

С.Э. УСМАНОВ

О МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

Аннотация. Рассматриваются максимальные операторы, связанные с сингулярными гиперповерхностями в многомерных евклидовых пространствах. Доказана ограниченность этих операторов и найден показатель ограниченности в пространстве суммируемых функций, когда гиперповерхности задаются параметрическими уравнениями.

Ключевые слова: максимальный оператор, оператор усреднения, дробно степенной ряд, показатель ограниченности, сингулярная гиперповерхность.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-69-76

ВВЕДЕНИЕ

Исследуем максимальные операторы, определенные соотношением

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t f(y)|, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{A}_t f(y) := \int_S f(y - tx) \psi(x) dS(x) \quad (2)$$

— оператор усреднения, $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, ψ — фиксированная неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем, т.е. $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $dS(x)$ — поверхностная мера на S .

Как известно, максимальный оператор $\mathcal{M}$ называется ограниченным в пространстве $L^p := L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, если существует положительное число C такое, что выполняется неравенство

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Максимальные операторы вида (1) исследовались в работах [1]–[8], начиная с работ И.М. Стейна. В работе [9] рассматриваются максимальные операторы, связанные с различными гладкими гиперповерхностями в многомерных евклидовых пространствах. Получены точные значения показателя ограниченности максимальных операторов, ассоциированных с выпуклыми аналитическими и вырожденными гиперповерхностями в случае, когда p больше двух.

Статьи [10] и [11] посвящены изучению ограниченности максимальных операторов, связанных с сингулярными поверхностями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Эти поверхности задаются параметрическими уравнениями и могут иметь особые точки на координатных плоскостях.

В данной статье обобщаются результаты работы [10] на пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассматриваются сингулярные гиперповерхности, заданные параметрическими уравнениями и имеющие особые точки на координатных плоскостях. Соответствующие максимальные операторы исследуются в достаточно малой окрестности особой точки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Следуя [12] приведем понятие дробно степенных рядов.

Определение 1. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}_+^n$ — открытое связное множество такое, что $0 \in \bar{V}$, f называется дробно-степенным рядом во множестве V , если существуют открытое множество $W \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащее $\bar{V}$, натуральное число N и вещественно-аналитическая функция g в $\Phi_N^{-1}(W)$ такие, что справедливо тождество $f = g \circ \Phi_{1/N}$ во множестве V , где $\Phi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, заданное формулой $\Phi_N(x) = (x_1^N, \dots, x_n^N)$, $\bar{V}$ — замыкание множества V , Φ_N^{-1} — обратное отображение к Φ_N .

Рассмотрим сингулярные гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, определенные следующими уравнениями:

$$x_i(u) = m_i(u)g_i(u), \quad x_{n+1}(u) = r + m_{n+1}(u)g_{n+1}(u), \quad (3)$$

где $m_i(u)$, $m_{n+1}(u)$ — мономы от n переменных, т. е.

$$m_i(u) = u_1^{a_{i1}} \cdot \dots \cdot u_n^{a_{in}}, \quad m_{n+1}(u) = u_1^{c_1} \cdot \dots \cdot u_n^{c_n},$$

$u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i \geq 0$, $g_i(u)$, $g_{n+1}(u)$ — дробно степенные ряды, c_i, a_{ik} — неотрицательные рациональные числа, r — произвольное действительное число, отличное от нуля, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

Пусть $A = (a_{ik})$ — квадратная $n \times n$ -матрица и $B = \det A$. Через A_i обозначим матрицы, образующиеся заменами элементов i -й строки матрицы A числами $c_1, \dots, c_n$ соответственно, $B_i = \det A_i$.

Определение 2. Точка $P(x_1, \dots, x_{n+1}) = P(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_{n+1}(u_1, \dots, u_n))$ называется неособой (регулярной) точкой гиперповерхности (3), если ранг матрицы $D = \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)$ ($j = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, n}$) равен n в точке $(u_1, \dots, u_n)$ ([13], с. 73).

Если, по крайней мере, один из определителей B_i, B отличен от нуля, то точки гиперповерхности (3), лежащие в достаточно малой окрестности точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и вне координатных плоскостей, являются неособыми точками. Точки гиперповерхности (3), лежащие на координатных плоскостях, могут быть сингулярными точками (см. лемму).

Оператор усреднения $\mathcal{A}_t f$ в (2), связанный с гиперповерхностями (3), определим так:

$$\mathcal{A}_t^\varphi f(y) := \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y - tm(u)g(u), y_{n+1} - t(r + m_{n+1}(u)g_{n+1}(u))) \psi_1(u) u^d \varphi(u) du, \quad (4)$$

где

$$y - tm(u)g(u) = (y_1 - tm_1(u)g_1(u), \dots, y_n - tm_n(u)g_n(u)),$$

$$\psi_1(u) = \psi(m_1(u)g_1(u), \dots, m_n(u)g_n(u), r + m_{n+1}(u)g_{n+1}(u))$$

— неотрицательный дробно степенной ряд с достаточно малым носителем, т. е. $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(u)$ — дробно степенной ряд, $u^d = u_1^{d_1} \cdot \dots \cdot u_n^{d_n}$, d_i — произвольные действительные числа.

Максимальный оператор, соответствующий оператору $\mathcal{A}_t^\varphi f$, определим равенством

$$\mathcal{M}^\varphi f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^\varphi f(y)|, \quad y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

В этой работе изучается ограниченность максимальных операторов (1), связанных с сингулярными гиперповерхностями в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданными параметрическими уравнениями (3). Точнее, докажем ограниченность максимального оператора $\mathcal{M}^\varphi f$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $p > 2$ в неособых точках сингулярных гиперповерхностей (3).

Основным результатом и обобщением теоремы 1 работы [10] является

Теорема. Пусть $\{g_l(u)\}_{l=1}^{n+1}, \varphi(u)$ — дробно степенные ряды, определенные в достаточно малой окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям $g_l(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $d_i > -1$. Предположим, что $B \neq 0$ и, по крайней мере, одно из чисел $B_i(B_i - B)$, $B_i B_k$ отлично от нуля, где $k \neq i$. Тогда существует достаточно малая окрестность U точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что для любого числа $p > \max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1}, 2 \right\}$ и для любой функции $\psi_1 \in C_0^\infty(U)$ максимальный оператор $\mathcal{M}^\varphi f$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, если $\psi_1(0) > 0$, $\max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1} \right\} > 2$, то максимальный оператор $\mathcal{M}^\varphi f$ не ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $2 < p \leq \max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1} \right\}$.

Следствие 1. Если $\{g_l(u)\}_{l=1}^{n+1}, \varphi(u)$ — дробно степенные ряды, определенные в малой окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям $g_l(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $d_i > -1$,

$$B \neq 0, (A^T)^{-1}C \neq (1, 0, \dots, 0)^T, (A^T)^{-1}C \neq (0, 1, \dots, 0)^T, \dots,$$

$$(A^T)^{-1}C \neq (0, 0, \dots, 1)^T, (A^T)^{-1}C \neq (0, 0, \dots, 0)^T,$$

то утверждения теоремы остаются справедливыми, где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$.

Следствие 2. Если $\{g_l(u)\}_{l=1}^{n+1}, \varphi(u)$ — дробно степенные ряды, определенные в малой окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям $g_l(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $d_i > -1$, $B_i \neq 0$, $B \neq 0$, то теорема остается в силе.

Замечание. Если $\{g_l(u)\}_{l=1}^{n+1}, \varphi(u)$ — вещественно-аналитические функции, определенные в малой окрестности начала координат $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям $g_l(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$, то утверждения теоремы, следствия 1 и 2 будут справедливыми.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Лемма. Если хотя бы одно из чисел B_i, B отлично от нуля, то точки гиперповерхности (3), лежащие в достаточно малой окрестности точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и вне координатных плоскостей, являются неособыми точками. Точки гиперповерхности (3), лежащие на координатных плоскостях, могут быть сингулярными точками.

Доказательство. Предположим, что $B \neq 0$. Вычисляя главный минор M среди миноров n -го порядка матрицы D , имеем

$$M = u_1^{a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1}-1} u_2^{a_{12}+a_{22}+\dots+a_{n2}-1} \cdot \dots \cdot u_n^{a_{1n}+a_{2n}+\dots+a_{nn}-1} \alpha(u),$$

где

$$\alpha(u) = \det G, \quad G = G_1 + G_2, \quad G_1 = (a_{ik}g_k(u)), \quad G_2 = \left(u_k \frac{\partial g_i}{\partial u_k}\right)$$

и G, G_1, G_2 — квадратные $n \times n$ -матрицы, $\alpha(u)$ — дробно-степенной ряд в начале координат $\mathbb{R}^n$ такой, что $\alpha(0) \neq 0$.

Очевидно, что значения M отличны от нуля в достаточно малой окрестности нуля вне координатных плоскостей при условии $B \neq 0, u_1 \cdot \dots \cdot u_n \neq 0$. Следовательно, ранг матрицы D максимален, т.е. равен n в этой окрестности. Поэтому по определению 2 все точки гиперповерхности (3), лежащие в окрестности точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и вне координатных плоскостей, являются неособыми точками. Аналогично доказывается регулярность точки гиперповерхности (3), лежащей в окрестности точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$, когда $B_i \neq 0$. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Исследуем максимальный оператор $\mathcal{M}^\varphi f$ в неособых точках гиперповерхности (3). По лемме при положительных достаточно малых значениях параметров $u_1, \dots, u_n$ точки гиперповерхности (3), лежащие в достаточно малой окрестности точки $(0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и вне координатных плоскостей, являются неособыми точками. Поэтому считаем, что эти параметры принадлежат достаточно малой окрестности нуля $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим разбиение единицы $\sum_{m=0}^{\infty} \chi_m(\sigma) = 1$ на интервале $0 < \sigma \leq 1$ и $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем на интервале $[1/2, 2]$. Здесь $\chi_m(\sigma) := \chi(2^m \sigma)$ и положим

$$\chi_j(u) := \chi_{j_1}(u_1) \cdot \dots \cdot \chi_{j_n}(u_n), \quad j_1, \dots, j_n \in N.$$

Применяя разбиение единицы, разлагаем оператор усреднения из (4) так:

$$\mathcal{A}_t^{\varphi, j} f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(y - tm(u)g(u), y_{n+1} - t(r + m_{n+1}(u)g_i(u))\right) \psi_1(u) \chi_j(u) u^d \varphi(u) du.$$

Если преобразуем переменные

$$u_k = 2^{-j_k} z_k, \quad 0.5 \leq z_k \leq 2,$$

то оператор $\mathcal{A}_t^{\varphi, j}$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t^{\varphi, j} f(y) &= 2^{-(j, d) - S_n} \int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(y - t \cdot 2^{-s} m(z) g(\delta_{2^{-j}}(z)), y_{n+1} - t(r + 2^{-(j, c)} m_{n+1}(z) g_{n+1}(\delta_{2^{-j}}(z)))\right) \times \\ &\times \psi_1(\delta_{2^{-j}}(z)) \chi(2^{-j_1} z_1) \cdot \dots \cdot \chi(2^{-j_n} z_n) z^d \varphi(\delta_{2^{-j}}(z)) dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} y - t \cdot 2^{-s} m(z) g(\delta_{2^{-j}}(z)) &= (y_1 - t \cdot 2^{-s_1} m_1(z) g_1(\delta_{2^{-j}}(z)), \dots, y_n - t \cdot 2^{-s_n} m_n(z) g_n(\delta_{2^{-j}}(z))), \\ (j, d) &= j_1 d_1 + \dots + j_n d_n, \quad (j, c) = j_1 c_1 + \dots + j_n c_n, \quad \delta_{2^{-j}}(z) = (2^{-j_1} z_1, \dots, 2^{-j_n} z_n), \\ S_n &= j_1 + \dots + j_n, \quad m_i(z) = z_1^{a_{i1}} \cdot \dots \cdot z_n^{a_{in}}, \quad m_{n+1}(z) = z_1^{c_1} \cdot \dots \cdot z_n^{c_n}. \end{aligned}$$

Числа s_i вычисляются соотношениями

$$s_i = \sum_{k=1}^n j_k a_{ik},$$

где $j_1 \geq j_0, \dots, j_n \geq j_0$ и j_0 — достаточно большое число, что следует из малости носителя ψ_1 .

Предполагая теперь, что $g_k(0, \dots, 0) = 1$, преобразуем переменные:

$$w_i = m_i(z)g_i(\delta_{2^{-j}}(z)). \quad (6)$$

Тогда в множестве

$$\{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}_+^n : 2^{-S_{in}} \leq w_i \leq 2^{S_{in}}\}$$

из системы $w_i = m_i(z)$ вытекает система $z_i = \tilde{m}_i(w)$, где

$$\tilde{m}_i(w) = w_1^{b_{i1}} \cdot \dots \cdot w_n^{b_{in}}, \quad (b_{ij}) = (A^T)^{-1}, \quad S_{in} = a_{i1} + \dots + a_{in}$$

([14], с. 60).

Далее, делая замену переменных $z_i = \tilde{m}_i(w)\hat{g}_i$ в (6), получаем систему

$$(\hat{g}_1)^{a_{i1}} \cdot \dots \cdot (\hat{g}_n)^{a_{in}} \cdot g_i(\delta_{2^{-j}}(\tilde{m}_i(w)\hat{g}_i)) = 1,$$

где $\hat{g}_i$ — такие новые переменные, что $\hat{g}_i \sim 1$. Согласно теореме о неявных отображениях, эта система в малой окрестности точки $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{2n}$ имеет единственное гладкое решение вида $\hat{g}_i = \tilde{g}_i(2^{-j}, w)$ и получаем

$$z_i = \tilde{m}_i(w)\tilde{g}_i(2^{-j}, w), \quad (7)$$

где $2^{-j} = (2^{-j_1}, \dots, 2^{-j_n})$. Предполагая, что $\tilde{g}_i(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) = 1$, гладкие функции $\tilde{g}_i(2^{-j}, w)$ можно представить в виде

$$\tilde{g}_i(2^{-j}, w) = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{-j_k} h_{ik}(2^{-j}, w),$$

$h_{ik}(2^{-j}, w)$ — некоторые гладкие функции.

Следовательно, после преобразований (6) и (7), интеграл (5) примет вид

$$\mathcal{A}_t^{\varphi, j} f(y) = 2^{-(j, d) - S_n} \int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(y - t \cdot 2^{-s} w, y_{n+1} - t(r + 2^{-(j, c)} \phi(w))\right) \mu(w) dw, \quad (8)$$

где

$$\phi(w) = w_1^{\frac{B_1}{B}} w_2^{\frac{B_2}{B}} \cdot \dots \cdot w_n^{\frac{B_n}{B}} g(w), \quad y - t \cdot 2^{-s} w = (y_1 - t \cdot 2^{-s_1} w_1, \dots, y_n - t \cdot 2^{-s_n} w_n),$$

$$g(w) = \prod_{i=1}^n (\tilde{g}_i(2^{-j}, w))^{c_i} g_{n+1}\left(2^{-j_1} m_1(w) \tilde{g}_1(2^{-j}, w), \dots, 2^{-j_n} m_n(w) \tilde{g}_n(2^{-j}, w)\right),$$

$$\mu(w) = \tilde{\psi}_1(w) \tilde{\chi}(w) \varphi(w) \tilde{\eta}(w) J(w), \quad \tilde{\eta}(w) = \eta\left(2^{-j_1} m_1(w) \tilde{g}_1(2^{-j}, w), \dots, 2^{-j_n} m_n(w) \tilde{g}_n(2^{-j}, w)\right),$$

$$\tilde{\psi}_1(w) = \psi_1\left(2^{-j_1} m_1(w) \tilde{g}_1(2^{-j}, w), \dots, 2^{-j_n} m_n(w) \tilde{g}_n(2^{-j}, w)\right),$$

$$\tilde{\chi}(w) = \prod_{i=1}^n \chi\left(2^{-j_i} m_i(w) \tilde{g}_i(2^{-j}, w)\right), \quad \varphi(w) = \prod_{i=1}^n (m_i(w) \tilde{g}_i(2^{-j}, w))^{d_i}$$

— дробно-степенные ряды, $J(w)$ — Якобиан замены переменных (7).

Операторы растяжения

$$T^j f(y) := 2^{\frac{Q_n}{p}} f\left(2^{s_1} y_1, \dots, 2^{s_n} y_n, y_{n+1}\right)$$

переводят операторы $\mathcal{A}_t^{\varphi, j} f$ из (8) в операторы

$$\mathcal{A}_t^{\varphi, j} T^j f(y) = 2^{\frac{Q_n - (j, d)p - S_n p}{p}} \int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(2^s y - tw, y_{n+1} - t(r + 2^{-(j, c)} \phi(w))\right) \mu(w) dw,$$

где $2^s y - tw = (2^{s_1} y_1 - tw_1, \dots, 2^{s_n} y_n - tw_n)$, $Q_n = s_1 + \dots + s_n$.

А также операторы

$$T^{-j} f(y) := 2^{-\frac{Q_n}{p}} f(2^{-s_1} y_1, \dots, 2^{-s_n} y_n, y_{n+1})$$

переводят $\mathcal{A}_t^{\varphi, j} T^j f$ в новые операторы

$$T^{-j} \mathcal{A}_t^{\varphi, j} T^j f(y) = 2^{-(j, d) - S_n} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y - tw, y_{n+1} - t(r + 2^{-(j, c)} \phi(w))) \mu(w) dw,$$

где $y - tw = (y_1 - tw_1, \dots, y_n - tw_n)$.

Нетрудно убедиться в том, что функция $\phi(w)$ в последнем интеграле удовлетворяет условию теоремы 7.1 работы [9]. Действительно, найдем частные производные второго порядка от функции $\phi(w)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i^2} &= \frac{1}{B^2} w_1^{\frac{B_1}{B}} w_2^{\frac{B_2}{B}} \dots w_i^{\frac{B_i}{B} - 2} \dots w_n^{\frac{B_n}{B}} \left(B_i (B_i - B) g(w) + 2B_i B w_i \frac{\partial g(w)}{\partial w_i} + B^2 w_i^2 \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_i^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_k} &= \frac{1}{B^2} w_1^{\frac{B_1}{B}} w_2^{\frac{B_2}{B}} \dots w_i^{\frac{B_i}{B} - 1} \dots w_k^{\frac{B_k}{B} - 1} \dots w_n^{\frac{B_n}{B}} \times \\ &\times \left(B_i B_k \varphi(w) + B_k B w_i \frac{\partial \varphi}{\partial w_i} + B_i B w_k \frac{\partial \varphi}{\partial w_k} + B^2 w_i w_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_k} \right). \end{aligned}$$

Так как в силу условия теоремы хотя бы одно из чисел $B_i(B_i - B)$, $B_i B_k$ не равно нулю, то соответствующая производная $\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i^2}$ или $\frac{\partial^2 \phi}{\partial w_i \partial w_k}$ ($k \neq i$) отлична от нуля для достаточного большого j_0 .

Применяя теорему 7.1 работы [9] к последнему интегралу при $p > 2$, получим

$$\left\| \sup_{t>0} |T^{-j} \mathcal{A}_t^{\varphi, j} T^j f| \right\|_{L^p} \leq D_p 2^{\frac{(j, c) - (j, d)p - S_n p}{p}} \|f\|_{L^p},$$

где D_p — некоторое положительное число. Отсюда в силу изометричности операторов $T^j f$ и $T^{-j} f$ вытекает оценка

$$\left\| \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^{\varphi, j} f| \right\|_{L^p} \leq D_p 2^{\frac{(j, c) - (j, d)p - S_n p}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Далее, учитывая равенство

$$\|\mathcal{M}^{\varphi, j} f\|_{L^p} = \sup_{t>0} \|\mathcal{A}_t^{\varphi, j} f\|_{L^p},$$

получим неравенство

$$\sum_{j_1 \geq j_0, \dots, j_n \geq j_0} \|\mathcal{M}^{\varphi, j} f\|_{L^p} \leq D_p \sum_{j_1 \geq j_0, \dots, j_n \geq j_0} 2^{\frac{(j, c) - (j, d)p - S_n p}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Ряд в правой части этого неравенства сходится при $p > \max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1} \right\}$. При выполнении этого условия справедлива оценка

$$\|\mathcal{M}^{\varphi} f\|_{L^p} \leq \sum_{j_1 \geq j_0, \dots, j_n \geq j_0} \|\mathcal{M}^{\varphi, j} f\|_{L^p} \leq C_1 \|f\|_{L^p},$$

где $C_1 > 0$.

Предположим, что $\max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1} \right\} > 2$. Следуя [1], рассмотрим функцию

$$f(x, x_{n+1}) = \frac{\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1})}{|x_{n+1}|^{\frac{1}{p}} |\ln |x_{n+1}||^{\frac{1}{p}}},$$

где η_1, η_2 — гладкие функции, удовлетворяющие условию

$$\eta_1(x)\eta_2(x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{\kappa}{2}; \\ 0, & |x| \geq \kappa. \end{cases}$$

Здесь $\kappa > 0$ — некоторое достаточно малое число. В силу соотношений (3) и (4) оператор усреднения, соответствующий функции $f(x, x_{n+1})$, определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}_t^\varphi f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\eta_1(y - tx(u))\eta_2(y_{n+1} - tx_{n+1}(u))}{|y_{n+1} - tx_{n+1}(u)|^{\frac{1}{p}} |\ln |y_{n+1} - tx_{n+1}(u)||^{\frac{1}{p}}} \psi_1(u) u^d \varphi(u) du,$$

где $y - tx(u) = (y_1 - tx_1(u), \dots, y_n - tx_n(u))$.

Следовательно, при $\psi_1(0) > 0$, $t = \frac{y_{n+1}}{r} > 0$ для $(y_1, \dots, y_n)$, принадлежащей малой окрестности начала координат, получаем неравенство

$$\sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^\varphi f(y)| \geq C_2 \int_{|u| \leq \frac{\kappa}{2}} \frac{|u_1|^{d_1 - \frac{c_1}{p}} |u_2|^{d_2 - \frac{c_2}{p}} \dots |u_n|^{d_n - \frac{c_n}{p}}}{|\ln |\frac{y_{n+1}}{r} m_{n+1}(u) g_{n+1}(u)||^{\frac{1}{p}}} du,$$

где C_2 — некоторое положительное число.

Итак, интеграл в правой части последнего неравенства расходится для всех p , удовлетворяющих неравенству $2 < p \leq \max \left\{ \frac{c_i}{d_i + 1} \right\}$, т. е. максимальный оператор $\mathcal{M}^\varphi f$ неограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ для таких p . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Stein E.M. *Maximal functions. Spherical means*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **73** (7), 2174–2175 (1976).
- [2] Bourgain J. *Averages in the plane convex curves and maximal operators*, J. Anal. Math. **47**, 69–85 (1986).
- [3] Greenleaf A. *Principal curvature and harmonic analysis*, Indiana Univ. Math. J. **30** (4), 519–537 (1981).
- [4] Sogge C.D. *Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature*, Fourier analysis and partial differential equations, Stud. Adv. Math. 317–323 (1995).
- [5] Sogge C.D., Stein E.M. *Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$* , Invent. Math. **82** (3), 543–556 (1985).
- [6] Iosevich A., Sawyer E. *Maximal averages over surfaces*, Adv. Math. **132** (1), 46–119 (1997).
- [7] Iosevich A., Sawyer E., Seeger A. *On averaging operators associated with convex hypersurfaces of finite type*, J. Anal. Math. **79**, 159–187 (1999).
- [8] Ikromov I.A., Kempe M., Müller D. *Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis*, Acta Math. **204** (2), 151–271 (2010).
- [9] Ikromov I.A., Usmanov S.E. *On the boundedness of maximal operators associated with hypersurfaces*, J. Math. Sci. **264** (6), 715–745 (2022).
- [10] Усманов С.Э. *Об ограниченности максимальных операторов, связанных с сингулярными поверхностями*, Изв. вузов. Матем. (6), 84–94 (2021).
- [11] Усманов С.Э. *О проблеме ограниченности максимальных операторов*, Изв. вузов. Матем. (4), 84–94 (2022).
- [12] Collins T., Greenleaf A., Pramanik M. *A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis*, Amer. J. Math. **135** (5), 1179–1252 (2013).
- [13] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* (Наука, М., 1979).
- [14] Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях* (Наука, Физматлит, М., 1998).

Салим Эшимович Усманов

*Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,*

e-mail: usmanov-salim@mail.ru

S.E. Usmanov

On maximal operators associated with singular hypersurfaces

Abstract. Maximal operators associated with singular hypersurfaces in multidimensional Euclidean spaces are considered. We prove the boundedness of these operators and define a critical exponent in the space of summable functions, when hypersurfaces are given by parametric equations.

Keywords: maximal operator, averaging operator, fractional power series, critical exponent, singular hypersurface.

Salim Eshimovich Usmanov

*Samarkand State University named after Sh. Rashidov,
15 Universitetski blvd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: usmanov-salim@mail.ru