

А.М. ШЕЛЕХОВ

О ТРИАНГУЛЯЦИИ ПЛОСКОСТИ ПУЧКАМИ КОНИК III

Аннотация. Дано существенно более простое чем в [1] решение задачи В. Бляшке: перечислить все регулярные три-ткани, образованные пучками окружностей.

Ключевые слова: три-ткань, регулярная 3-ткань, три-ткань пучка окружностей.

УДК: 514.7: 512.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-77-97

ВВЕДЕНИЕ

В [1] найдены все гладкие триангуляции плоскости, порождаемые тремя пучками окружностей. Технически задача свелась к классификации регулярных три-тканей, образованных этими пучками. Но проведенные в [1] рассуждения оказались весьма сложными, и нам всегда казалось, что у этой задачи должно быть более прозрачное решение. В настоящей статье удалось существенно упростить доказательства, установив предварительно некоторые факты из линейчатой геометрии. Новое доказательство представляет интерес, в частности, потому, что регулярные три-ткани из окружностей и других кривых второго порядка имеют разнообразные приложения: в геометрическом моделировании, в частности, в задачах дизайна (современная архитектура, поверхности автомобилей, самолетов и т. п.), в геометрии фракталов, в теории бильярдов и других разделах современной геометрии [2]–[14]. Поэтому результаты настоящей статьи представляются нам достаточно актуальными.

Говорят, что три гладких семейства кривых на плоскости образуют в некоторой области три-ткань, если в каждой точке этой области кривые семейств попарно трансверсальны. Следуя В. Бляшке [15], мы рассматриваем три-ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов. Это наиболее широкое отношение эквивалентности, сохраняющее трансверсальность линий три-ткани.

Три-ткань называется регулярной, если она эквивалентна (локально диффеоморфна) три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых. Именно регулярные три-ткани задают гладкие триангуляции. Одна из основных задач теории три-тканей состоит в том, чтобы в заданном классе три-тканей найти подкласс регулярных тканей. Например, в классе прямолинейных три-тканей регулярными являются только три-ткани, образованные касательными к кривой класса три (теорема Графа–Зауэра). В. Бляшке в 1951 г. показал, что регулярной является три-ткань, образованная тремя эллиптическими пучками окружностей, вершины которых попарно совпадают. И он же предложил найти все регулярные три-ткани, образованные тремя произвольными пучками окружностей (в [16] мы предложили называть такие ткани круговыми). По существу, пишет В. Бляшке в своей

книге [15], задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению. Но это алгебраическое уравнение оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому "в лоб" решить задачу не удалось. Полная классификация регулярных круговых три-тканей дана в статье [1], где доказано, что *не существует иных классов таких тканей, кроме перечисленных в работе В. Лазаревой* [17].

При доказательстве мы использовали проективную интерпретацию Дарбу многообразия окружностей конформной плоскости. В этой модели точки плоскости (окружности нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики $(xx) = 0$ трехмерного проективного пространства P^3 , которая называется квадрикой Дарбу (мы обозначаем ее Q); окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются точками внешней и внутренней (по отношению к квадрике Дарбу Q) области пространства P^3 соответственно; ортогональные окружности изображаются точками x и y , полярно сопряженными относительно Q , т.е. для них выполняется условие $(xy) = 0$, где (xy) есть билинейная форма, соответствующая квадратичной форме (xx) ; пучки окружностей изображаются прямыми в P^3 , связки окружностей — плоскостями. При этом гиперболические и эллиптические пучки изображаются, соответственно, прямыми, пересекающими и не пересекающими квадрику Q ; параболические пучки — прямыми, касающимися Q ; параболические связки окружностей — плоскостями, касающимися Q ; ортогональные пучки окружностей — прямыми, сопряженными относительно Q . Точки, принадлежащие окружности S , изображаются точками квадрики Q , лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, полярно сопряженной относительно Q образу точки S и т.д. Три пучка окружностей, образующих три-ткань, изображаются, следовательно, тремя прямыми, которые мы будем обозначать ℓ_α , $\alpha = 1, 2, 3$; три окружности три-ткани из разных пучков, проходящие через точку p , изображаются тремя точками прямых ℓ_α , лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу Q в образе точке p .

1. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ КРУГОВЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ В. ЛАЗАРЕВОЙ [17]

Класс 0. Три пучка окружностей принадлежат одной связке. (Прямые ℓ_α принадлежат одной плоскости).

Класс 1.

а) Три гиперболических пучка с общей мнимой окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков.

б) Два эллиптических пучка и один гиперболический с общей вещественной окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков. (Прямые ℓ_α проходят через одну точку и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно квадрики Дарбу).

Класс 2. Два пучка ортогональны, в каждом из них есть окружность, принадлежащая третьему пучку. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены относительно квадрики Дарбу, а прямая ℓ_3 их пересекает).

Класс 3. Два ортогональных параболических пучка, а третий гиперболический, причем одна из его вершин совпадает с общей вершиной параболических пучков. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены и касаются квадрики Дарбу в точке A , через которую проходит третья прямая).

Класс 4. Пример Бляшке: все пучки эллиптические и определяются парами вершин (A, B) , (B, C) , (C, A) . (Прямые ℓ_α проходят через одну точку, а плоскости, содержащие пары этих прямых, касаются квадрики Дарбу).

Класс 5. Два эллиптических пучка определяются точками A, B и B, C , нулевые окружности третьего — гиперболического есть точки A и C . (Прямые ℓ_1, ℓ_2 и прямая ℓ_3 , сопряженная

прямой ℓ_3 , пересекаются в одной точке. Плоскости, определяемые парами прямых ℓ_1 и ℓ_2 , ℓ_1 и $\tilde{\ell}_3$, ℓ_2 и $\tilde{\ell}_3$, касаются квадрики Дарбу).

Класс 6.

а) Два параболических пучка, не принадлежащих одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две пересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания).

б) Два параболических пучка, принадлежащие одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две пересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания. При этом третья прямая проходит через точку пересечения первых двух).

Класс 7. Эллиптический пучок имеет вершины A и B , точки B и C служат нулевыми окружностями гиперболического пучка, а третий — параболический имеет вершину в точке A . При этом общая окружность эллиптического и параболического пучков ортогональна окружности, проходящей через точки A , B и C . (Прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу, проведенной в точке пересечения последней с прямой ℓ_2 . Прямая ℓ_3 касается квадрики Дарбу и пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2).

Класс 4, как уже сказано, впервые описан В. Бляшке [1], остальные классы в разное время получены в работах [16]–[22] (более детальное описание истории вопроса см. в [1]).

Наши доказательства основаны на утверждении, которое мы называем теоремой о границах регулярной три-ткани.

Рассмотрим на плоскости два семейства гладких кривых, и пусть в некоторой точке области определения линии этих семейств образуют слоения и трансверсальны. Тогда в силу непрерывности трансверсальность сохранится и в соседних точках. Однако на границе области определения трансверсальность может нарушаться. Назовем точки, в которых линии разных семейств касаются, *граничными точками* семейств, а множество всех таких точек — *граничной кривой*.

Обозначим через λ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, семейства гладких кривых, образующих три-ткань W . С три-тканью W связаны три граничные кривые Γ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, причем в точках линии Γ_α касаются линии семейств λ_β и λ_γ , где α, β, γ различны и принимают значения 1, 2, 3. Если слоения ткани задать уравнениями $u_\alpha(x, y) = u_\alpha = \text{const}$, то граничные кривые определяются уравнениями

$$\Gamma_\alpha : \quad \Delta_\alpha \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u_\beta}{\partial x} & \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} & \frac{\partial u_\gamma}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

где, как и выше, индексы α, β, γ различны и принимают значения 1, 2, 3.

Исключая из уравнений ткани $u_\alpha(x, y) = u_\alpha$ переменные x и y , получим уравнение

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{1}$$

которое связывает параметры линий этой ткани, проходящих через одну точку, и называется уравнением три-ткани W . Функция F называется функцией этой ткани. (Уравнение три-ткани не определено в особых точках семейств, образующих три-ткань, в частности, в вершинах пучков.) Уравнение три-ткани определено с точностью до замены параметров — локальных диффеоморфизмов вида $u_\alpha \rightarrow \tilde{u}_\alpha$. В частности, такими заменами уравнение регулярной ткани приводится к виду $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, или, более общо, к виду $\tilde{u}_1(u_1) + \tilde{u}_2(u_2) + \tilde{u}_3(u_3) = 0$.

Простое вычисление дает известные соотношения

$$F_\alpha = \lambda \Delta_\alpha,$$

где F_α — обозначение частной производной по переменной u_α , так что в точках граничной кривой Γ_α выполняется равенство $F_\alpha = 0$. Если в некоторой точке M касаются линии всех трех семейств три-ткани, то в этой точке все Δ_α равны нулю, следовательно, все F_α также нули. В [23] такие точки названы граничными точками параболического типа, их совокупность образует параболическую границу. Таким образом, если u_1, u_2, u_3 — параметры линий три-ткани, проходящих через точку параболического типа, то точка (u_1, u_2, u_3) является особой точкой функции ткани.

Теорема 1. *Точки параболической границы три-ткани W являются особыми точками функции этой ткани.*

Теорема 2 ([6]). *Пусть три-ткань W задана в некоторой области D уравнением (1). Три-ткань W является регулярной тогда и только тогда, когда частные производные функции F имеют вид*

$$\begin{aligned} F_1 &= \Theta(u_1, u_2, u_3) \gamma_1(u_1) \pi_2(u_2) \rho_1(u_3), \\ F_2 &= \Theta(u_1, u_2, u_3) \gamma_2(u_1) \pi_1(u_2) \rho_1(u_3), \\ F_3 &= \Theta(u_1, u_2, u_3) \gamma_2(u_1) \pi_2(u_2) \rho_2(u_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда видно, что решениями уравнений $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ в случае регулярной три-ткани могут быть либо особые точки функции ткани, либо линии $u_\alpha = \text{const}$, т. е. линии ткани, причем это свойство является характеристическим.

Таким образом, получаем

Следствие. Граничными кривыми непараболического типа регулярной три-ткани являются линии этой ткани и обратно: если граничными кривыми некоторой три-ткани являются линии этой ткани, то такая три-ткань является регулярной.

2. О ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

2.1. Линейной конгруэнцией прямых в трехмерном проективном пространстве P^3 называется множество всех прямых, пересекающих две скрещивающиеся фиксированные прямые (оси конгруэнции), которые мы обозначим ℓ_1 и ℓ_2 . Пусть в P^3 фиксирована также квадрика Q с уравнением

$$(xx) \equiv g_{ij} x^i x^j = 0, \quad (3)$$

где x^i ($i, j = 1, 2, 3, 4$) — однородные координаты в P^3 относительно некоторого проективного репера A_i . Симметричную билинейную форму (xy) , соответствующую квадратичной форме (xx) , называют скалярным произведением. В частности, $(A_i A_j) = g_{ij}$.

Найдем линейчатые поверхности конгруэнции, все прямые которых касаются квадрики Q .

Пусть V — такая поверхность и $m = LM, L \in \ell_1, M \in \ell_2$ — ее текущая прямая. Выберем проективный репер A_i следующим образом: поместим точки A_1 и A_2 на ℓ_1 , точки A_3 и A_4 — на ℓ_2 , причем вершины A_1 и A_2 (A_3 и A_4) выберем полярно сопряженными относительно Q . Это даст соотношения $(A_1 A_2) = 0$ и $(A_3 A_4) = 0$ или

$$g_{12} = g_{34} = 0. \quad (4)$$

Пусть прямая $m = LM$ касается Q , тогда определитель Грама точек L и M обращается в нуль: $(LL)(MM) = (LM)^2$ или, короче,

$$L^2 M^2 = (LM)^2. \quad (5)$$

Положим $L = A_1 + \lambda A_2$, $M = A_3 + \mu A_4$, тогда в силу (4) получаем

$$\begin{aligned} L^2 &= (A_1 + \lambda A_2)^2 = g_{11} + \lambda^2 g_{22}, \quad L^2 = (A_3 + \mu A_4)^2 = g_{33} + \mu^2 g_{44}, \\ (LM) &= (A_1 + \lambda A_2, A_3 + \mu A_4) = g_{13} + \lambda g_{23} + \mu g_{14} + \lambda \mu g_{24}, \end{aligned}$$

и равенство (5) принимает вид

$$(g_{11} + \lambda^2 g_{22})(g_{33} + \mu^2 g_{44}) = (g_{13} + \lambda g_{23} + \mu g_{14} + \lambda \mu g_{24})^2. \quad (6)$$

Предложение 1. *Линейчатая поверхность V является алгебраической поверхностью четвертого порядка. Точки касания ее квадрики Q образуют кривую четвертого порядка.*

Доказательство. Пусть

$$K = -tL + M = -t(A_1 + \lambda A_2) + A_3 + \mu A_4 \quad (7)$$

— произвольная точка образующей LM поверхности V . Согласно (7), с точностью до множителя координаты x^i точки K имеют вид

$$\rho x^1 = -t, \quad \rho x^2 = -t\lambda, \quad \rho x^3 = 1, \quad \rho x^4 = \mu. \quad (8)$$

Исключая с помощью (8) λ и μ из (6), получим уравнение поверхности V :

$$(g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2)(g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2) = (g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}x^1x^4 + g_{24}x^2x^4)^2. \quad (9)$$

Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь K — точка касания образующей LM и квадрики Q . Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению (9) и уравнению (3) квадрики Q .

Но так как $K = -tL + M$, условие касания в точке K можно записать также в виде $(KL) = 0$, $(KM) = 0$ или

$$-tL^2 + LM = 0, \quad -tLM + M^2 = 0. \quad (10)$$

Из (10) следует соотношение

$$t^2 L^2 = M^2. \quad (11)$$

С учетом (8) равенства (10) и (11) примут вид

$$\begin{aligned} g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}x^1x^4 + g_{24}x^2x^4 &= 0, \\ g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}x^1x^4 + g_{24}x^2x^4 &= 0, \\ g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 &= g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Из этих уравнений два независимых, таким образом, мы получили пучок квадрик, пересекающихся по некоторой кривой четвертого порядка, обозначим ее Υ . Этот пучок содержит квадрику Q , уравнение которой получатся в результате сложения первых двух уравнений (12). Базисом пучка можно считать квадрику Q и квадрику, определяемую последним уравнением (12). $\square$

Далее всюду в статье будем полагать квадрику Q овальной.

2.2. Соотношение (6) определяет биквадратичное соответствие между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , которое имеет следующий геометрический смысл: точке M (L) прямой ℓ_2 (ℓ_1) соответствуют две точки пересечения прямой ℓ_1 (ℓ_2) с конусом касательных к Q из вершины M (L). Если $M = Q \cap \ell_2$, то конус касательных к Q в этой точке становится плоским пучком с вершиной M , а две точки пересечения с конусом касательных склеиваются в точку пересечения касательной плоскости T_M к Q в точке M с прямой ℓ_1 . Параметры точек $Q \cap \ell_1$ и $Q \cap \ell_2$ удовлетворяют равенствам $g_{11} + \lambda^2 g_{22} = 0$ и $g_{33} + \mu^2 g_{44} = 0$ соответственно.

Биквадратичное соответствие (6) нарушается в случае, если одна из прямых ℓ_1 или ℓ_2 лежит в касательной плоскости к квадрике Q в точке ее пересечения с другой прямой. Пусть, например, ℓ_1 лежит в касательной плоскости T_M , тогда все касательные к Q в точке M пересекают ℓ_1 . Следовательно, линейчатая поверхность V распадается на пучок (линейное подмногообразие) и некоторую кубику (ее уравнение будет найдено ниже). Кривая четвертого порядка Υ в этом случае распадается на точку M (вырожденная кривая второго порядка) и на некоторую конику, уравнение которой будет найдено ниже.

Приведем обратное утверждение.

Предложение 2. *Если биквадратичное соответствие (6) нарушается, то одна из прямых ℓ_1 или ℓ_2 лежит в касательной плоскости к квадрике Q в точке ее пересечения с другой прямой.*

Доказательство. Биквадратичное соответствие нарушается, если уравнение (6) удовлетворяется тождественно относительно одной из переменных λ или μ : если относительно λ , то получим соотношения

$$\begin{aligned} g_{22}(g_{33} + \mu^2 g_{44}) &= (g_{23} + \mu g_{24})^2, \\ (g_{13} + \mu g_{14})(g_{23} + \mu g_{24}) &= 0, \\ g_{11}(g_{33} + \mu^2 g_{44}) &= (g_{13} + \mu g_{14})^2. \end{aligned}$$

В случае, например, $g_{13} + \mu g_{14} = 0$, получаем два варианта:

$$g_{11} = 0, \quad g_{13} + \mu g_{14} = 0, \quad g_{22}(g_{33} + \mu^2 g_{44}) = (g_{23} + \mu g_{24})^2$$

и

$$g_{13} + \mu g_{14} = 0, \quad g_{23} + \mu g_{24} = 0, \quad g_{33} + \mu^2 g_{44} = 0.$$

В первом случае вершины репера удовлетворяют соотношениям

$$A_1^2 = 0, \quad (A_1, A_3 + \mu A_4) = 0, \quad A_2^2(A_3 + \mu A_4)^2 = (A_2, A_3 + \mu A_4)^2.$$

Первое равенство означает, что точка A_1 лежит на Q , второе — что точка $A_3 + \mu A_4$ лежит в касательной плоскости к Q в точке A_1 , третье — что прямая $[A_2, A_3 + \mu A_4]$ касается Q . Но в силу равенств $g_{11} = 0$, $g_{12} = 0$ прямая $A_1 A_2$ также касается Q . Таким образом получается, что точки A_2 и $A_3 + \mu A_4$ лежат в одной касательной плоскости и прямая $[A_2, A_3 + \mu A_4]$ касается Q . Но это невозможно, так как квадрика Q овальная, а точка касания A_1 не лежит на прямой $[A_2, A_3 + \mu A_4]$.

Во втором случае находим, что точка $A_3 + \mu A_4$ лежит на Q и полярно сопряжена точкам A_1 и A_2 . Это означает, что прямая $A_1 A_2$ лежит в касательной плоскости к Q в точке пересечения Q и второй прямой. $\square$

Мы рассмотрели случай, когда прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости T_M , $M = Q \cap \ell_2$. В частности, прямая ℓ_1 может оказаться полярно сопряженной прямой ℓ_2 , т. е. будет пересечением касательных плоскостей в точках M и M' пересечения прямой ℓ_2 с квадрикой Q . Тогда линейчатая поверхность V распадается на два пучка касательных к Q в этих точках, а кривая четвертого порядка Υ распадается на две вырожденные коники M и M' .

2.3. Рассмотрим далее случай, когда кривая Υ распадается на две (не обязательно вырожденные) кривые второго порядка, обозначим их Υ_1 и Υ_2 . Заметим, что эти кривые не могут распадаться на вещественные прямые, так как последние принадлежали бы квадрике Q , а это невозможно, так как квадрика Q овальная. Таким образом, Υ_1 и Υ_2 могут быть либо невырожденными кривыми, либо точками. (Условие распада кривой Υ можно было бы найти с помощью "теоремы о двойном соприкосновении": если квадрики имеют касание в двух точках, то их линия пересечения распадается на две коники. Однако непосредственное применение этой теоремы приводит к более сложным вычислениям, чем в данной статье.)

Пусть одна из компонент кривой (например, Υ_1) лежит в плоскости $\Pi_1 : ax^1 + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$. Поместим вершины репера A_1 и A_3 в точки пересечения этой плоскости с прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , тогда ее уравнение примет вид $bx^2 + dx^4 = 0$.

1) Пусть $d \neq 0$, тогда $x^2 \neq 0$ и последнее уравнение запишем в виде $x^4 = hx^2$. С учетом этого первые два уравнения (12) примут вид

$$\begin{aligned} g_{11}(x^1)^2 + (g_{22} + hg_{24})(x^2)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}hx^1x^2 &= 0, \\ g_{33}(x^3)^2 + (g_{44}h^2 + g_{24}h)(x^2)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}hx^1x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как эти уравнения определяют один и тот же конус с вершиной A_4 и направляющей Υ_1 , то их соответствующие коэффициенты должны быть пропорциональны, либо одно из этих уравнений — тождественный нуль.

а) Если хотя бы один из коэффициентов g_{13} , g_{23} , g_{14} отличен от нуля, то получим

$$g_{11} = 0, \quad g_{33} = 0, \quad g_{22} = h^2 g_{44}. \quad (14)$$

б) Если $g_{13} = g_{23} = g_{14} = 0$, то условие пропорциональности дает $g_{11} = 0$, $g_{33} = 0$; вместе с равенством $g_{13} = 0$ это означает, что прямая A_1A_3 целиком лежит на Q , но это невозможно, так как квадрика Q овальная.

с) Если $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 полярно сопряжены относительно Q . Так как квадрика Q овальная, то одна из прямых пересекает Q . Тогда, как отмечено выше, решением будет пара точек пересечения одной из прямых ℓ_1 или ℓ_2 с квадрикой Q .

д) Если одно из уравнений (13) — тождественный нуль, то приходим к случаю б).

В случае а) первые два условия (14) означают, что точки A_1 и A_3 лежат на Q , а в силу (4) в этих точках прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются Q . С другой стороны, в силу (14) уравнения (12) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} g_{22}(x^2)^2 + g_{44}(x^4)^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{24}x^2x^4 &= 0, \\ g_{22}(x^2)^2 &= g_{44}(x^4)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Первое из уравнений (15) есть уравнение квадрики Q . Так как квадрика Q является овальной, а прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются Q , то A_2 и A_4 находятся вне квадрики Q , т. е. $g_{22} > 0$, $g_{44} > 0$. Поэтому второе уравнение (15) задает пару вещественных плоскостей (обозначим их Π_1 и Π_2), которые высекают на Q коники Υ_1 и Υ_2 .

С учетом (14) соотношение (6) примет вид

$$\pm \lambda \mu \sqrt{g_{22}g_{44}} = g_{13} + \lambda g_{23} + \mu g_{14} + \lambda \mu g_{24}, \quad (16)$$

т. е. биквадратичное соответствие, определяемое соотношением (6), становится дробно-линейным (проективным). Известно, что в этом случае прямые LM образуют квадрику. Итак, в рассматриваемом случае линейчатая поверхность V , образованная прямыми LM , распадается на две квадрики (обозначим их V_1 и V_2), образующие которых пересекают прямые

ℓ_1 и ℓ_2 . Уравнения этих квадрик получаются из уравнений (16) после замены переменных (8) и имеют вид

$$g_{13}x^1x^3 + g_{23}x^2x^3 + g_{14}x^1x^4 + (g_{24} \mp \sqrt{g_{22}g_{44}})x^2x^4 = 0. \quad (17)$$

Прямолинейные образующие линейчатых квадрик V_1 и V_2 касаются Q вдоль коник Υ_1 и Υ_2 соответственно.

Квадрики V_1 и V_2 касаются друг друга в точках A_1 и A_3 и имеют в этих точках общие образующие. Действительно, касательная плоскость T_{A_1} к квадрике Q в точке A_1 задается уравнением $g_{13}x^3 + g_{14}x^4 = 0$ и содержит общие образующие ℓ_1 ($x^3 = x^4 = 0$) и $[A_1, g_{14}A_3 - g_{13}A_4]$ ($x^2 = 0, g_{13}x^3 + g_{14}x^4 = 0$); касательная плоскость T_{A_3} к квадрике Q в точке A_3 задается уравнением $g_{13}x^1 + g_{23}x^2 = 0$ и содержит общие образующие ℓ_2 ($x^1 = x^2 = 0$) и $[A_3, g_{23}A_1 - g_{13}A_2]$ ($x^4 = 0, g_{13}x^1 + g_{23}x^2 = 0$).

2) Пусть $d = 0$, тогда компонента Υ_1 лежит в плоскости $x^2 = 0$. С учетом этого уравнения первые два уравнения (12) примут вид

$$\begin{aligned} g_{11}(x^1)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{14}x^1x^4 &= 0, \\ g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{14}x^1x^4 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как эти уравнения определяют одну и ту же гладкую компоненту, то либо их коэффициенты пропорциональны, либо одно из них — тождественный нуль. Первое условие приводит к соотношениям $g_{33} = 0, g_{44} = 0$. Вместе с соотношением $g_{34} = 0$ (см. (4)) это означает, что прямая A_3A_4 лежит на Q , что невозможно, так как квадрика Q является овальной. Если первое уравнение — тождественный нуль, то получаем $g_{11} = g_{13} = g_{14} = 0$. Вместе с условием $g_{12} = 0$ (см. (4)) это означает, что точка A_1 лежит на Q , а точки A_2, A_3, A_4 — в касательной плоскости к Q в точке A_1 . Но это невозможно в силу независимости точек A_i . Если второе уравнение (18) тождественный нуль, то получаем, в частности, $g_{33} = g_{44} = 0$ и приходим к первому случаю.

Доказано

Предложение 3. Пусть линейчатая поверхность V линейной конгруэнции прямых касается квадрики Q , заданной уравнением (3). Тогда точки касания образуют кривую четвертого порядка Υ , образованную пересечением квадрики Q с коникой $g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 = g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2$. В случае, если квадрика овальная и кривая Υ распадается на пару коник Υ_1 и Υ_2 , то

- а) оси конгруэнции ℓ_1 и ℓ_2 касаются квадрики Q в точках пересечения коник Υ_1 и Υ_2 ;
- б) поверхность V распадается на пару линейчатых квадрик V_1 и V_2 , касающихся квадрики Q вдоль коник Υ_1 и Υ_2 ;
- с) в точках пересечения коник Υ_1 и Υ_2 квадрики V_1 и V_2 имеют общие прямолинейные образующие.

Полученные уравнения можно упростить. Для этого заметим, что касательные плоскости T_{A_1} и T_{A_3} пересекаются по прямой

$$[g_{23}A_1 - g_{13}A_2, g_{14}A_3 - g_{13}A_4],$$

полярно сопряженной прямой A_1A_3 относительно Q , причем эта прямая пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках $g_{23}A_1 - g_{13}A_2$ и $g_{14}A_3 - g_{13}A_4$ соответственно. Поместим в эти точки вершины A_2 и A_4 репера соответственно, тогда будут выполняться равенства

$$g_{23} = 0, \quad g_{14} = 0.$$

Далее в пп. 2.4 и 2.5 считаем, что эти равенства выполняются.

2.4. Укажем геометрическую характеристику плоскостей Π_1 и Π_2 , высекающих коники Υ_1 и Υ_2 . В силу второго соотношения (15) уравнения этих плоскостей имеют вид $x^4 = \pm \sqrt{g_{22}}/\sqrt{g_{44}}x^2$. Они пересекают прямую A_2A_4 в точках $C_1 = \sqrt{g_{44}}A_2 + \sqrt{g_{22}}A_4$ и $C_2 = \sqrt{g_{44}}A_2 - \sqrt{g_{22}}A_4$ соответственно. Чтобы охарактеризовать точки C_1 и C_2 , введем стандартную угловую метрику формулой

$$\cos \alpha = \frac{(xy)}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}},$$

где (xy) , как и выше, — билинейная форма, определяемая квадратикой Q . Обозначим угол между точками A_2 и A_4 через φ , а угол между точками A_2 и C_1 через Θ ; имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(A_2A_4)}{\sqrt{(A_2)^2}\sqrt{(A_4)^2}} = \frac{g_{24}}{\sqrt{g_{22}g_{44}}}, \\ \cos \Theta &= \frac{(A_2, \sqrt{g_{44}}A_2 + \sqrt{g_{22}}A_4)}{\sqrt{(A_2)^2}\sqrt{(\sqrt{g_{44}}A_2 + \sqrt{g_{22}}A_4)^2}}. \end{aligned}$$

После вычислений получим

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{g_{24}}{\sqrt{g_{22}g_{44}}}}.$$

Отсюда

$$2 \cos^2 \Theta = 1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \Theta = \frac{1}{2} \varphi.$$

Таким образом, точка C_1 делит пополам угол между точками A_2 и A_4 . Аналогичным свойством обладает и точка C_2 .

Описанное свойство в терминах пучков окружностей формулируется так. Пусть на (евклидовой или конформной) плоскости даны два параболических пучка λ_1 и λ_2 окружностей с вершинами A_1 и A_3 соответственно. Пусть $A_2(A_4)$ — окружность пучка λ_1 (λ_2), проходящая через вершину $A_3(A_1)$ пучка λ_2 (λ_1). Тогда граница пучков λ_1 и λ_2 (множество точек касания окружностей этих пучков) есть пара окружностей C_1 и C_2 , которые делят пополам угол между окружностями A_2 и A_4 .

2.5. Предложение 4. *Полюсы плоскостей Π_1 и Π_2 не могут лежать на прямых ℓ_1 и ℓ_2 .*

Доказательство. Пусть P_1 — полюс плоскости π_1 . Так как прямая A_1A_3 принадлежит Π_1 , то P_1 принадлежит прямой A_2A_4 , полярно сопряженной прямой A_1A_3 .

Предположим, что P_1 принадлежит ℓ_1 , тогда $P_1 = A_2$, причем должно выполняться условие полярной сопряженности $(P_1, A_3) = 0$, которое приводит к равенству $g_{13}g_{22} = 0$. Но это невозможно: в случае $g_{13} = 0$ вместе с равенствами (14) это означает, что прямая A_1A_3 целиком лежит на овальной квадратике Q ; в случае $g_{22} = 0$ в силу (4) и (14) получается, что прямая A_1A_2 целиком лежит на Q .

Предположим, что P_1 принадлежит ℓ_2 , тогда $P_1 = A_4$, причем должно выполняться условие полярной сопряженности $(P_1, A_4) = 0$, которое приводит к равенству $\sqrt{g_{44}}(g_{24} + \sqrt{g_{22}g_{44}}) = 0$. В случае $g_{44} = 0$ получается, что прямая A_3A_4 целиком лежит на Q , что невозможно. В случае $g_{24} + \sqrt{g_{22}g_{44}} = 0$ получаем равенство $(g_{24})^2 = g_{22}g_{44}$, которое означает, что прямая A_2A_4 касается Q . Но это также невозможно, так как прямая A_1A_3 , сопряженная прямой A_2A_4 , пересекает, но не касается Q . Аналогично доказывается, что точка P_2 не может лежать на прямых ℓ_1 и ℓ_2 . $\square$

2.6. Как было отмечено в п. 2.2, в случае, если одна из прямых ℓ_1 или ℓ_2 лежит в касательной плоскости к квадратике Q в точке ее пересечения с другой прямой, то кривая Υ распадается на точку M (вырожденная кривая второго порядка) и на некоторую конику. Найдем уравнение

последней. Пусть прямая ℓ_1 не пересекает Q . Как и выше, поместим на нее вершины репера A_1 и A_2 , причем возьмем их полярно сопряженными относительно Q ; вершины A_3 и A_4 поместим в точки пересечения прямой ℓ_2 с квадрикой Q , причем A_3 — в точку касания Q плоскости, проходящей через ℓ_1 . Тогда будут выполняться равенства

$$g_{12} = 0, g_{33} = 0, g_{44} = 0, g_{13} = 0, g_{23} = 0. \quad (19)$$

Положим, как и выше в п. 2.1, $L = A_1 + \lambda A_2$, $M = A_3 + \mu A_4$, и пусть

$$K = -tL + M = -t(A_1 + \lambda A_2) + A_3 + \mu A_4$$

— произвольная точка прямой LM . Тогда условие касания $(LL)(MM) = (LM)^2$ примет вид

$$2(g_{11} + \lambda^2 g_{22})\mu g_{34} = \mu^2(g_{14} + \lambda g_{24})^2.$$

Решению $\mu = 0$, λ любое, соответствуют касательные к Q в точке A_3 . Другие прямые, образующие поверхность V , определяются соответствием

$$2(g_{11} + \lambda^2 g_{22})g_{34} = \mu(g_{14} + \lambda g_{24})^2. \quad (20)$$

Пользуясь соотношениями (8), из (20) получим уравнение поверхности V :

$$2g_{34}x^3(g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2) = x^4(g_{14}x^1 + g_{24}x^2)^2. \quad (21)$$

Таким образом, поверхность V распадается на пучок касательных к Q в точке A_3 и кубик (21). Координаты точки касания K удовлетворяют уравнению (21) и, кроме того, уравнению квадрики Q , которое в силу соотношений (19) имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{24}x^2x^4 + 2g_{34}x^3x^4 = 0. \quad (22)$$

(Заметим, что $g_{34} \neq 0$, иначе квадрика Q будет линейчатой.) Исключая из уравнений (21) и (22) сумму $g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2$, после преобразований придем к уравнению

$$x^4(g_{14}x^1 + g_{24}x^2 + 2g_{34}x^3)^2 = 0.$$

Равенство $x^4 = 0$ вместе с (22) дает $g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 = 0$. Но так как ℓ_1 не пересекает Q , то $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$, и мы получаем решение $x^1 = x^2 = x^4 = 0$, т. е. точку A_3 .

Плоскость, определяемую уравнением

$$g_{14}x^1 + g_{24}x^2 + 2g_{34}x^3 = 0, \quad (23)$$

обозначим Π . Таким образом, при рассматриваемом положении прямых ℓ_1 и ℓ_2 кривая, образованная точками касания, распадается на точку A_3 — вырожденную кривую второго порядка, и на конику $\Upsilon \equiv Q \cap \Pi$. (Поскольку плоскость Π является двойной, поверхности Q и V имеют касание второго порядка.)

Выясним, может ли полюс P плоскости Π (относительно Q) лежать на прямых ℓ_1 или ℓ_2 . После простых вычислений находим координаты полюса P :

$$P(-g_{22}g_{14}g_{34}, -g_{11}g_{24}g_{34}, g_{22}(g_{14})^2 + g_{11}(g_{24})^2, 2g_{11}g_{22}g_{34}). \quad (24)$$

Так как $g_{11} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$, $g_{34} \neq 0$, то четвертая координата отлична от нуля, поэтому точка P не может лежать на прямой $\ell_1 = A_1A_2$. Первые две координаты обращаются в нуль, если $g_{14} = 0$, $g_{24} = 0$. Тогда $P \equiv A_4$, прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются полярно сопряженными относительно Q , а линейчатая поверхность V вырождается в пучки касательных к Q в точках A_3 и A_4 .

Доказано

Предложение 5. Пусть прямая ℓ_2 пересекает квадрику Q в точках A_3 и A_4 , ℓ_1 лежит в касательной плоскости к Q в точке A_3 , тогда линейчатая поверхность V распадается на

пучок касательных к Q в точке A_3 и кубики, образующие которой касаются квадрики Q вдоль коники $\Upsilon = Q \cap \Pi$. Полюс P плоскости Π не лежит, вообще говоря, на прямых ℓ_1 и ℓ_2 . В случае, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 полярно сопряжены (и только в этом случае) линейчатая поверхность V вырождается в пучки касательных к Q в точках A_3 и A_4 ; в эту же пару точек вырождается двойная коника Υ и полюс P .

2.7. Отметим одно геометрическое свойство рассмотренной конструкции. Найдем точку касания квадрики Q второй плоскости, проходящей через прямую $\ell_1 = A_1A_2$. Пусть $B(x^i)$ — эта точка, тогда выполняются условия $(BA_1) = 0$, $(BA_2) = 0$, $(BB) = 0$, что (в силу (19)) дает соотношения

$$\begin{aligned} x^1 g_{11} + x^4 g_{14} &= 0, \quad x^2 g_{22} + x^4 g_{24} = 0, \\ g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{24}x^2x^4 + 2g_{34}x^3x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$B(-2g_{14}g_{22}g_{34}, -2g_{11}g_{24}g_{34}, g_{22}g_{14}^2 + g_{11}g_{24}^2, 2g_{11}g_{22}g_{34}). \quad (25)$$

Непосредственно проверяется, что точки A_4 и B принадлежат плоскости Π , т. е. лежат на конике Υ .

Далее, из (24) и (25) получаем

$$\begin{aligned} P - B &= (g_{14}g_{22}g_{34}, g_{11}g_{24}g_{34}, 0, 0) \sim (g_{14}g_{22}, g_{11}g_{24}, 0, 0) \equiv T \in \ell_1; \\ 2P - B &= (0, 0, g_{22}g_{14}^2 + g_{11}g_{24}^2, 2g_{11}g_{22}g_{34}) \equiv R \in \ell_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, инвариантная прямая BP пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках T и R соответственно.

Поместим вершину A_2 репера в точку T , тогда $g_{14}g_{22} = 0$, откуда

$$g_{14} = 0. \quad (27)$$

Далее заметим, что из равенств $(BA_2) = 0$, $(BB) = 0$ вытекает, что прямая $BA_2 \equiv BP$ касается квадрики Q в точке B . Отсюда, в свою очередь, вытекает равенство $(BP) = 0$.

Наконец, покажем, что прямая BP является образующей поверхности V . С учетом (27) имеем

$$T = A_2, \quad R = g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4 \sim A_3 + \frac{2g_{22}g_{34}}{g_{24}^2} A_4.$$

Подставляя в (20) значения

$$1/\lambda = 0, \quad \mu = \frac{2g_{22}g_{34}}{g_{24}^2},$$

получим тождество, что и доказывает утверждение.

3. РЕГУЛЯРНЫЕ КРУГОВЫЕ ТРИ-ТКАНИ, У КОТОРЫХ ДВА ПУЧКА НЕ ИМЕЮТ ОБЩЕЙ ОКРУЖНОСТИ

3.1. Пусть W — круговая 3-ткань, образованная семействами окружностей λ_1 , λ_2 и λ_3 . Обозначим соответствующие им прямые в P^3 через ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 . Согласно определению граничная кривая, например Γ_3 , образована точками касания окружностей S_1 и S_2 , $S_1 \in \lambda_1$, $S_2 \in \lambda_2$. Пусть S_0 — такая точка касания, тогда окружности S_1 и S_2 порождают параболический пучок с вершиной S_0 . В P^3 ему соответствует прямая LM , $L \in \ell_1$, $M \in \ell_2$, которая касается квадрики Дарбу Q в точке K — образе точки S_0 . Множество таких точек (см. предложение 1) образует кривую четвертого порядка Υ — образ граничной кривой Γ_3 .

Пусть три-ткань W является регулярной, тогда по теореме о границах граничная кривая должна состоять из окружностей, принадлежащих семействам λ_1 , λ_2 и λ_3 . Это означает,

что граничная кривая Γ_3 распадается на две окружности, каждая из которых (если она не является особой точкой семейства или особой точкой функции ткани) принадлежит какому-либо из указанных семейств; соответственно, образ Υ граничной кривой Γ_3 распадается на две коники, причем полюс каждой из них лежит на какой-либо из прямых λ_1 , λ_2 или λ_3 . При этом указанное свойство границ является достаточным для регулярности ткани.

Предположим теперь, что пучки λ_1 и λ_2 не имеют общей окружности, тогда соответствующие им прямые ℓ_1 и ℓ_2 не имеют общей точки, т. е. скрещиваются. В этом случае, как показано в предложениях 3 и 5, граничная кривая Υ распадается на две коники Υ_1 и Υ_2 (образы окружностей) только в трех случаях:

а) прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются Q ;

б) одна из прямых, например ℓ_1 , лежит в касательной плоскости к Q в точке ее пересечения с ℓ_2 ;

с) прямые ℓ_1 и ℓ_2 полярно сопряжены относительно квадрики Q , но не касаются Q .

В первом случае по теореме о границах прообразы коник Υ_1 и Υ_2 должны принадлежать одному из семейств λ_1 , λ_2 или λ_3 . Это означает, что полюсы P_1 и P_2 плоскостей этих коник должны лежать на одной из прямых ℓ_1 , ℓ_2 или ℓ_3 . Но в силу предложения 4 на ℓ_1 и ℓ_2 полюсы лежать не могут, поэтому они лежат на ℓ_3 . Следовательно, $\ell_3 = P_1P_2$, и в силу проведенной в п. 2.3 канонизации репера $\ell_3 = A_2A_4$. В результате мы получаем следующую картину: прямые $\ell_1 = A_1A_2$ и $\ell_2 = A_3A_4$ касаются Q соответственно в точках A_1 и A_3 , прямая $\ell_3 = A_2A_4$ полярно сопряжена прямой A_1A_3 . Мы получили класс 6.1 регулярных круговых три-тканей по классификации Лазаревой. (В дальнейшем будем писать короче: "мы получили класс 6.1".)

Прежде чем рассматривать другие варианты расположения трех прямых, отметим еще один важный случай расположения двух прямых, при котором образ граничной кривой является коникой:

д) прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости, обозначим ее π_{12} . Образ граничной кривой в этом случае будет состоять из точки пересечения прямых (образ общей окружности пучков) и коники $q = Q \cap \pi_{12}$. Полюс P_{12} плоскости π_{12} (образ окружности, ортогональной окружностям обоих пучков) принадлежит прямой ℓ_1 (ℓ_2), если и только если $P_{12} \in Q$, плоскость π_{12} и прямая ℓ_1 (ℓ_2) касаются Q в точке P_{12} ; в этом случае все окружности пучков проходят через P_{12} , т. е. P_{12} является особой точкой функции ткани.

3.2. Рассмотрим случай 3). Пусть $\ell_1 = A_1A_2$ не пересекает Q , $\ell_2 = A_3A_4$ пересекает Q в точках A_3 и A_4 . Тогда будут выполняться условия сопряженности

$$g_{12} = 0, \quad g_{33} = 0, \quad g_{44} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{14} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad g_{24} = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим прямые ℓ_1 и ℓ_3 . Так как ℓ_1 не касается Q , то ℓ_1 и ℓ_3 могут располагаться либо как в случае б), либо как в случае д).

1) Прямые ℓ_1 и ℓ_3 располагаются как в случае б), тогда ℓ_3 проходит через одну из точек A_3 или A_4 , пусть через A_3 . Найдем конику Υ , соответствующую паре прямых ℓ_1 и ℓ_3 , как это сделано в п. 2.6. Прежде всего поместим вершину репера A_2 в плоскость прямых ℓ_2 и ℓ_3 , тогда можно положить $\ell_3 = [A_3, A_2 + kA_4]$, где k — постоянная.

Положим, как и выше, $L = A_1 + \lambda A_2$, $M = \mu A_3 + A_2 + kA_4$. В силу соотношений (28) условие касания прямой LM и квадрики Q $((LL)(MM) = (LM)^2)$ примет вид

$$(g_{11} + \lambda^2 g_{22})(g_{22} + 2\mu k g_{34}) = \lambda^2 g_{22}^2$$

или

$$g_{11}g_{22} + 2\mu k g_{11}g_{34} + 2\lambda^2 \mu k g_{22}g_{34} = 0. \quad (29)$$

Пусть далее

$$K = -tL + M = -t(A_1 + \lambda A_2) + \mu A_3 + A_2 + kA_4$$

— произвольная точка прямой LM . Из последнего равенства находим координаты точки K :

$$\rho x^1 = -t, \quad \rho x^2 = -t\lambda + 1, \quad \rho x^3 = \mu, \quad \rho x^4 = k. \quad (30)$$

С учетом этих равенств уравнение (29) примет вид

$$g_{11}g_{22}(x^1)^2 x^4 + 2k^2 g_{11}g_{34}(x^1)^2 x^2 + 2g_{22}g_{34}x^3(kx^2 - x^4)^2 = 0. \quad (31)$$

Пусть теперь K — точка касания прямой LM и квадрики Q . Координаты этой точки удовлетворяют, помимо уравнения (31), уравнению квадрики Q , которое в силу равенств (28) имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{34}x^3x^4 = 0. \quad (32)$$

Исключая из (31) и (32) $(x^1)^2$, после преобразований приходим к уравнению

$$x^4(x^2 + 2gkx^3)^2 = 0, \quad g = g_{34}/g_{22}. \quad (33)$$

Уравнению $x^4 = 0$, как и выше, отвечает точка A_3 — вырожденная коника. Двойная плоскость

$$x^2 + 2gkx^3 = 0$$

(обозначим ее Π') отсекает конику Υ . Согласно теореме о границах, в случае регулярности ткани полюс плоскости Π' (обозначим его P') должен лежать на одной из прямых ℓ_1 — ℓ_3 . Но в силу предложения 5 он не может лежать на ℓ_1 и ℓ_3 , следовательно, он должен лежать на ℓ_2 . После простых вычислений находим координаты полюса $P'(0, g_{34}, 0, 2kg_{34})$. Так как $g_{34} \neq 0$, то полюс P' лежит на прямой $\ell_2 = A_3A_4$ только при $k = 0$. В этом случае прямая $\ell_3 = A_2A_3$ пересекает полярно сопряженные прямые ℓ_1 и ℓ_2 , и второе условие регулярности выполнено. А так как полюс плоскости прямых ℓ_2 и ℓ_3 — точка A_1 лежит на ℓ_1 , то все условия регулярности выполнены и ткань является регулярной. Нетрудно видеть, мы получили частный случай класса 2.

2) Прямые ℓ_1 и ℓ_3 располагаются как в случае d), т. е. ℓ_3 пересекает ℓ_1 . Поместим в точку пересечения вершину репера A_1 .

Если ℓ_3 пересекает и $\ell_2 \equiv A_3A_4$, то по теореме о границах все условия регулярности будут выполнены и мы получаем класс 2.

Предположим, что ℓ_3 не пересекает ℓ_2 , тогда ℓ_2 и ℓ_3 должны располагаться как в случае b): ℓ_3 лежит либо в плоскости $A_1A_2A_3$, либо в плоскости $A_1A_2A_4$. Пусть $\ell_3 \in A_1A_2A_3$. При этом точка A_3 — полюс плоскости $A_1A_2A_3$, в которой лежат прямые ℓ_1 и ℓ_2 , лежит на прямой ℓ_2 , т. е. одно из условий регулярности выполнено.

Найдем образ граничной кривой Γ_1 . Пусть $\ell_3 = [A_1, A_2 + kA_3]$, положим $L = A_3 + \lambda A_4$, $M = \mu A_1 + A_2 + kA_3$. В силу соотношений (25) условие касания прямой LM и квадрики Q примет вид

$$2\lambda g_{34}(g_{11}\mu^2 + g_{22}) = (\lambda k g_{34})^2.$$

Значениям $\lambda = 0$, μ любое отвечает пучок касательных к Q в точке A_3 . Для остальных точек получаем

$$2(g_{11}\mu^2 + g_{22}) = k^2 \lambda g_{34}. \quad (34)$$

Пусть далее

$$K = -tL + M = -t(A_3 + \lambda A_4) + \mu A_1 + A_2 + kA_3$$

— произвольная точка прямой LM . Из последнего равенства находим координаты точки K :

$$\rho x^1 = \mu, \quad \rho x^2 = 1, \quad \rho x^3 = -t + k, \quad \rho x^4 = -t\lambda.$$

Отсюда

$$\mu = x^1/x^2, \quad \lambda = \frac{x^4}{x^3 - kx^2},$$

и уравнение (34) принимает вид

$$2(g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2)(x^3 - kx^2) = k^2 g_{34} x^4 (x^2)^2. \quad (35)$$

Пусть теперь K — точка касания прямой LM и квадрики Q , тогда координаты этой точки удовлетворяют также уравнению (32) квадрики Q . Из (32) и (35) получим уравнение

$$x^4(kx^2 - 2x^3)^2 = 0.$$

Уравнению $x^4 = 0$, как и выше, отвечает точка A_3 — вырожденная коника. Двойная плоскость

$$kx^2 - 2x^3 = 0$$

(обозначим ее Π'') отсекает на квадрике Q конику. Согласно теореме о границах в случае регулярности ткани полюс плоскости Π'' (обозначим его P'') должен лежать на одной из прямых $\ell_1 - \ell_3$. Но в силу предложения 5 он не может лежать на ℓ_2 и ℓ_3 , следовательно, он должен лежать на ℓ_1 . После простых вычислений находим координаты полюса $P''(0, kg_{34}, 0, -2g_{22})$. Так как $g_{22} \neq 0$, то полюс P'' не может лежать на прямой $\ell_1 = A_1A_2$. Следовательно, прямые ℓ_2 и ℓ_3 не могут располагаться как в случае b), т.е. полученная три-ткань не является регулярной.

3.3. Пусть прямые $\ell_1 = A_1A_2$ и $\ell_2 = A_3A_4$ располагаются как в случае b), тогда выполняются соотношения (19). Будем считать, что g_{14} и g_{24} одновременно не нули, иначе получим случай c), который уже рассмотрен. Напомним, что образ границы Γ_3 есть коника Υ , высекаемая плоскостью (23), полюс P которой относительно квадрики Дарбу Q имеет координаты (24); точка B касания квадрики Q и второй плоскости, проходящей через $\ell_1 = A_1A_2$, лежит на Υ и имеет координаты (25); прямая BP касается Q и пересекает ℓ_1 . При этом $B \neq A_4$, иначе прямые ℓ_1 и ℓ_2 будут полярно сопряжены, а этот случай уже рассмотрен.

Возможны следующие варианты расположения прямой ℓ_3 относительно прямых ℓ_1 и ℓ_2 .

Относительно ℓ_1 :

- e) прямая ℓ_3 проходит через точку A_3 ;
- f) прямая ℓ_3 проходит через точку B ;
- g) прямая ℓ_3 пересекает ℓ_1 .

Относительно ℓ_2 :

- h) прямая ℓ_3 лежит в касательной плоскости к Q в точке A_3 ;
- i) прямая ℓ_3 лежит в касательной плоскости к Q в точке A_4 ;
- j) прямая ℓ_3 пересекает ℓ_2 .

Так как квадрика Q овальная, то возможны только варианты e)+h), g)+h), g)+i), e)+j), f)+j), g)+j).

1) Вариант e)+h): прямая ℓ_3 проходит через точку A_3 и лежит в касательной плоскости к Q в точке A_3 . В этом случае ℓ_3 пересекает прямую ℓ_1 . Поместим в точку пересечения вершину репера A_1 , тогда $\ell_3 = A_1A_3$.

Теперь вспомним, что согласно теореме о границах в случае регулярности ткани полюс P должен лежать на $\ell_3 = A_1A_3$. Поэтому из (24) получаем равенства

$$g_{11}g_{24}g_{34} = 0, \quad g_{11}g_{22}g_{34} = 0.$$

Но $g_{11} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$, $g_{34} \neq 0$, поэтому такая регулярная три-ткань не существует.

2) Вариант g)+h): прямая ℓ_3 пересекает ℓ_1 и лежит в касательной плоскости к Q в точке A_3 . Поместим в точку пересечения прямых ℓ_3 и ℓ_1 вершину репера A_1 , тогда $\ell_3 = [A_1, A_2 + kA_3]$. Согласно теореме о границах, в случае регулярности ткани полюс P должен лежать на ℓ_3 , поэтому его четвертая координата должна равняться нулю: $g_{11}g_{22}g_{34} = 0$. Но $g_{11} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$, $g_{34} \neq 0$, поэтому такая регулярная три-ткань не существует.

3) Вариант g)+i): прямая ℓ_3 пересекает ℓ_1 и лежит в касательной плоскости к Q в точке A_4 . Поместим в точку пересечения прямых ℓ_3 и ℓ_1 вершину репера A_1 , тогда A_1 лежит в касательной плоскости точки A_4 , что дает соотношение (27). Согласно п. 2.7 в силу этого условия прямая BP содержит точку A_2 . Кроме того, в силу регулярности на ℓ_3 должен лежать полюс P , а так как точки B , P и A_2 лежат на одной прямой, то получаем, что точка B лежит в плоскости π_{13} прямых ℓ_1 и ℓ_3 . Как показано в п. 2.7, $(BP) = 0$, следовательно, *плоскость π_{13} касается квадрики Q в точке B* . Заметим, что прообраз точки B не входит в граничную кривую, а представляет собой точку, через которую проходят окружности обоих пучков — прообразов прямых ℓ_1 , ℓ_3 , т. е. является особой точкой уравнения ткани.

Осталось проверить еще одно условие регулярности: является ли граничная кривая Γ_1 линией первого семейства. Тем же методом, что и ранее, найдем образ кривой Γ_1 в P^3 . Пусть $L = A_3 + \lambda A_4$ и $M = \mu A_1 + \bar{P} = \mu A_1 - g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$ — произвольные точки на ℓ_2 и ℓ_3 соответственно. Условие касания прямой LM квадрики Q ($L^2M^2 = (LM)^2$) после вычислений примет вид

$$\lambda(g_{11}\mu^2 + g_{22}g_{24}^2g_{34}^2) = 2g_{22}^2g_{34}^3. \quad (36)$$

Пусть теперь

$$K(x^i) = -t(A_3 + \lambda A_4) + \mu A_1 - g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$$

— произвольная точка прямой LM , тогда

$$\rho x^1 = \mu, \quad \rho x^2 = -g_{24}g_{34}, \quad \rho x^3 = -t + g_{24}^2, \quad \rho x^4 = -\lambda t + 2g_{22}g_{34}.$$

Отсюда находим

$$\mu = -g_{24}g_{34} \frac{x^1}{x^2}, \quad \lambda = \frac{g_{34}(2g_{22}x^2 + g_{24}x^4)}{g_{24}(g_{24}x^2 + g_{34}x^3)}.$$

Поставляя в (36), получим уравнение линейчатой кубики V , которую описывает прямая LM :

$$g_{24}(2g_{22}x^2 + g_{24}x^4)(g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2) = 2g_{22}^2(x^2)^2(g_{24}x^2 + g_{34}x^3). \quad (37)$$

Если точка K есть точка касания прямой LM и Q , то координаты этой точки удовлетворяют также уравнению (22) квадрики Q , которое с учетом условия $g_{14} = 0$ имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{24}x^2x^4 + 2g_{34}x^3x^4 = 0. \quad (38)$$

Исключая из (37) и (38) сумму $g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2$, после преобразований получим

$$(g_{24}x^2 + g_{34}x^3)(g_{22}x^2 + g_{24}x^4)^2 = 0.$$

Уравнение $g_{24}x^2 + g_{34}x^3 = 0$ вместе с (38) дает

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 = 0,$$

откуда $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и мы получаем точку A_4 , через которую проходит пучок прямых, пересекающих ℓ_2 и ℓ_3 .

Решение $g_{22}x^2 + g_{24}x^4 = 0$ дает конику на Q — образ нетривиальной границы Γ_1 . В случае регулярности полюс плоскости $g_{22}x^2 + g_{24}x^4 = 0$ относительно Q должен лежать на прямой ℓ_1 . Этим полюсом оказывается точка A_2 , которая лежит на $\ell_1 = A_1A_2$. Следовательно, и это условие регулярности выполнено, поэтому рассматриваемая три-ткань является регулярной. Нетрудно увидеть, что это класс 5.

3.4. Нам представляется интересным дать прямое доказательство регулярности последнего класса тканей, обозначим его W . Для этого найдем уравнение ткани W в терминах перенесения Дарбу. Пусть

$$L = A_1 + \lambda A_2, \quad M = A_3 + \mu A_4, \quad N = \nu A_1 - g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4 \quad (39)$$

— произвольные точки прямых ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 соответственно. Напомним, что уравнение три-ткани связывает параметры линий ткани, проходящих через одну точку. На модели Дарбу это означает, что точки, соответствующие такой тройке окружностей, лежат в плоскости, касающейся квадрики Q . Условие касания состоит в том, что соответствующий определитель Грама равен нулю:

$$\begin{vmatrix} L^2 & (LM) & (LN) \\ (LM) & M^2 & (MN) \\ (LN) & (MN) & N^2 \end{vmatrix} = 0.$$

После вычислений получим

$$\begin{vmatrix} g_{11} + g_{22}\lambda^2 & g_{24}\lambda\mu & g_{11}\nu + g_{22}g_{24}g_{34}\lambda \\ g_{24}\lambda\mu & 2g_{34}\mu & 2g_{22}g_{34}^2 \\ g_{11}\nu + g_{22}g_{24}g_{34}\lambda & 2g_{22}g_{34}^2 & g_{11}\nu^2 + g_{22}g_{24}^2g_{34}^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\mu^2 \tilde{\lambda} g_{24}^2 (g_{11}\tilde{\nu} + g_{22}g_{24}^2g_{34}^2) - 2\mu [g_{11}g_{22}g_{34}(g_{24}^2g_{34}^2 + \tilde{\lambda}\tilde{\nu}) + 2\tilde{\lambda}g_{22}^2g_{24}^2g_{34}^3] + 4g_{22}^2g_{34}^4(g_{11} + g_{22}\tilde{\lambda}) = 0,$$

где $\lambda^2 = \tilde{\lambda}$, $\nu^2 = \tilde{\nu}$ (допустимая замена параметров).

Получилось квадратное уравнение относительно μ . Стандартными вычислениями находим его дискриминант

$$D = 4g_{11}^2g_{22}^2g_{34}^2(g_{24}^2g_{34}^2 - \tilde{\lambda}\tilde{\nu})^2$$

и корни

$$\mu_1 = \frac{2g_{22}g_{34}}{g_{24}^2}, \quad \mu_2 = 2g_{22}g_{34}^3 \frac{g_{11} + g_{22}\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}(g_{11}\tilde{\nu} + g_{22}g_{24}^2g_{34}^2)}.$$

Второе уравнение можно записать в виде $F(\lambda, \mu, \nu) = 0$, где функция F полилинейная. Известно, что такая три-ткань является регулярной.

Выясним геометрический смысл первого решения. Значению μ_1 соответствует точка $M' = A_3 + \mu A_4 \sim g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$, которая является пересечением прямых ℓ_2 и $A_2\bar{P}$. Таким образом, точка M' лежит в плоскости π_{13} , содержащей прямые ℓ_1 и ℓ_3 . Пусть L и N — точки на ℓ_1 и ℓ_3 . Чтобы найти соответствующую им точку M на ℓ_2 , надо провести через L и N касательную плоскость к Q , точка пересечения этой плоскости с ℓ_2 и будет искомой. Но через точки L и N проходит две плоскости, одна из которых всегда π_{13} при любых значениях λ и ν . То есть в одном из двух случаев соответствие вырождается в постоянную функцию $(\lambda, \nu) \rightarrow \frac{2g_{22}g_{34}}{g_{24}^2}$.

3.5. Продолжим рассматривать допустимые варианты расположения прямых, выделенные в начале п. 3.3.

4) Вариант е)+j): прямая ℓ_3 проходит через точку A_3 (и, следовательно, пересекает ℓ_2). Пусть $\ell_3 = [A_3, aA_1 + bA_2 + cA_4]$. Обозначим плоскость прямых ℓ_2 и ℓ_3 через π_{23} . В соответствии с предложением 5 в случае регулярности полюс P_{23} этой плоскости должен лежать на прямой ℓ_1 . Поместим в полюс вершину репера A_1 , тогда $(A_1A_4) = 0$, $(A_1, aA_1 + bA_2 + cA_4) = 0$, откуда $g_{14} = 0$, $ag_{11} = 0$. Так как $g_{11} \neq 0$, то $a = 0$ и $\ell_3 = [A_3, bA_2 + cA_4]$.

Проверим условие регулярности: является ли граничная кривая Γ_2 линией первого семейства. Тем же методом, что и ранее, найдем образ кривой Γ_2 в P^3 . Пусть $L = A_1 + \lambda A_2$, $N = \mu A_3 + bA_2 + cA_4$ — произвольные точки на ℓ_1 и ℓ_3 соответственно. Условие касания прямой LN квадрики Q ($L^2N^2 = (LN)^2$) после вычислений примет вид

$$g_{11}(g_{22}b^2 + 2g_{34}\mu c + 2g_{34}bc) = \lambda^2(g_{24}c^2 - 2g_{22}g_{34}\mu c). \quad (40)$$

Пусть теперь

$$K = -t(A_1 + \lambda A_2) + \mu A_3 + bA_2 + cA_4$$

— произвольная точка прямой LN , тогда

$$\rho x^1 = -t, \quad \rho x^2 = -t\lambda + b, \quad \rho x^3 = \mu, \quad \rho x^4 = c.$$

Отсюда находим

$$\mu = c \frac{x^3}{x^4}, \quad \lambda = \frac{cx^2 - bx^4}{cx^1}.$$

Подставляя в (40), получим уравнение линейчатой поверхности V , которую описывает прямая LN :

$$g_{11}(x^1)^2(2c^2g_{34}x^3 + g_{22}b^2x^4 + 2g_{24}bcx^4) = (cx^2 - bx^4)^2(g_{24}^2x^4 - 2g_{22}g_{34}x^3).$$

Если точка K есть точка касания прямой LM и Q , то координаты этой точки удовлетворяют также уравнению квадрики Q , которое с учетом условия $g_{14} = 0$ имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{24}x^2x^4 + 2g_{34}x^3x^4 = 0.$$

Исключая из последних уравнений $g_{11}(x^1)^2$, после длинных, но несложных преобразований получим уравнение

$$x^4(x^2(g_{22}b + g_{24}c) + 2cg_{34}x^3 + bg_{24}x^4)^2 = 0.$$

Решение $x^4 = 0$ дает точку A_3 . Плоскость

$$x^4(g_{22}b + g_{24}c) + 2cg_{34}x^3 + bg_{24}x^4 = 0 \quad (41)$$

высекает на Q конику Υ_2 — образ нетривиальной границы Γ_2 .

Обозначим через P' полюс плоскости (41). После стандартных вычислений находим его координаты:

$$P'(0, (g_{22}b + g_{24}c)g_{34}, cg_{24}^2, 2cg_{22}g_{34}).$$

В случае регулярности полюс P' должен лежать на прямой ℓ_2 , что дает соотношение $g_{22}b + g_{24}c = 0$. Отсюда

$$b = kg_{24}, \quad c = kg_{22} \quad \text{и} \quad \ell_3 = [A_3, g_{24}A_2 + g_{22}A_4].$$

Последнее условие регулярности состоит в том, что полюс P (см. (24)) должен лежать на прямой ℓ_3 . Это дает соотношение

$$\frac{-g_{11}g_{24}g_{34}}{g_{34}} = \frac{2g_{11}g_{22}g_{34}}{g_{22}},$$

откуда следует $g_{11}g_{34} = 0$, что невозможно. Следовательно, рассматриваемая три-ткань не может быть регулярной.

5) Вариант f)+j): ℓ_3 проходит через B и пересекает ℓ_2 (но не в точке A_3 , иначе прямые ℓ_1 и ℓ_3 будут полярно сопряжены, и мы приходим к рассмотренному выше случаю c). По условию регулярности полюс P должен лежать на прямой ℓ_3 , следовательно, $\ell_3 = BP$. Как показано в п. 2.7, инвариантная прямая BP пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 , т.е. мы пришли к варианту g)+j). (Это может быть не общее расположение вида g)+j).) Поместим, как в п. 2.6, вершину репера A_2 в точку $\ell_1 \cap \ell_3$, тогда $g_{14} = 0$ и $R = \ell_2 \cap \ell_3(0, 0, g_{24}^2, 2g_{22}g_{34})$.

Следующее условие регулярности выполняется: полюс плоскости $\ell_2 \cup \ell_3 = A_2A_3A_4$ — точка A_1 — лежит на ℓ_1 . Далее, плоскость $\pi_{13} = [A_1A_2B]$ касается Q в точке B , которая является образом особой точки, так что здесь границы нет. Следовательно, все условия выполнены и три-ткань является регулярной. Это класс 7.

6) Вариант g)+j): ℓ_3 пересекает ℓ_1 и ℓ_2 . Положим $A_2 \equiv \ell_1 \cap \ell_3$, тогда $\ell_3 = [A_2, A_3 + \mu A_4]$. В силу регулярности $P \in \ell_3$, отсюда первая координата точки P равна нулю: $g_{22}g_{14}g_{34} = 0$ (см. (24)). Так как $g_{22} \neq 0$, $g_{34} \neq 0$, то $g_{14} = 0$, то $P(0, -g_{24}g_{34}, (g_{24})^2, 2g_{22}g_{34})$. Если $P \in \ell_3$ и $A_2 \in \ell_3$, то линейная комбинация

$$P + g_{24}g_{34}A_2 = (g_{24})^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4 \equiv R$$

также принадлежит ℓ_3 . Отсюда следует $B \in \ell_3$, т.е. мы приходим к предыдущему случаю 5).

3.6. Дадим непосредственное доказательство регулярности в последнем случае 5). Пусть

$$L = A_1 + \lambda A_2, \quad M = A_3 + \mu A_4, \quad N = \nu A_2 + g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34} A_4.$$

Как и в п. 3.4, найдем уравнение ткани в терминах модели Дарбу, для чего приравняем нулю соответствующий определитель Грама (39). После вычислений получим

$$\begin{vmatrix} g_{11} + g_{22}\lambda^2 & g_{24}\lambda\mu & (LN) \\ g_{24}\lambda\mu & 2g_{34}\mu & (MN) \\ (LN) & (MN) & N^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$(LN) = \lambda(g_{22}\nu + 2g_{22}g_{24}g_{34}), \quad (MN) = 2g_{22}g_{34}^2 + g_{24}\mu\nu + g_{24}^2g_{34}\mu, \\ N^2 = g_{22}\nu^2 + 4\nu g_{22}g_{24}g_{34} + 4g_{22}g_{24}^2g_{34}^2.$$

Разделим первую строку и первый столбец на λ и обозначим $\frac{g_{11} + g_{22}\lambda^2}{\lambda^2} = \bar{\lambda}$. Вычислив определитель, получим равенство

$$\frac{\bar{\lambda}}{\mu} X + Y = 0, \tag{42}$$

где

$$X = 2g_{34}\mu g_{22}(\nu + 2g_{24}g_{34})^2 - (2g_{22}g_{34}^2 + g_{24}\mu\nu + g_{24}^2g_{34}\mu)^2, \\ Y = -g_{24}^2g_{22}\mu(\nu + 2g_{24}g_{34})^2 - 2g_{22}^2g_{34}(\nu + 2g_{24}g_{34})^2 + 2g_{24}g_{22}(\nu + 2g_{24}g_{34})(2g_{22}g_{34}^2 + g_{24}\mu\nu + g_{24}^2g_{34}\mu).$$

Обозначим $\mu_0 = \frac{2g_{22}g_{34}}{g_{24}^2}$. Непосредственно проверяется, что $X(\mu_0) = 0$, $Y(\mu_0) = 0$. Следовательно, многочлены X и Y делятся на $\mu - \mu_0$. В результате уравнение (42) примет вид

$$\left(\frac{\bar{\lambda}}{\mu} \bar{X}(\nu) + Y(\nu) \right) (\mu - \mu_0) = 0.$$

Приравнивая нулю первую скобку, получим уравнение рассматриваемой три-ткани. Так как в нем переменные разделяются, то ткань является регулярной. Геометрический смысл решения $\mu = \mu_0$ представлен в конце п. 3.4.

4. КРУГОВЫЕ ТРИ-ТКАНИ, У КОТОРЫХ КАЖДЫЕ ДВА ПУЧКА ИМЕЮТ ОБЩУЮ ОКРУЖНОСТЬ

Возможны только два варианта такого расположения прямых в P^3 : все прямые в одной плоскости и все прямые имеют общую точку. В первом случае три-ткань образована тремя пучками одной связки окружностей и является регулярной. Это класс 0. На модели Дарбу окружности, проходящие через одну точку, изображаются точками L, M, N прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 , лежащими на одной прямой. Если эта прямая касается квадрики Дарбу Q в точке A , то соответствующие точкам L, M, N окружности касаются друг друга, т. е. точка A будет образом параболической граничной точки. Отсюда следует, что полюс плоскости прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 есть образ особой точки функции соответствующей круговой три-ткани (см. теорему 1).

Рассмотрим второй случай: прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 имеют общую точку. Последняя в силу теоремы 1 будет особой точкой функции ткани. Обозначим, как и выше, плоскость прямых ℓ_α и ℓ_β через $\pi_{\alpha\beta}$, а полюс этой плоскости — через $P_{\alpha\beta}$.

1) Предположим, все полюсы $P_{\alpha\beta}$ не лежат на квадрике Q . Для регулярности ткани необходимо и достаточно условий $P_{\alpha\beta} \in \ell_\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, и все различны. Поместим вершину репера A_γ в точку $P_{\alpha\beta}$, вершину A_4 — в общую точку прямых ℓ_α . Тогда репер A_i будет автополярным относительно квадрики Q и мы получаем класс 1.

2) Пусть одна из плоскостей $\pi_{\alpha\beta}$, например π_{12} , касается Q в точке K , а две другие плоскости не касаются Q . Тогда точка K будет полюсом плоскости π_{12} и образом особой точки. Условие регулярности будет состоять в том, что полюс плоскости π_{23} будет лежать на ℓ_1 , а полюс плоскости π_{13} — на ℓ_2 . Выберем репер как в случае 1), положив $P_{23} = A_1, P_{13} = A_2$, тогда в силу условия полярности получим соотношения

$$g_{12} = g_{13} = g_{14} = 0, \quad g_{23} = g_{24} = 0. \quad (43)$$

В силу условий (43) условие касания плоскости π_{12} квадрики Q будет состоять в том, что определитель Грама для точек A_1, A_2, A_4 равен нулю, что в силу (43) дает соотношение $g_{11}g_{22}g_{44} = 0$.

Если, например, $g_{11} = 0$, то точка A_1 лежит на Q , а в силу условий $g_{12} = g_{13} = g_{14} = 0$ получается, что все точки A_i , а следовательно, и все прямые ℓ_α лежат в касательной плоскости к Q в точке A_1 . Таким образом, мы приходим к классу 0. То же самое будет и в случае $g_{22} = 0$.

Если $g_{44} = 0$, то точка A_4 лежит на квадрике Q , и мы получаем класс 3.

3) Пусть теперь плоскости π_{12} и π_{13} касаются Q . Тогда условие регулярности состоит в том, что $P_{23} \in \ell_1$. Положим $P_{23} = A_1$, тогда условиями регулярности будут

$$g_{12} = g_{13} = g_{14} = 0.$$

При этих соотношениях условия касания плоскостей π_{12} и π_{13} квадрики Q примут соответственно вид

$$g_{11}(g_{22}g_{44} - g_{24}^2) = 0, \quad g_{11}(g_{33}g_{44} - g_{34}^2) = 0.$$

Так как $g_{11} \neq 0$, то получаем

$$g_{22}g_{44} - g_{24}^2 = 0, \quad g_{33}g_{44} - g_{34}^2 = 0,$$

а это условия касания прямых $\ell_2 = A_2A_4$ и $\ell_3 = A_3A_4$ и квадррики Q . Итак, мы получили, что прямые $\ell_2 = A_2A_4$ и $\ell_3 = A_3A_4$ касаются Q , а третья прямая является пересечением касательных плоскостей к Q в точках касания. Нетрудно видеть, что это класс 6 б).

4) Все три плоскости $\pi_{\alpha\beta}$ касаются Q . Это класс 4.

В заключение еще раз проиллюстрируем действие теоремы о границах. В [14] доказана регулярность три-тканей, образованных тремя семействами коник из следующих четырех: два сопряженных (ортогональных) пучка окружностей с вершинами A и B , семейство софокусных эллипсов или софокусных гипербол с фокусами A и B . Рассмотрим, например, три-ткань из сопряженных пучков окружностей и софокусных эллипсов. Для ортогональных пучков окружностей граничная кривая вырождается в пару точек A и B , которые будут особыми точками эллиптического семейства окружностей и поэтому будут особыми точками функции ткани (см. п. 3.2). В силу симметрии граничными точками для эллиптического пучка окружностей и семейства софокусных эллипсов будет срединный перпендикуляр отрезка AB , который является радикальной осью гиперболического пучка окружностей, т. е. входит в этот пучок. Граничными точками гиперболического пучка окружностей и семейства софокусных эллипсов будет прямая AB — радикальная ось эллиптического пучка окружностей, которая входит в этот пучок. Таким образом, все условия регулярности, вытекающие из теоремы о границах, выполнены, и, следовательно, рассматриваемая три-ткань является регулярной. С помощью аналогичных простых рассуждений можно доказать регулярность и трех других три-тканей, рассмотренных в работе [14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник*, Матем. сб. **198** (11), 107–134 (2007).
- [2] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О три-тканях, образованных семействами окружностей*, Proc. Intern. Geom. Center **5** (2), 6–16 (2012).
- [3] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник II*, Матем. сб. **204** (6), 93–134 (2013).
- [4] Шелехов А.М. *О шестиугольных три-тканях, образованных декартовой сетью и семейством окружностей*, Изв. вузов. Матем. (10), 79–93 (2018).
- [5] Шелехов А.М. *О фрактальных конструкциях на криволинейной три-ткани*, Изв. вузов. Матем. (9), 63–72 (2019).
- [6] Шелехов А.М. *Обобщенная теорема о границах криволинейной три-ткани и ее приложения*, Матем. сб. **211** (3), 124–157 (2020).
- [7] Поттманн Х., Ши Л., Скопенков М. *Циклиды Дарбу и ткани из окружностей* (Ун-т науки и технологии им. короля Абдуллы (KAUST), Саудовская Аравия).
- [8] Agafonov S.I. *Quadratic integrals of geodesic flow, webs, and integrable billiards*, J. Geom. Phys. **161** (2021).
- [9] Agafonov S.I. *Local classification of singular hexagonal 3-webs with holomorphic Chern connection form and infinitesimal symmetries*, Geom Dedicata **176**, 87–115 (2014).
- [10] Agafonov S.I. *Flat 3-webs via semi-simple Frobenius 3-manifolds*, J. Geom. Phys. **62** (2), 361–367 (2012).
- [11] Agafonov S.I. *Frobenius 3-folds via singular flat 3-webs*, SIGMA **8**, 078 (2012).
- [12] Нилов Ф.К. *О новых конструкциях в проблеме Бляшке–Бола*, Матем. сб. **205** (11), 125–144 (2014).
- [13] Nilov F. *New examples of hexagonal webs from circles*, arXiv:1309.5029v1 [math.MG] 19 Sep 2013.
- [14] Akopyan A. *3-Webs generated by confocal conics and circles*, Geom. Dedicata **194**, 55–64 (2018).
- [15] Blaschke W. *Einführung in die Geometrie der Waben* (Birkhäuser, Verlag, Basel–Stuttgart, 1955).
- [16] Lazareva V.B., Shelekhov A.M. *Around a Blaschke problem in the web theory*, Webs and Quasigroups, 65–73 (Tver State Univ., 1996–1997).
- [17] Лазарева В.Б. *Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей*, Ткани и квазигруппы, 74–77 (Калинин: КГУ, 1988).
- [18] Балабанова Р.С. *Шестиугольные три-ткани от снопов окружностей, два от коих са спрегнати*, Науч. тр. Пловдив. ун-т, Матем. **11** (4), 128–141 (1973).

- [19] Erdogan H.I. *Düzlemde 6-gen doku teşkil eden çember demety 3-üzleri*, Ph. D. Thesis (Istanbul Teknik Üniversitesi, Istanbul, 1974).
- [20] Лазарева В.Б. *Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости*. В кн.: Дифференц. геом., 49–64 (Калининградск. гос. ун-т, Калинин, 1977).
- [21] Erdogan H.I. *Triples of circle-pencils forming a hexagonal three-web in E^2* , J. Geom. **35** (1–2), 39–65 (1989).
- [22] Лазарева В.Б., Орлова О.В. *Об одном классе шестиугольных три-тканей, образованных пучками окружностей*. В кн.: Ткани и квазигруппы, 115–119 (Калининградск. гос. ун-т, Калинин, 1986).
- [23] Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. *Криволинейные три-ткани* (Тверской гос ун-т, Тверь, 2013).

Александр Михайлович Шелехов

Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: amshelekhov@yandex.ru

A.M. Shelekhov

On triangulation of the plane by pencils of conics III

Abstract. We present a much simpler than in [1] solution of the Blaschke problem: Find all regular curvilinear three-webs formed by the pencils of circles.

Keywords: curvilinear three-web, regular 3-web, three-web from pencils of circles.

Alexander Mikhailovich Shelekhov

Moscow Pedagogical State University,
1 Malaya Pirogovskaya str., bldg. 1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: amshelekhov@yandex.ru