нуле функцию $\theta(s)$ неубывающими функциями $\theta_\varepsilon \in C(R)$ так, что $\theta_\varepsilon(s) = \theta(s)$ при $s \leq -\varepsilon_1$ и $s \geq \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$. Положим $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. Определим

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\varepsilon(s) &= \int_0^s \theta_\varepsilon(\xi) d\xi, \\ j_\varepsilon(v) &= M \int_\Omega \hat{\theta}_\varepsilon(v) dx, \quad (\beta_\varepsilon(v), w) = M \int_\Omega \theta_\varepsilon(v) w dx, \end{aligned} \quad (20)$$

где $v, w \in H$. Нетрудно видеть, что j_ε является выпуклым липшиц-непрерывным с постоянной L функционалом, а $\hat{\theta}_\varepsilon$ — малым возмущением $\hat{\theta}$, поскольку

$$|\hat{\theta}(\xi) - \hat{\theta}_\varepsilon(\xi)| \leq \Lambda \varepsilon, \quad \xi \in R. \quad (21)$$

Из определений (11), (20) и (21) непосредственно вытекает

$$|j(v) - j_\varepsilon(v)| \leq C M \varepsilon \quad \forall v \in H, \quad (22)$$

где $C = \Lambda |\Omega|$. Отметим также, что β_ε является равномерно ограниченным, липшиц-непрерывным (с постоянной порядка $O(1/\varepsilon)$), монотонным оператором, причем

$$\|\beta_\varepsilon(v)\|_H \leq C \|f\|_{L_\infty(Q)}, \quad C = \Lambda |\Omega|^{1/2}, \quad (23)$$

$$(\beta_\varepsilon(u) - \beta_\varepsilon(v), u - v) \geq 0, \quad (\beta_\varepsilon(v), v) \geq 0. \quad (24)$$

В качестве примера подходящего оператора штрафа с $\Lambda = 1$ укажем следующий:

$$\beta_\varepsilon(\xi) = M \theta_\varepsilon(\xi) = M \begin{cases} -1, & \xi \leq -\varepsilon; \\ \xi/\varepsilon, & -\varepsilon < \xi \leq 0; \\ 0, & \xi > 0, \end{cases} \quad \theta(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi \leq 0; \\ 0, & \xi > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Определим аппроксимацию задачи (P_0) методом штрафа.

Задача (P_ε) . Найти $u_\varepsilon \in H^1(0, T; H) \cap L_\infty(0, T; V)$ такую, что $u_\varepsilon(0) = u_0$ и для всех $v \in V$

$$(u'_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) - f(t), v - u_\varepsilon(t)) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t \in (0, T]. \quad (26)$$

Поскольку функционал j_ε является дифференцируемым и $j'_\varepsilon(v) = \beta_\varepsilon(v)$ для $v \in V$, то задача (P_ε) эквивалентна уравнению

$$(u'_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - f(t), v) = 0 \quad \forall v \in V \text{ и п.в. } t \in (0, T]. \quad (27)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) . Тогда решение задачи (P_ε) существует и единственно. Более того,

$$\|u'_\varepsilon\|_{L_2(0, T; H)} + \|u_\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; V)} + \|\Delta u_\varepsilon\|_{L_2(0, T; H)} \leq C (\|u_0\|_V + \|f\|_{L_\infty(Q)}), \quad (28)$$

где постоянная C зависит лишь от m_0, m_1, Λ и области Q .

Доказательство. Задача (P_ε) отличается от задачи (P_0) лишь видом функционала j_ε . В силу этого доказательство проводится аналогично первому этапу доказательства теоремы 1, в котором использовались лишь свойства выпуклости и липшиц-непрерывности j . $\square$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) , и пусть u и u_ε — решения задач (P_0) и (P_ε) соответственно. Тогда

$$\|u - u_\varepsilon\|_E \leq C \varepsilon^{1/2}, \quad (29)$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Согласно теореме 1 u также является решением неравенства (12). Положим $v = u_\varepsilon$ в (12), $v = u$ в (26) и сложим неравенства. Получим

$$\begin{aligned} (u'(t) - u'_\varepsilon(t), u(t) - u_\varepsilon(t)) + (Au(t) - Au_\varepsilon(t), u(t) - u_\varepsilon(t)) \leq \\ \leq (j(u_\varepsilon(t)) - j_\varepsilon(u_\varepsilon(t))) + (j_\varepsilon(u(t)) - j(u(t))). \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что $u_\varepsilon(t)$ лежит в $B_r(V)$ при некотором r , не зависящем от t и ε (см. (28)). Это позволяет использовать неравенство (9) для оценки левой части (30) снизу. Воспользуемся также неравенством (22) для оценки правой части сверху. Придем к оценке

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_H^2 + \alpha \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leq \lambda \|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_H^2 + 2C\varepsilon.$$

Отсюда следует оценка (29) в силу неравенства Гронуолла. $\square$

2.2. Полудискретная схема МКЭ. Определим дискретизацию задачи (P_ε) по пространственным переменным МКЭ на основе конформной аппроксимации пространства Соболева V . Далее будем предполагать, что выполнено условие:

(H_3) Ω — выпуклый многогранник в R^d .

Это предположение, с одной стороны, упростит изложение метода конечных элементов, с другой стороны, оценка $\|\Delta u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H)} \leq C$ (см. (28)) гарантирует, что $u_\varepsilon \in L_2(0,T;H^2(\Omega))$. Это свойство будет использовано при оценке точности схемы МКЭ.

Пусть $h > 0$, $T_h = \{K_1, K_2, \dots, K_{m(h)}\}$ — семейство симплицальных конечных элементов максимального диаметра h (отрезков при $d = 1$, треугольников при $d = 2$, тетраэдров при $d = 3, \dots$), образующих, как это принято в МКЭ, триангуляцию области Ω . Вершины элементов из T_h , не лежащих на $\partial\Omega$, пронумеруем в некотором порядке, и пусть a_i — координата i -го узла, $1 \leq i \leq N$, $N = N_h$.

Пусть $P_1 = \{c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_d x_d, c_i \in R\}$ — множество многочленов степени не выше первого. Определим пространство линейных конечных элементов

$$V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1 \text{ для всех } K \in T_h\}, \quad V_h \subset V,$$

а также оператор проектирования $P_h : V^* \rightarrow V_h$ равенством

$$(P_h v - v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Отметим, что сужение P_h на пространство H совпадает с ортопроектором $H \rightarrow V_h$. Далее будем предполагать, что триангуляция T_h является локально квазиравномерной. В этом случае справедливо обратное неравенство

$$\|v_h\|_V \leq C h^{-1} \|v_h\|_H \quad \forall v_h \in V_h \quad (31)$$

и для любых $w \in V$ и $v \in V \cap H^2(\Omega)$ справедливы оценки [21], [22]:

$$\|P_h w\|_V \leq C_P \|w\|_V, \quad \|v - P_h v\|_V \leq c h \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad (32)$$

$$\|w - P_h w\|_H \leq c h \|w\|_V, \quad \|v - P_h v\|_H \leq c h^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}. \quad (33)$$

Базис Лагранжа $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в V_h определяется так, что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$. В этом базисе произвольная функция $v_h \in V_h$ имеет представление

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \quad v_i = v_h(a_i).$$

Вектор-столбец $\bar{v}_h = (v_1, \dots, v_N)^T$ принято называть вектором узловых параметров v_h .

Полудискретный аналог задачи (P_ε) определим следующим образом.

Задача $(P_{\varepsilon h})$. Найти $u_{\varepsilon h} \in H^1(0, T; V_h)$ такую, что $u_{\varepsilon h}(0) = P_h u_0$ и для $\forall v \in V_h$

$$(u'_{\varepsilon h}(t) + A u_{\varepsilon h}(t) - f(t), v - u_{\varepsilon h}(t)) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon h}(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t \in (0, T). \quad (34)$$

Эта задача эквивалентна решению уравнения

$$(u'_{\varepsilon h}(t) + A u_{\varepsilon h}(t) + \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon h}(t)) - f(t), v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad t \in (0, T), \quad (35)$$

при начальном условии $u_{\varepsilon h}(0) = P_h u_0$. Задача (35), в свою очередь, стандартно сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$M_N \bar{u}'_{\varepsilon h}(t) = F_N(t, \bar{u}_{\varepsilon h}(t)), \quad t \in (0, T],$$

где $\bar{u}_{\varepsilon h}(t)$ — вектор узловых параметров функции $u_{\varepsilon h}(t) = \sum_{i=1}^N u_{\varepsilon h,i}(t) \varphi_i$, матрица масс M_N и вектор правой части определяются следующим образом:

$$M_N = \{(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^N, \quad F_N(t, \bar{u}_{\varepsilon h}(t)) = -\{(A u_{\varepsilon h}(t) + \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon h}(t)) - f(t), \varphi_i)\}_{i=1}^N.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_2) . Тогда решение задачи $(P_{\varepsilon h})$ существует и единственно. Более того,

$$\|u'_{\varepsilon h}\|_{L_2(0,T;H)} + \|u_{\varepsilon h}\|_{L_\infty(0,T;V)} \leq C (\|u_0\|_V + \|f\|_{L_\infty(Q)}), \quad (36)$$

где постоянная C зависит лишь от m_0 , m_1 , Λ и области Q .

Доказательство проводится аналогично этапу 1) доказательства теоремы 1. $\square$

Теорема 5. Пусть выполнены условия (H_1) – (H_3) и пусть u_ε и $u_{\varepsilon h}$ — решения задач (P_ε) и $(P_{\varepsilon h})$ соответственно. Тогда

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon h}\|_E \leq C h (\|u_0\|_V + \|f\|_{L_\infty(Q)}),$$

где постоянная C не зависит от ε и h .

Доказательство. Пусть $e(t) = u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon h}(t)$. В силу (27) и (35) справедливо равенство

$$(e', v_h) + (A u_\varepsilon - A u_{\varepsilon h}, v_h) + (\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (37)$$

Здесь $\chi_\varepsilon = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$, $\chi_{\varepsilon h} = \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon h})$. Положим

$$E_h(t, e) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e\|_H^2 + (A u_\varepsilon - A u_{\varepsilon h}, e) + (\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, e), \quad t \in [0, T]. \quad (38)$$

В силу (37) с $v_h = u_{\varepsilon h} - P_h u_\varepsilon$ имеем

$$E_h(t, e) = (e', u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon) + (A u_\varepsilon - A u_{\varepsilon h}, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon) + (\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon).$$

По определению оператора P_h выполняется равенство $P_h v'(t) = (P_h v(t))'$. Следовательно,

$$(e', u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon) = (u'_\varepsilon - P_h u'_\varepsilon, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_H^2. \quad (39)$$

Согласно равенствам (38), (39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e\|_H^2 + (Au_\varepsilon - Au_{\varepsilon h}, e) + (\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, e) = \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_H^2 + (Au_\varepsilon - Au_{\varepsilon h}, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon) + (\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon). \end{aligned} \quad (40)$$

Оператор штрафа является монотонным оператором. Поэтому слагаемое $(\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, e)$ в левой части (40) неотрицательно. Также в силу определения (20) имеем

$$|(\chi_\varepsilon - \chi_{\varepsilon h}, u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon)| \leq C M \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_H, \quad C = C(\Lambda, \Omega).$$

Поэтому, используя (8), (9) (это возможно в силу оценок (28), (36)), а также неравенство $2ab \leq \alpha a^2 + \alpha^{-1} b^2$, из (40) следует

$$\frac{d}{dt} \|e\|_H^2 + \alpha \|e\|_V^2 \leq 2\lambda \|e\|_H^2 + \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_H^2 + \beta^2/\alpha \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_V^2 + C M \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_H.$$

Так как $e(0) = 0$, то после применения неравенства Гронуолла придем к оценке

$$\|e\|_E^2 \leq C (\|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;H)}^2 + \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;V)}^2 + M \|u_\varepsilon - P_h u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H)}). \quad (41)$$

Используем оценки точности, указанные в (32), (33), для оценки правой части (41). Получим

$$\|e\|_E^2 \leq C h^2 (\|u_\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;V)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + M \|u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))}).$$

Отсюда следует утверждение теоремы, если учесть оценку (28), поскольку в силу выпуклости области Ω имеем $\|u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \|\Delta u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;H)}$, где $C = C(\Omega)$. $\square$

3. ПОЛНОСТЬЮ ДИСКРЕТНАЯ СХЕМА

Определим дискретизацию задачи $(P_{\varepsilon h})$ на основе неявной схемы Эйлера. Для сокращения обозначений ее решение обозначим через y . Таким образом, далее $y = u_{\varepsilon h} \in H^1(0, T; V_h)$.

Зафиксируем шаг сетки $\tau = T/M$ по переменной времени и соответствующее разбиение отрезка $[-\tau, T]$ на элементы $I_n = [t_{n-1}, t_n]$, $n=0, 1, \dots, M$, где $t_j = j\tau$ для $j=-1, 0, \dots, M$. Положим $y^n \approx y(t_n)$, $f^n = f(t_n)$, $y^{-1} = P_h u_0$, $f(t_{-1}) = f(0)$. Рассмотрим неявную схему.

Задача $(P_{\varepsilon h\tau})$. Найти $y^n \in V_h$ такие, что при $n=0, 1, \dots, M$ справедливы неравенства

$$((y^n - y^{n-1})/\tau + Ay^n - f^n, v - y^n) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(y^n) \geq 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (42)$$

Из неравенства (42) последовательно определяются y^n (начиная с y^0). Доказательство разрешимости задачи относительно y^n можно провести на основе теоремы Шаудера о неподвижной точке. Мы не будем останавливаться на этом, а сосредоточим внимание на оценке точности ее решения. Поскольку функционал j_ε является дифференцируемым, то неравенство (42) эквивалентно уравнению

$$((y^n - y^{n-1})/\tau + Ay^n + \beta_\varepsilon(y^n) - f^n, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (43)$$

Далее уравнение (43) мы используем при получении априорных оценок, а неравенство (42) — при оценке точности схемы. При этом мы воспользуемся методикой исследования, развитой в статье [13] (см. также [15]), предполагающей лишь выпуклость и полунепрерывность снизу функционала j_ε .

Отметим, что в отличие от традиционной формулировки неявной схемы Эйлера при $t = -\tau$ ставится начальное условие, а при $t = 0$ (при $n = 0$) решается следующая задача:

$$((y^0 - P_h u_0)/\tau + Ay^0 + \beta_\varepsilon(y^0) - f(0), v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (44)$$

Шаг сетки τ будем считать достаточно малым. Далее мы определим постоянную τ_0 , зависящую только от данных задачи, и будем предполагать, что выполнено условие

$$(H_4) \quad \tau \leq \tau_0.$$

Нашей целью является получение оптимальной оценки точности схемы (43). Это требует более сильных ограничений на данные задачи, чем в (H_2) . Будем считать, что

$$(H_5) \quad f \in L_\infty(Q) \cap H^1(0, T; V^*), \quad u_0 \in K \cap H^2(\Omega).$$

3.1. Априорные оценки. Пусть $g_\tau(t)$ и $\check{g}_\tau(t)$ обозначают ступенчатые функции, которые принимают значения g^n и g^{n-1} на I_n , $n = 0, \dots, M$. Под $\hat{g}_\tau(t)$ будем понимать линейную на каждом I_n и непрерывную на $[-\tau, T]$ функцию такую, что $\hat{g}_\tau(t_n) = g^n$. Пусть также $\ell(t)$ обозначает τ -периодическую функцию, равную $(t - t_{n-1})/\tau$ на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. Тогда для всех $t \in [-\tau, T]$ имеем (в точках разрыва производная $\hat{y}'_\tau$ полагается непрерывной слева)

$$\begin{aligned} \hat{y}_\tau(t) &= (1 - \ell(t))\check{y}_\tau(t) + \ell(t)y_\tau(t), \quad \hat{y}_\tau(t) - y_\tau(t) = (1 - \ell(t))(\check{y}_\tau(t) - y_\tau(t)), \\ \hat{y}'_\tau(t) &= (y_\tau(t) - \check{y}_\tau(t))/\tau. \end{aligned}$$

Лемма 4 (см., например, [13]). *Справедлива оценка*

$$\|f - f_\tau\|_{L_2(0, T; V^*)} + \tau \|\hat{f}'_\tau\|_{L_2(0, T; V^*)} \leq 2\tau \|f\|_{H^1(0, T; V^*)}.$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (H_1) , (H_3) – (H_5) , y^0 – решение уравнения (44). Тогда*

$$\|y^0 - y^{-1}\|_H^2 + \tau \|y^0 - y^{-1}\|_V^2 \leq C_0^2 \tau^2,$$

где $C_0 = C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L_\infty(Q)})$ (здесь и далее различные постоянные такие, как c , C , возможно с индексами, не зависят от ε , h и τ), $y^{-1} = P_h u_0$.

Доказательство. Из первой оценки (32) следует $\|y^{-1}\|_V \leq r$, где $r = C_P \|u_0\|_V$. Определим по этому r величины β и λ согласно лемме 3 и положим $\tau_1 = 1/(2\lambda)$. Определим также $w \in V_h$ равенством

$$(w + Ay^{-1} + \beta_\varepsilon(y^{-1}) - f(0), v) = 0, \quad v \in V_h. \quad (45)$$

Убедимся, что норма $\|w\|_H$ ограничена равномерно по h . Легко видеть, что

$$(Ay^{-1}, v) = (Au_0, v) + (Ay^{-1} - Au_0, v) = -a(l(u_0)) \int_\Omega \Delta u_0 v \, dx + (Ay^{-1} - Au_0, v).$$

Оценим правую часть, используя оценку (8) и обратное неравенство (31). Получим

$$|(Ay^{-1}, v)| \leq m_1 \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_H + \beta \|P_h u_0 - u_0\|_V \|v\|_V \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_H.$$

Следовательно, в силу ограниченности β_ε (см. (23)) из (45) вытекает $|(w, v)| \leq C_0 \|v\|_H$. Теперь из равенств (44) и (45) при $v = e = y^0 - y^{-1}$ имеем

$$(e/\tau + Ay^0 - Ay^{-1}, e) + (\beta_\varepsilon(y^0) - \beta_\varepsilon(y^{-1}), e) = (w, e).$$

Воспользовавшись оценкой (9) и монотонностью β_ε , придем к оценке

$$(1 - \lambda\tau) \|e\|_H^2 + \alpha\tau \|e\|_V^2 \leq \tau |(w, e)| \leq C_0 \tau \|e\|_H.$$

Отсюда получаем утверждение леммы при условии $\tau \leq \tau_0$, где $\tau_0 \leq \tau_1$. $\square$

Лемма 6. Пусть y — решение схемы (43). Тогда справедливы оценки:

$$\|y_\tau\|_E \leq C_1, \quad \|\check{y}_\tau\|_E \leq C_1, \quad \|\hat{y}_\tau\|_E \leq C_1, \quad C_1 = C(C_0 + \|f\|_{H^1(0,T;V^*)}). \quad (46)$$

$$\|\hat{y}_\tau\|_{L_\infty(0,T;V)} \leq C_1. \quad (47)$$

Доказательство. 1) Докажем оценки (46). Из (43) при $v = y^n$ получаем

$$((y^n - y^{n-1})/\tau, y^n) + (Ay^n, y^n) + (\beta_\varepsilon(y^n), y^n) = (f^n, y^n).$$

Воспользуемся здесь оценками (6), (24), неравенством

$$2(u - v, u) = \|u\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 - \|v\|_H^2 \geq \|u\|_H^2 - \|v\|_H^2 \quad \forall u, v \in V \quad (48)$$

и оценкой $2ab \leq \delta^{-1}a^2 + \delta b^2$, $\delta > 0$. В результате получим

$$(\|y^n\|_H^2 - \|y^{n-1}\|_H^2)/\tau + 2m_0\|y^n\|_V^2 \leq 2\|f^n\|_{V^*}\|y^n\|_V \leq m_0^{-1}\|f^n\|_{V^*}^2 + m_0\|y^n\|_V^2.$$

Следовательно, для каждого $n = 0, 1, \dots, n$, справедлива оценка

$$(\|y^n\|_H^2 - \|y^{n-1}\|_H^2)/\tau + m_0\|y^n\|_V^2 \leq m_0^{-1}\|f^n\|_{V^*}^2.$$

Отсюда, используя дискретное неравенство Гронуолла, имеем

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|y^n\|_H^2 + \tau \sum_{n=1}^M \|y^n\|_V^2 \leq C \left(\|y^{-1}\|_H^2 + \tau \sum_{n=0}^M \|f^n\|_{V^*}^2 \right). \quad (49)$$

Здесь $\|y^{-1}\|_H = \|P_h u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$, $\|f^0\|_{V^*} \leq C\|f^0\|_{L_\infty(Q)}$. Поэтому первая оценка в (46) является непосредственным следствием (49). Поскольку

$$\|\check{y}_\tau\|_{L_\infty(0,T;H)} = \max_{0 \leq n \leq M-1} \|y^n\|_H, \quad \|\check{y}_\tau\|_{L_2(0,T;V)}^2 \leq \tau \|y^0\|_V^2 + \|y_\tau\|_{L_2(0,T;V)}^2,$$

то ясно, что также $\|\check{y}_\tau\|_E \leq C_1$. Так как

$$\|\hat{y}_\tau\|_E = \|(1 - \ell)\check{y}_\tau + \ell y_\tau\|_E \leq \|\check{y}_\tau\|_E + \|y_\tau\|_E,$$

то справедлива и заключительная оценка в (46).

2) Для доказательства оценки (47) в (43) положим $v = \delta y^n = y^n - y^{n-1}$. Получим

$$\frac{1}{\tau} \|\delta y^n\|_H^2 + (Ay^n, y^n - y^{n-1}) \leq (f^n - \beta_\varepsilon(y^n), \delta y^n) \leq \frac{\tau}{2} \|f^n - \beta_\varepsilon(y^n)\|_H^2 + \frac{1}{2\tau} \|\delta y^n\|_H^2.$$

Следовательно,

$$(Ay^n, y^n - y^{n-1}) \leq \tau \|f^n - \beta_\varepsilon(y^n)\|_H^2. \quad (50)$$

Обозначим $m = a(l(y^n))$ и учтем, что (см. (48))

$$(Ay^n, y^n - y^{n-1}) = m (\nabla y^n, \nabla (y^n - y^{n-1})) \geq \frac{m}{2} (\|y^n\|_V^2 - \|y^{n-1}\|_V^2),$$

$$\|f^n - \beta_\varepsilon(y^n)\|_H \leq c \|f\|_{L_\infty(Q)},$$

где $c = (1 + \Lambda)|\Omega|^{1/2}$. Тогда из (50) непосредственно вытекает оценка

$$\|y^n\|_V^2 - \|y^{n-1}\|_V^2 \leq c^2 \tau / m_0 \|f\|_{L_\infty(Q)}^2, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

После суммирования этих оценок получим $\max_{0 \leq n \leq M} \|y^n\|_V \leq C$, поскольку $\|y^{-1}\|_V \leq C_P \|u_0\|_V$.

Очевидным следствием этой оценки является заключительная оценка (47). $\square$

Лемма 7. Пусть y — решение схемы (43). Тогда $\|\hat{y}'_\tau\|_E \leq C_1$.

Доказательство. В предыдущей лемме была получена оценка $\max_{0 \leq n \leq M} \|y^n\|_V \leq r$ с некоторой постоенной r . Определим по r величину λ согласно лемме 3 и положим $\tau_0 = \min\{\tau_1, 1/(4\lambda)\}$, $y_t^n = (y^{n+1} - y^n)/\tau$. Равенство (43) вычтем из такого же равенства на следующем шаге по времени и положим $v = y_t^n$. Получим

$$(y_t^n - y_t^{n-1}, y_t^n) + (Ay_t^{n+1} - Ay_t^n, y_t^n) + (\beta_\varepsilon(y_t^{n+1}) - \beta_\varepsilon(y_t^n), y_t^{n+1} - y_t^n)/\tau = \tau(f_t^n, y_t^n).$$

Воспользуемся здесь оценкой (9) и монотонностью β_ε . Придем к оценке

$$(\|y_t^n\|_H^2 - \|y_t^{n-1}\|_H^2)/\tau + \alpha\|y_t^n\|_V^2 \leq 2\lambda\|y_t^n\|_H^2 + \alpha^{-1}\|f_t^n\|_{V^*}^2, \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$$

Применяя дискретное неравенство Гронуолла, имеем

$$\max_{0 \leq n \leq M-1} \|y_t^n\|^2 + \tau \sum_{n=0}^{M-1} \|y_t^n\|_V^2 \leq C \left(\|y_t^{-1}\|_H^2 + \tau \sum_{n=0}^{M-1} \|f_t^n\|_{V^*}^2 \right) = C S. \quad (51)$$

Отсюда вытекает утверждение леммы, поскольку левая часть (51) равна $\|\hat{y}'_\tau\|_E$, а

$$S = \tau^{-2}\|y^0 - y^{-1}\|_H^2 + \|\hat{f}'_\tau\|_{L_2(0,T;V^*)}^2 \leq C C_0^2 + 2\|f\|_{H^1(0,T;V^*)}^2 \leq C_1$$

в силу лемм 4 и 5. $\square$

3.2. Оценка точности неявной схемы.

Лемма 8. Для всех $t \in [0, T]$ и $v \in V_h$ справедливо неравенство

$$(\hat{y}'_\tau + A\hat{y}_\tau - f, \hat{y}_\tau - v) + j_\varepsilon(\hat{y}_\tau) - j_\varepsilon(v) \leq R_\tau(t, v), \quad (52)$$

причем для любого $v \in L_2(0, T; V_h)$

$$\int_0^T R_\tau(t, v(t)) dt \leq C(\tau^2 + \tau\|\hat{y}_\tau - v\|_{L_2(0,T;V)}).$$

Доказательство. Запишем неравенства (42) в эквивалентном безындексном виде, переходя от сеточной функции $\{y^n\}_{n=-1}^M$ к соответствующей ей восполнениям. Для всех $t \in (-\tau, T)$ придем к следующему неравенству:

$$(\hat{y}'_\tau + Ay_\tau - f_\tau, v - y_\tau) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(y_\tau) \geq 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (53)$$

Положим $S = (A\hat{y}_\tau - Ay_\tau, \hat{y}_\tau - v)$. Напомним соотношения, связывающие $\hat{y}_\tau$, $\check{y}_\tau$ и y_τ :

$$\hat{y}_\tau(t) = (1 - \ell(t))\check{y}_\tau(t) + \ell(t)y_\tau(t), \quad \hat{y}_\tau(t) - y_\tau(t) = (1 - \ell(t))(\check{y}_\tau(t) - y_\tau(t)).$$

Используя выпуклость j_ε и неравенство (53), получим

$$\begin{aligned} (\hat{y}'_\tau + A\hat{y}_\tau - f_\tau, \hat{y}_\tau - v) + j_\varepsilon(\hat{y}_\tau) - j_\varepsilon(v) &= (\hat{y}'_\tau + Ay_\tau - f_\tau, \hat{y}_\tau - v) + j_\varepsilon((1 - \ell)\check{y}_\tau + \ell y_\tau) - j_\varepsilon(v) + S \leq \\ &\leq (\hat{y}'_\tau + Ay_\tau - f_\tau, y_\tau - v) + (\hat{y}'_\tau + Ay_\tau - f_\tau, \hat{y}_\tau - y_\tau) + (1 - \ell)j_\varepsilon(\check{y}_\tau) + \ell j_\varepsilon(y_\tau) - j_\varepsilon(v) + S \leq \\ &\leq (1 - \ell)[(\hat{y}'_\tau + Ay_\tau - f_\tau, \check{y}_\tau - y_\tau) + j_\varepsilon(\check{y}_\tau) - j_\varepsilon(y_\tau)] + S. \end{aligned} \quad (54)$$

Умножим (53) при $t = t - \tau$ на $(1 - \ell)$ и положим $v = y_\tau$. Придем к неравенству

$$(1 - \ell)[(\hat{y}'_\tau(t - \tau) + A\check{y}_\tau - \check{f}_\tau, y_\tau - \check{y}_\tau) + j_\varepsilon(y_\tau) - j_\varepsilon(\check{y}_\tau)] \geq 0.$$

Добавим эту величину в правую часть (54). После простых преобразований получим иско-
мое неравенство (52), в котором

$$\begin{aligned} R_\tau(t, v) &= r_1 + r_2 + r_3 + S, \\ r_1 &= (1 - \ell)(\hat{y}'_\tau - \hat{y}'_\tau(t - \tau), \check{y}_\tau - y_\tau), \\ r_2 &= (1 - \ell)(\check{f}_\tau - f_\tau + Ay_\tau - A\check{y}_\tau, \check{y}_\tau - y_\tau), \\ r_3 &= (1 - \ell)(f - f_\tau, v - \hat{y}_\tau). \end{aligned}$$

Оценим интеграл от каждого слагаемого $R_\tau(t, v)$. Заметим, что $(y_\tau(t) - \check{y}_\tau(t))/\tau = \hat{y}'_\tau(t)$ и для любой кусочно-постоянной функции g_τ справедливо равенство

$$\int_0^T (1 - \ell)g_\tau dt = \frac{1}{2} \int_0^T g_\tau dt.$$

В силу неравенства (48) и леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T r_1 dt &= \frac{\tau}{2} \int_0^T (\hat{y}'_\tau(t - \tau) - \hat{y}'_\tau, \hat{y}'_\tau) dt \leq \\ &\leq \frac{\tau}{4} \int_0^T (\|\hat{y}'_\tau(t - \tau)\|_H^2 - \|\hat{y}'_\tau(t)\|_H^2) dt \leq \frac{\tau}{4} \int_{-\tau}^0 \left\| \frac{y^0 - y^{-1}}{\tau} \right\|_H^2 dt \leq \frac{1}{4} C_0^2 \tau^2. \end{aligned}$$

Учитывая оценку (8) и леммы 4, 7, получим также оценку

$$\begin{aligned} \int_0^T r_2 dt &= \frac{\tau}{2} \int_0^T (\tau \hat{f}'_\tau + A\check{y}_\tau - Ay_\tau, \hat{y}'_\tau) dt \leq \frac{\tau^2}{2} \int_0^T (\|\hat{f}'_\tau\|_{V^*} \|\hat{y}'_\tau\|_V + \|\hat{y}'_\tau\|_V^2) dt \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{2} (\|f\|_{H^1(0,T;V^*)} \|\hat{y}'_\tau\|_{L_2(0,T;V)} + \|\hat{y}'_\tau\|_{L_2(0,T;V)}^2) \leq C\tau^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись снова леммой 4, имеем

$$\int_0^T r_3 dt \leq \frac{1}{2} \|f - f_\tau\|_{L_2(0,T;V^*)} \|v - \hat{y}_\tau\|_{L_2(0,T;V)} \leq C\tau \|\hat{y}_\tau - v\|_{L_2(0,T;V)}.$$

И наконец, учитывая лемму 7 и неравенство (8), получим заключительную оценку

$$\begin{aligned} \int_0^T S dt &\leq \int_0^T \|A\hat{y}_\tau - Ay_\tau\|_{V^*} \|\hat{y}_\tau - v\|_V dt \leq \beta \int_0^T \|\hat{y}_\tau - y_\tau\|_V \|\hat{y}_\tau - v\|_V dt \leq \\ &\leq \beta\tau \int_0^T (1 - \ell) \|\hat{y}'_\tau\|_V \|\hat{y}_\tau - v\|_V dt \leq \beta\tau \|\hat{y}'_\tau\|_{L_2(0,T;V)} \|\hat{y}_\tau - v\|_{L_2(0,T;V)} \leq C\tau \|\hat{y}_\tau - v\|_{L_2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Суммируя эту оценку с оценками интегралов остальных слагаемых $R_\tau(t, v)$, получаем за-
ключительное утверждение леммы. $\square$

Лемма 9. Пусть $\hat{y}_\tau$ и $\hat{y}_k$ — решения схемы неявной схемы с шагами τ и k соответственно. Тогда $\|\hat{y}_\tau - \hat{y}_k\|_E \leq C(\tau + k)$, где постоянная C не зависит от τ, k, ε и h .

Доказательство. Согласно лемме 8 при $t \in [0, T]$ и $v \in V_h$ справедливо неравенство

$$(\hat{y}'_k + A\hat{y}_k - f, \hat{y}_k - v) + j_\varepsilon(\hat{y}_k) - j_\varepsilon(v) \leq R_k(t, v), \quad (55)$$

причем $\int_0^T R_k(t, v(t)) dt \leq C(k^2 + k \|\hat{y}_k - v\|_{L_2(0,T;V)})$. Положив $v = \hat{y}_k$ в неравенстве (52), $v = \hat{y}_\tau$ в (55), сложим полученные неравенства. Получим

$$(\hat{y}'_k - \hat{y}'_\tau + A\hat{y}_k - A\hat{y}_\tau, \hat{y}_k - \hat{y}_\tau) \leq \psi(t),$$

где $\psi(t) = R_k(t, \hat{y}_\tau) + R_\tau(t, \hat{y}_k)$. Отсюда в силу (9) следует неравенство

$$\frac{d}{dt} \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_H^2 + 2\alpha \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_V^2 \leq 2\lambda \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_H^2 + 2\psi(t).$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, придем к оценке

$$\|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_{L_\infty(0,T;H)}^2 + \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_{L_2(0,T;V)}^2 \leq C \left(\|\hat{y}_k(0) - \hat{y}_\tau(0)\|_H^2 + \int_0^T \psi(t) dt \right). \quad (56)$$

Заметим, что согласно лемме 5

$$\|\hat{y}_k(0) - \hat{y}_\tau(0)\|_H \leq \|\hat{y}_\tau(0) - P_h u_0\|_H + \|\hat{y}_k(0) - P_h u_0\|_H \leq C_0(k + \tau),$$

а в силу леммы 8

$$\int_0^T \psi(t) dt \leq C(\tau + k)^2 + C(\tau + k) \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_{L_2(0,T;V)} \leq C(\tau + k)^2 + 0.5 \|\hat{y}_k - \hat{y}_\tau\|_{L_2(0,T;V)}^2.$$

Остается использовать эти неравенства для оценки правой части (56). $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_3) – (H_5) , y — решение задачи $(P_{\varepsilon h})$, $\hat{y}_\tau$ — кусочно-линейное восполнение решения неявной схемы $(P_{\varepsilon h\tau})$. Тогда $\|y - \hat{y}_\tau\|_E \leq C\tau$.

Доказательство. Покажем, что $\|y - \hat{y}_\tau\|_E \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Тогда утверждение теоремы получится предельным переходом при $k \rightarrow 0$ в оценке леммы 9.

Для $\hat{y}_\tau \in H^1(0, T; V_h)$ ранее были получены равномерные по τ оценки норм $\|\hat{y}_\tau\|_E$, $\|\hat{y}_\tau\|_{L_\infty(0,T;V)}$, $\|\hat{y}'_\tau\|_E$. Определим M_0 как целую часть числа T/τ_0 . Из леммы 9 следует, что последовательность $\{\hat{y}_\tau, \tau = T/M, M = M_0, M_0 + 1, \dots\}$ фундаментальна в подпространстве $E_h = L_\infty(0, T; V_h) \cap L_2(0, T; V_h)$ пространства E . Поэтому она сильно сходится в E к некоторому элементу $y \in E_h$. Указанных свойств последовательности $\{\hat{y}_\tau\}_\tau$, а также липшиц-непрерывности оператора A (см. (8)) и функционала j_ε с избытком достаточно, чтобы стандартно осуществить предельный переход при $\tau \rightarrow 0$ в неравенстве

$$\int_0^T ((\hat{y}'_\tau + A\hat{y}_\tau - f, \hat{y}_\tau - v) + j_\varepsilon(\hat{y}_\tau) - j_\varepsilon(v)) dt \leq \int_0^T R_\tau(t, v) dt, \quad (57)$$

которое получается после интегрирования (52). В (57) v — произвольный элемент $L_2(0, T; V_h)$. В пределе получим неравенство

$$\int_0^T ((y' + Ay - f, v - y) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(y)) dt \geq 0,$$

которое совпадает с неравенством (34), так как v произвольно. Поскольку в силу леммы 2 справедлива оценка $\|\hat{y}_\tau(0) - P_h u_0\|_H \leq C_0\tau$, то в пределе получим $y(0) = P_h u_0$. Это и означает, что $\hat{y}_\tau$ сходится к решению задачи $(P_{\varepsilon h})$. $\square$

3.3. Точность полностью дискретной схемы. Следствием доказанных теорем является

Теорема 7. Пусть выполнены условия (H_1) , (H_3) – (H_5) , u — решение задачи (P_0) , $\hat{u}_{\varepsilon h\tau}$ — кусочно-линейное восполнение решения схемы $(P_{\varepsilon h\tau})$. Тогда $\|u - \hat{u}_{\varepsilon h\tau}\|_E \leq C(\varepsilon^{1/2} + h + \tau)$, где постоянная C не зависит от ε , h и τ .

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon, u_{\varepsilon h}$ — решения задач (P_ε) и $(P_{\varepsilon h})$ соответственно. Утверждение теоремы следует из оценок теорем 3, 5, 6 и неравенства треугольника:

$$\|u - \hat{u}_{\varepsilon h\tau}\|_E \leq \|u - u_\varepsilon\|_E + \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon h}\|_E + \|u_{\varepsilon h} - \hat{u}_{\varepsilon h\tau}\|_E \leq C(\varepsilon^{1/2} + h + \tau).$$

$\square$

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для подтверждения теоретической оценки точности дискретной схемы $(P_{\varepsilon h \tau})$, указанной в теореме 7, приведем результаты решения двух тестовых задач в области $\Omega = [0, 1]^d$ при $d = 1$ и $d = 2$. Вычисления были организованы следующим образом.

1. При $d = 1$ отрезок $[0, 1]$ был разбит на n конечных элементов (подотрезков) равной длины h . В двумерном случае разбиение на треугольные конечные элементы было получено на основе равномерной ортогональной сетки из $(n + 1) \times (n + 1)$ узлов после деления одним и тем же способом каждого элементарного квадрата со стороной h на два треугольника. Для вычисления интегралов при реализации схемы МКЭ использовались квадратурные формулы, обеспечивающие диагональность матрицы масс.

2. Тестовые задачи были получены следующим способом. По функциям

$$a(s) = 1 + \frac{s^+}{1 + s^+}, \quad u(x, t) = [(x_1 + x_2 - v(t))^+]^2,$$

где $v(t) = 0.25 + t/(2T)$, $T = 1$, была вычислена правая часть исходного неравенства

$$f(x, t) = \begin{cases} u'(x, t) - a(l(u(x, t)))\Delta u(x, t) & \text{при } u(x, t) > 0; \\ -2da(l(u(x, t))) & \text{при } u(x, t) = 0. \end{cases}$$

По определению функция u удовлетворяет следующим условиям в области $\Omega \times (0, T)$:

$$u' - a(l(u))\Delta u - f \geq 0, \quad u \geq 0, \quad (u' - a(l(u))\Delta u - f)u = 0,$$

т. е. является решением неравенства (7).

3. Матрица Якоби системы нелинейных уравнений (43) на каждом слое по времени является заполненной матрицей большой размерности. Это связано с нелокальностью оператора A . Поэтому для решения системы МКЭ нежелательно использовать быстрые итерационные методы, такие как метод Ньютона или квазиньютоновские методы. Для преодоления этой трудности исходная система МКЭ предварительно была эквивалентно сведена к расширенной системе уравнений введением новой неизвестной [9], имеющей следующий вид:

$$((y^n - y^{n-1})/\tau + A(\mu^n)y^n + \beta_\varepsilon(y^n) - f^n, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad (58)$$

$$\mu^n - \int_{\Omega} y^n(x) dx = 0, \quad (59)$$

где $A(\mu^n)$ при заданном $\mu^n \in R$ является локальным оператором:

$$(A(\mu^n)y, v) = a(\mu^n) \int_{\Omega} \nabla y(x) \cdot \nabla v dx \quad \forall y, v \in V_h.$$

Обозначим через A^n его матрицу. В этом случае матрица Якоби расширенной системы для определения пары (y^n, μ^n) является разреженной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}I + A^n + \beta'_\varepsilon(\bar{y}^n) & b \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

где I — единичная, а $\beta'_\varepsilon(\bar{y}^n)$ — диагональная матрица. Для решения системы (58), (59) нами был использован метод Ньютона, начальное приближение для которого бралось с предыдущего слоя по времени.

4. Приближенный метод зависит от трех параметров ε , h и τ . Для проверки точности оценки $\|u - \hat{u}_{\varepsilon h \tau}\|_E \leq C(\varepsilon^{1/2} + h + \tau)$ были проведены следующие вычисления. Для набора точек сетки $n = n_1, n_2, \dots$ (в одном направлении) и соответствующих им шагов сетки

h	1/20	1/40	1/60	1/80	1/100	1/120
$\ u - u_{\varepsilon h\tau}\ _E$	0.02103	0.01047	0.00697	0.00522	0.00418	0.00348
α	—	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00

ТАБЛИЦА 1. Результаты решения одномерной тестовой задачи

$h = h_1, h_2, \dots$ при $\varepsilon = c_0 h^2$ и $\tau = Th$ были найдены приближенные решения задачи с известным точным решением. Предполагая, что

$$E_h = \|u - \hat{u}_{\varepsilon h\tau}\|_E \approx C h^\alpha,$$

и считая, что C слабо зависит от h , были найдены значения α по формуле

$$\alpha \approx \log(E_{h_{i+1}}/E_{h_i}) / \log(h_{i+1}/h_i).$$

Параметр c_0 варьировался в интервале $[0.1, 1]$, T — в интервале $[1, 5]$.

5. В табл. 1, 2 приведены результаты расчетов в случае оператора штрафа (25), $T = 1$ и $c_0 = 1$. Аналогичные результаты были получены и при других значениях T , c_0 , указанных выше, а также в случае классического оператора штрафа

$$\beta_\varepsilon(\xi) = M \theta_\varepsilon(\xi) = M \begin{cases} \xi/\varepsilon, & \xi \leq 0; \\ 0, & \xi > 0. \end{cases}$$

В таблицах представлена зависимость погрешности $\|u - \hat{u}_{\varepsilon h\tau}\|_E$ от h и порядок сходимости α полностью дискретной схемы при $\varepsilon = h^2$, $\tau = h$.

h	1/10	1/20	1/40	1/60	1/80	1/120
$\ u - u_{\varepsilon h\tau}\ _E$	0.1753	0.0865	0.0429	0.0285	0.0213	0.0142
α	—	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00

ТАБЛИЦА 2. Результаты решения двумерной тестовой задачи

Из табл. 1, 2 следует, что значения α согласуются с теоретическим значением, равным 1. Как в одномерном, так и в двумерном случае среднее число итераций метода Ньютона на шаге по времени до достижения точности 10^{-8} в равномерной норме было равно 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chipot M., Rodrigues J.-F. *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, ESAIM: Math. Model. and Numer. Anal. **26** (3), 447–467 (1992).
- [2] Chipot M., Lovat B. *On the Asymptotic Behaviour of Some Nonlocal Problems*, Positivity **3** (1), 65–81 (1999).
- [3] Chipot M. *Elements of Nonlinear Analysis* (Birkhäuser Advanced Texts, Berlin, 2000).
- [4] Chang N.-H., Chipot M. *Nonlinear nonlocal evolution problems*, Rev. R. Acad. Cien. Exact. Ser. A. Mat. **97** (3), 423–445 (2003).
- [5] Chipot M., Valente V., Caffarelli G.V. *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy*, Rendiconti del Seminario Matematico della Univ. di Padova **110**, 199–220 (2003).
- [6] Pavlova M.F. *On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration*, Differ. Equat. **47** (8), 1161–1175 (2011).
- [7] Глазырина О.В., Павлова М.Ф. *О единственности решения одной нелокальной нелинейной задачи с сильно монотонным по градиенту пространственным оператором*, Изв. вузов. Матем. (3), 92–95 (2012).
- [8] Glazyrina O.V., Pavlova M.F. *On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator*, Differ. Equat. **50** (7), 873–887 (2014).

- [9] Chaudhary S., Srivastava V., Kumar S., Srinivasan B. *Finite element approximation of nonlocal parabolic problem*, Numer. Methods for Partial Differ. Equat. **33** (3), 786–813 (2016).
- [10] Glazyrina O.V., Pavlova M.F. *Study of the convergence of the finite-element method for parabolic equations with a nonlinear nonlocal spatial operator*, Differ. Equat. **51** (7), 872–885 (2015).
- [11] Глазырина О.В., Павлова М.Ф. *О сходимости явной разностной схемы для эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **157** (4), 5–23 (2015).
- [12] Dautov R.Z., Mikheeva A.I. *Exact penalty operators and regularization of parabolic variational inequalities with in obstacle inside a domain*, Differ. Equat. **44** (1), 77–84 (2008).
- [13] Savaré G. *Weak Solutions and Maximal Regularity for Abstract Evolution Inequalities*, Adv. Math. Sci. Appl. (6), 377–418 (1996).
- [14] Savaré G., Nocketto R., Verdi C. *A Posteriori Error Estimates for Variable Time-Step Discretizations of Nonlinear Evolution Equations*, Comm. Pure Appl. Math. **53**, 525–589 (2000).
- [15] Dautov R.Z., Mikheeva A.I. *Implicit Euler scheme for an abstract evolution inequality*, Differ. Equat. **47** (8), 1130–1138 (2011).
- [16] Dautray R., Lions J.-L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. V. 5. (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [17] Evans L.C. *Partial Differential Equations* (AMS, Providence, RI, 1998).
- [18] Tabata M., Uchiumi S. *A genuinely stable Lagrange–Galerkin scheme for convection-diffusion problems*, Japan J. Indust. Appl. Math. **33** (1), 121–143 (2016).
- [19] Павлова М.Ф., Глазырина О.В. *Теорема единственности решения эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором*, в сб.: Матер. X Междунар. конф. Сеточные методы для краевых задач и приложения, 205–208 (Казан. фед. ун-т, Казань, 2014).
- [20] Dautov R.Z., Lapin A.V. *Approximations of Evolutionary Inequality with Lipschitz-continuous Functional and Minimally Regular Input Data*, Lobachevskii J. Math. **40** (4), 425–438 (2019).
- [21] Bramble J.H., Pasciak J.E., and Steinbach O. *On the stability of the L^2 projection in $H^1(\Omega)$* , Math. Comp. **71** (237), 147–156 (2002).
- [22] Bank R.E. and Yserentant H. *On the H^1 -stability of the L_2 -projection onto finite element spaces*, Numer. Math. **126**, 361–381 (2014).

Ольга Владимировна Глазырина

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: glazyrina-olga@yandex.ru

Рафаил Замилович Даутов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: rdautov@kpfu.ru

Динара Айратовна Губайдуллина

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: dinara.gubaidullina@gmail.com

O. V. Glazyrina, R. Z. Dautov, and D. A. Gubaidullina

Accuracy of an implicit scheme for the finite element method with a penalty for a nonlocal parabolic obstacle problem

Abstract. In order to solve a parabolic variational inequality with a nonlocal spatial operator and a one-sided constraint on the solution, a numerical method based on the penalty method, finite elements, and the implicit Euler scheme is proposed and studied. Optimal estimates for the accuracy of the approximate solution in the energy norm are obtained.

Keywords: finite element method, penalty method, parabolic variational inequality, implicit scheme, accuracy estimate.

Olga Vladimirovna Glazyrina

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: glazyrina-olga@yandex.ru

Rafail Zamilovich Dautov

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: rdautov@kpfu.ru

Dinara Airatovna Gubaidullina

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: dinara.gubaidullina@gmail.com