Известия вузов. Математика
2024, №1, с. 50–68

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

К ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛОГИХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Аннотация. Исследуется разрешимость краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных изотропных оболочек с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесенных к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщенных перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: пологая изотропная неоднородная оболочка типа Тимошенко, изометрические координаты, нелинейная краевая задача, обобщенное решение, интегральное представление, голоморфная функция, операторное уравнение, теорема существования.

УДК: 517.958:539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-50-68

Введение

В настоящее время разрешимость нелинейных краевых задач равновесия упругих пологих оболочек достаточно полно изучена в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява ([1]–[5] и цитированная литература). В то же время актуальной задачей является исследование подобных краевых задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява ([1], с. 349). На сегодняшний день имеется ряд работ [6]–[12], в которых в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко исследована разрешимость нелинейных краевых задач для пологих оболочек, отнесенных к евклидовой системе координат. В основе исследований в [6]–[12] лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям. В настоящей статье метод работ [6]–[12] развивается на случай пологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко, отнесенных к изометрической системе координат. Переход к изометрическим координатам, с одной стороны, расширяет класс рассматриваемых оболочек, а с другой стороны, существенно усложняет систему дифференциальных уравнений равновесия.

Поступила в редакцию 26.01.2023, после доработки 26.01.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00212.

1. Постановка задачи

В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\left(DT^{j\lambda}\right)_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^j = 0, \quad j = 1, 2,$$
$$\left(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\mu}\right)_{\alpha^\lambda} + \left(DT^{\lambda 3}\right)_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^3 = 0,$$
$$\left(DM^{j\lambda}\right)_{\alpha^\lambda} - DT^{j3} + DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + DL^j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$D\bigl(T^{j1}d\alpha^2/ds - T^{j2}d\alpha^1/ds\bigr) = P^j(s), \quad j = 1, 2,$$
$$D\bigl(T^{13}d\alpha^2/ds - T^{23}d\alpha^1/ds + T^{1\lambda}w_{3\alpha^\lambda}d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}w_{3\alpha^\lambda}d\alpha^1/ds\bigr) = P^3(s),$$
$$D\bigl(M^{j1}d\alpha^2/ds - M^{j2}d\alpha^1/ds\bigr) = N^j(s), \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda-1}\gamma^{\lambda-1}_{kn}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda}\gamma^{\lambda-1}_{kn},$$
$$\gamma = \left(\gamma^0, \gamma^1\right), \quad \gamma^k = \left(\gamma^k_{11}, \gamma^k_{12}, \gamma^k_{13}, \quad \gamma^k_{22}, \gamma^k_{23}, \gamma^k_{33}\right), \quad k = 0, 1;$$
$$D^{ijkn}_m = D^{ijkn}_m\left(\alpha^1, \alpha^2\right) = \int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\right)\left(\alpha^3\right)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0,2}, \quad i,j,k,n = \overline{1,3};$$
$$B^{1111} = B^{2222} = E/\left(1-\nu^2\right), \quad B^{1122} = \nu E/\left(1-\nu^2\right), \quad B^{1212} = E/(2(1+\nu)),$$
$$B^{1313} = B^{2323} = E\kappa^2/(2(1+\nu));$$
$$\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}w_\lambda - B_{jj}w_3 + w^2_{3\alpha^j}/2, \quad j = 1, 2,$$
$$\gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}w_\lambda - 2B_{12}w_3 + w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2}, \quad \gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}\psi_\lambda, \quad j = 1, 2,$$
$$\gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}\psi_\lambda, \quad \gamma^0_{j3} = w_{3\alpha^j} + \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0, \quad k = \overline{1,3}; \tag{3}$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$, $j = 1, 2,$ — уравнения кривой Γ, s — длина дуги Γ, нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по $\alpha^\lambda, \lambda = 1, 2$.

Относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ система (1) представляет собой систему пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно w_1, w_2, ψ_1, ψ_2 и нелинейных относительно w_3. Совместно с граничными условиями (2) система (1) описывает состояние равновесия упругой пологой изотропной неоднородной оболочки с незакрепленными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко ([13], сс. 168–170, 269), отнесенной к криволинейной системе координат. При этом T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты, γ^k_{ij} $(i, j = \overline{1,3},\ k = 0, 1)$ — компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, гомеоморфной области Ω, w_j $(j = 1, 2)$ и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0, ψ_i $(i = 1, 2)$ — углы поворота нормальных сечений S_0, B_{ij} $(i, j = 1, 2)$— составляющие тензоры кривизны поверхности S_0, G^λ_{ij} — символы Кристоффеля, которые в изометрической системе координат задаются формулами ([1], с. 18)

$$G^1_{jj} = (-1)^{j-1}\Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda), \quad G^2_{jj} = (-1)^j\Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda), \quad G^j_{12} = G^j_{21} = \Lambda_{\alpha^{3-j}}/(2\Lambda), \quad j = 1, 2; \tag{4}$$

R^j, P^j $(j = \overline{1,3})$, L^k, N^k $(k = 1, 2)$ — компоненты внешних сил, действующих на оболочку, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $D = D(\alpha^1, \alpha^2) =$

$\sqrt{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$ — якобиан (A_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0, в изометрических координатах $A_{11}=A_{22}=\Lambda(\alpha^1,\alpha^2),\ A_{12}=0$ и $D=\Lambda$), $h_0=\mathrm{const}$ — толщина оболочки, α^1,α^2 — декартовы координаты точек области Ω.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам — от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия:

a) имеют место включения

$$B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)\in(W_p^{(1)}(\Omega)\cap C_\beta(\overline{\Omega}))\times L_1[-h_0/2,h_0/2],\quad i,j,k,n=\overline{1,3};$$

$$B_{\lambda\mu}(\alpha^1,\alpha^2)\in W_p^{(1)}(\Omega),\quad \lambda,\mu=1,2;$$

b) $\Lambda(\alpha^1,\alpha^2)>0$ в $\overline{\Omega}$, имеет место включение $\Lambda(\alpha^1,\alpha^2)\in W_p^{(2)}(\Omega)$ и почти всюду в области Ω выполняется условие $(\ln\Lambda)_{\alpha^1\alpha^1}+(\ln\Lambda)_{\alpha^2\alpha^2}=0$;

c) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j $(j=\overline{1,3})$ и N^k $(k=1,2)$ — пространству $C_\beta(\Gamma)$;

d) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и далее $2<p<4/(2-\beta),\ 0<\beta<1$.

Определение. Назовем вектор обобщенных перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ обобщенным решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ $(j=1,2)$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщенное решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k=e_{sij}^k+e_{cij}^k+\chi_{ij}^k,\quad i,j=\overline{1,3},\quad k=0,1, \tag{5}$$

где

$$e_{sjj}^0=w_{j\alpha^j},\quad e_{sj3}^0=\gamma_{j3}^0,\quad e_{sjj}^1=\psi_{j\alpha^j},\quad j=1,2,$$

$$e_{s12}^0=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1},\quad e_{s12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1},$$

$$e_{cjj}^0=-G_{jj}^\lambda w_\lambda-B_{jj}w_3,\quad e_{cjj}^1=-G_{jj}^\lambda\psi_\lambda,\quad j=1,2,$$

$$e_{c12}^0=-2G_{12}^\lambda w_\lambda-2B_{12}w_3,$$

$$e_{c12}^1=-2G_{12}^\lambda\psi_\lambda,\quad \chi_{jj}^0=w_{3\alpha^j}^2/2,\quad j=1,2,$$

$$\chi_{12}^0=w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},$$

$$\chi_{ij}^1=\chi_{j3}^0=e_{s33}^0=e_{sj3}^1=e_{cj3}^k\equiv 0,\quad i,j=\overline{1,3},\quad k=0,1. \tag{6}$$

2. Построение интегральных представлений для обобщенных перемещений

Введем в рассмотрение две комплексные функции:

$$\omega_j = \omega_j(z) = D\Big\{D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) +$$
$$+ i\big[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})\big]\Big\}, \quad j = 1, 2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \tag{7}$$

В системе (1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ_{jk}^n заменим их выражениями из (3), (5). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвертому уравнению — пятое, умноженное также на i, систему (1) при помощи функций $\omega_j(z)$ из (7) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\omega_{j\bar z} + h^j(a) = f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1, 2,$$
$$DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \tag{8}$$

где

$$\omega_{j\bar z} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1, 2,$$
$$h^j(a) = (-1)^{\mu-1}\big[\big(DD_{j+\lambda-2}^{1212}\big)_{\alpha^{3-\mu}}\nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + i\big(DD_{j+\lambda-2}^{1212}\big)_{\alpha^\mu}\nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}\big] - (j-1)DD_0^{1313}\big(\gamma_{13}^0 +$$
$$+ i\gamma_{23}^0\big)/2 + \big[f_{c3j-2}(a) + if_{c3j-1}(a)\big]/2, \quad \nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1, 2;$$
$$h^3(a) = \big(DD_0^{1313}\big)_{\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + \big(DD_0^{1313}\psi_\lambda\big)_{\alpha^\lambda} + f_{c3}(a);$$
$$f_{cj}(a) = \big(DT^{j\lambda}(e_c)\big)_{\alpha^\lambda} + DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(e),$$
$$f_{c3+j}(a) = \big(DM^{j\lambda}(e_c)\big)_{\alpha^\lambda} + DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(e), \quad j = 1, 2,$$
$$f_{c3}(a) = DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(e);$$
$$f_\chi^j(a) = \big[f_{\chi 3j-2}(a) + if_{\chi 3j-1}(a)\big]/2, \quad f_{\chi j}(a) = -\big(DT^{j\lambda}(\chi)\big)_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\chi),$$
$$f_{\chi 3+j}(a) = -\big(DM^{j\lambda}(\chi)\big)_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\chi), \quad j = 1, 2,$$
$$f_{\chi 3}(a) = -\big(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda}\big)_{\alpha^\mu} - DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\chi),$$
$$F^1 = D\big(R^1 + iR^2\big)/2, \quad F^2 = D\big(L^1 + iL^2\big)/2, \quad F^3 = DR^3;$$
$$e = e_s + e_c, \quad e_s = \big(e_s^0, e_s^1\big), \quad e_c = \big(e_c^0, e_c^1\big),$$
$$e_s^k = \big(e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k\big), \quad e_c^k = \big(e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k\big), \quad k = 0, 1,$$
$$\chi = \big(\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0\big); \tag{9}$$

e_{sij}^k, e_{cij}^k, χ_{ij}^k определены в (6).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ, поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично, граничные условия (2) запишем в виде

$$\mathrm{Re}\big[(-i)^j t'\omega_k(t)\big] + 2(-1)^j DD_{k+\delta-2}^{1212}\nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda} d\alpha^\lambda/ds + \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) =$$
$$= \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2,$$
$$DD_0^{1313}\big[(w_{3\alpha^2} + \psi_2)d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1)d\alpha^2/ds\big] = \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{cj}(a)(t) = D\big[T^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds - T^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds\big],$$
$$\varphi_{c3+j}(a)(t) = D\big[M^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds - M^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds\big], \quad \varphi_{c3}(a)(t) \equiv 0,$$
$$\varphi_{\chi j}(a)(t) = D\big[T^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds\big],$$

$$\varphi_{\chi 3+j}(a)(t) = D\big[M^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds\big], \quad j=1,2,$$
$$\varphi_{\chi 3}(a)(t) = D\big[\big(T^{11}(\gamma)w_{3\alpha^1} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^2}\big)d\alpha^2/ds - \big(T^{22}(\gamma)w_{3\alpha^2} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^1}\big)d\alpha^1/ds\big];$$
$$F^{3+j} = -P^j, \quad j=1,2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k=1,2; \tag{11}$$
усилия T^{jk}, моменты M^{jk} определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (8) при граничных условиях (10) лежат интегральные представления для обобщенных перемещений w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Для их вывода рассмотрим уравнения
$$\omega_{j\bar z} = \rho^j \quad (j=1,2), \quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \tag{12}$$
где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2, \rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (12) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения задаются формулами ([14], с. 29)
$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j\big(\Phi_j;\rho^j\big)(z),$$
$$T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, \quad j=1,2, \ \zeta = \xi + i\eta, \tag{13}$$
где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно ([14], сс. 39–41, 46), что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщенные производные
$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar z} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{14}$$
где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p>1$ и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$.

Представления (13), в свою очередь, при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана
$$\omega^0_{j\bar z} = i(d_{2j-1}[\omega_1] + d_{2j}[\omega_2]) \equiv iT_j\omega, \quad j=1,2, \quad \omega = (\omega_1,\omega_2), \tag{15}$$
общие решения которых имеют вид
$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\omega(z) \equiv \omega_j^0(\Psi_j;\omega)(z), \quad j=1,2. \tag{16}$$
В (15), (16) приняты обозначения
$$d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda] = d^1_{2j+\lambda-2}\omega_\lambda + (-1)^{j+\lambda}d^2_{2j+\lambda-2}\overline{\omega_\lambda}, \quad j,\lambda = 1,2,$$
$$d^j_{3k-2} = \frac{1}{4D}\left(\frac{D^{1111}_{4-2k}}{\delta_0} + (-1)^j\frac{D^{1212}_{4-2k}}{\delta_1}\right), \quad d_2^j = d_3^j = \frac{1}{4D}\left(\frac{D_1^{1212}}{\delta_1} + (-1)^j\frac{D_1^{1111}}{\delta_0}\right), \quad k,j=1,2,$$
$$\delta_0 = D_0^{1111}D_2^{1111} - \big(D_1^{1111}\big)^2, \ \delta_1 = D_0^{1212}D_2^{1212} - \big(D_1^{1212}\big)^2; \tag{17}$$
$\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (12) представим в виде
$$w_{3z\bar z} = \widetilde\rho_3/4, \ \widetilde\rho_3 = \rho_3/\big(DD_0^{1313}\big), \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$
откуда получим
$$w_3(z) = \mathrm{Re}\Psi_3(z) - \widetilde T\widetilde\rho_3 \equiv w_3(\Psi_3;\rho_3)(z), \quad \widetilde T\widetilde\rho_3 = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\widetilde\rho_3(\zeta)\ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|d\xi\,d\eta, \tag{18}$$

где $\Psi_3(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (16), (18) представляют собой искомые интегральные представления для обобщенных перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (13)–(18) и (8.20) из ([14], с. 58) получаем представления

$$\nu_{jk\alpha^k} = \mathrm{Im}\big[\omega^0_{j\overline{z}} - (-1)^k\omega^0_{jz}\big], \quad \nu_{jk\alpha^n} = \mathrm{Re}\big[\omega^0_{jz} + (-1)^k\omega^0_{j\overline{z}}\big], \quad k \neq n, \quad j,k,n = 1,2;$$
$$\omega^0_{jz} = \Psi'_j(z) + iST_j\omega(z), \quad \omega^0_{j\overline{z}} = iT_j\omega, \quad w_{3\alpha^j} = 2\mathrm{Re}\left(i^{j-1}w_{3z}\right), \quad j = 1,2,$$
$$w_{3z} = \Psi'_3(z)/2 + T\widetilde{\rho}_3(z)/4; \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -\mathrm{Re}\big\{i^n\big[\omega^0_{kz\overline{z}} + (-1)^j(\omega^0_{kzz} + \omega^0_{k\overline{z}\overline{z}})\big]\big\},$$
$$\nu_{kn\alpha^1\alpha^2} = \mathrm{Re}\big\{i^{n-1}\big(\omega^0_{kzz} - \omega^0_{k\overline{z}\overline{z}}\big)\big\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2\big[w_{3z\overline{z}} + (-1)^{j-1}\mathrm{Re}w_{3zz}\big], \quad k,n,j = 1,2,$$
$$w_{3\alpha^1\alpha^2} = -2\mathrm{Im}w_{3zz}; \quad \omega^0_{kz\overline{z}} = T_{k1}\omega + S_{k1}\big(\Phi'_0;\rho_0\big), \quad \omega^0_{k\overline{z}\overline{z}} = T_{k2}\omega + S_{k2}\big(\Phi'_0;\rho_0\big),$$
$$\omega^0_{kzz} = \Psi''_k(z) + S\omega^0_{k\zeta\overline{\zeta}}(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{T_k\omega(\tau)}{(\tau - z)^2}d\overline{\tau}, \quad k = 1,2, \quad \Phi'_0 = \big(\Phi'_1, \Phi'_2\big), \quad \rho_0 = \big(\rho^1, \rho^2\big),$$
$$w_{3zz} = \Psi''_3(z)/2 + S\widetilde{\rho}_3/4, \quad w_{3z\overline{z}} = \widetilde{\rho}_3/4, \quad T_{jk}\omega = i\big[d^1_{2j+\mu-2,k}\omega_\mu + (-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2,k}\overline{\omega_\mu}\big],$$
$$S_{jk}(\Phi'_0;\rho_0) = i\big[d^1_{2j+\mu-2}\omega_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2}\overline{\omega_{\mu,3-k}}\big], \quad \omega_{j,1} \equiv \omega_{jz} = \Phi'_j(z) + S\rho^j(z),$$
$$\omega_{j,2} \equiv \omega_{j\overline{z}} = \rho^j, \quad d^j_{m,1} \equiv d^j_{mz}, \quad d^j_{m,2} \equiv d^j_{m\overline{z}}, \quad j,k = 1,2, \ m = \overline{1,4}. \tag{19}$$

3. Решение задачи (1),(2)

Интегральные представления (16), (18) для обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j = 1,2)$, $\Psi_k(z)$ $(k = \overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j = \overline{1,3})$. Их найдем так, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли системе (8) и граничным условиям (10), при этом правые части уравнений (8) и граничных условий (10) временно считаем известными. С этой целью соотношения (16), (18), (19) подставим в левые части системы (8) и граничных условий (10). В результате система уравнений (8) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h^j_1(\rho)(z) + h^j_2(\Phi)(z) = f^j_\chi(a)(z) - F^j(z), \quad j = \overline{1,3}, \ z \in \Omega, \tag{20}$$

где через $h^j_1(\rho)(z)$ и $h^j_2(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (9), которые содержат функции $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (10) с учетом представлений

$$S(T_j\Phi_0)^+(t) = -(\overline{t}')^2\big[d^1_{2j-1}(t)\Phi_1(t) + d^1_{2j}(t)\Phi_2(t)\big] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2),$$
$$K_{0j}(\Phi_0)(t) = -\frac{d^1_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t) - \psi(t,t)}{\tau - t}\Phi_\mu(\tau)d\tau - (-1)^{j+\mu}\frac{d^2_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t) - \psi(t,t)}{\overline{\tau} - \overline{t}}\overline{\Phi_\mu(\tau)}d\overline{\tau} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d^1_{2j+\mu-2}(\zeta) - d^1_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta - t)^2}\Phi_\mu(\zeta)d\xi d\eta -$$
$$-\frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d^2_{2j+\mu-2}(\zeta) - d^2_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta - t)^2}\overline{\Phi_\mu(\zeta)}d\xi d\eta, \quad j = 1,2,$$
$$\psi(\tau,t) = (\overline{\tau} - \overline{t})/(\tau - t), \quad \psi(t,t) = (\overline{t}')^2, \tag{21}$$

получаемых при помощи соотношений (13)–(15), формул (4.7), (4.9) из ([14], с. 28) и формул Сохоцкого ([15], с. 66), преобразуются к виду

$$(-1)^j d_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}[i^j t'\Phi_\lambda(t)] - 2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}[i^{j-1}t'\Psi'_\lambda(t)] - 2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}[i^j t'K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)]+$$

$$+H_{03(k-1)+j}\rho(t)+\varphi_{c3(k-1)+j}(\Phi)(t)+\varphi_{c3(k-1)+j}(\rho)(t)=\varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,$$

$$DD_0^{1313}(t)\mathrm{Re}[it'\Psi_3'(t)]+K_{03}(\Phi)(t)+H_{03}\rho(t)=\varphi_{\chi 3}(a)(t)-F^6(s),\tag{22}$$

где

$$H_{03(k-1)+j}\rho(t)=\mathrm{Re}\big[(-i)^j t' T\rho^k(t)\big]-2DD_{k+\lambda-2}^{1212}(t)\mathrm{Re}\big\{i^j t'(I+S)(T_\lambda T\rho_0)^+(t)\big\},\quad k,j=1,2,$$

$$H_{03}\rho(t)=DD_0^{1313}(t)\mathrm{Re}\big[it'(T\widetilde{\rho}_3(t)/2+TT_2T\rho_0(t))\big],$$

$$K_{03}(\Phi)(t)=DD_0^{1313}(t)\mathrm{Re}\big\{t'\big[\Psi_2(t)+iTT_2\Phi_0(t)\big]\big\};$$

$$d_{kj}(t)=(-1)^{j-1}\big[2(-1)^\lambda DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t)d_{2\lambda+j-2}^2(t)+3-k-j\big],\quad k,j=1,2,\tag{23}$$

$\varphi_{cj}(\Phi)(t)$ и $\varphi_{cj}(\rho)(t)$ — части выражения оператора $\varphi_{cj}(a)(t)$ в (11), содержащие функции Φ и ρ соответственно, I — тождественный оператор, операторы T,S,T_λ и функции $d_j^k(t)$ определены в (13), (14), (15), (17) соответственно, $\Phi_\lambda(t)\equiv\Phi_\lambda^+(t)$, $t\in\Gamma$, символ $\Phi_\lambda^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\Phi_k(z)\in C_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k=1,2)$, $\Psi_j(z)\in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,3})$ получили систему уравнений (20), (22). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\Phi_k(z)=\Theta(\mu_{2k})(z)\equiv\Phi_k(\mu_{2k})(z),\quad k=1,2,\quad \Psi_j'(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z)\equiv$$

$$\equiv\Psi_j'(\mu_{2j-1})(z),\quad j=\overline{1,3},\quad \Theta(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)},\tag{24}$$

где $\mu_j(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ $(j=\overline{1,5})$ — произвольные действительные функции, $\tau'=d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$ имеем представления

$$\Psi_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j}\equiv\Psi_j(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j},\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Theta^0(f)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)}{\tau'}\,\ln\Big(1-\frac{z}{\tau}\Big)\,d\tau,\tag{25}$$

где c_j $(j=\overline{1,6})$ — произвольные действительные постоянные, под $\ln(1-z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Используя формулы Сохоцкого ([15], с. 66), находим $\Phi_k(t)$ $(k=1,2)$, $\Psi_j'(t)$ $\big(j=\overline{1,3}\big)$, $t\in\Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (25) в систему (20), (22), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho\in L_p(\Omega)$ и $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\mu)(z)=f_\chi^j(a)(z)+g_c^j(z)-F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\sum_{n=1}^5\left[a_{jn}(t)\mu_n(t)+b_{jn}(t)\int\limits_\Gamma\frac{\mu_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right]+K_j\,\mu(t)+H_j\rho(t)=$$

$$=\varphi_{\chi j}(a)(t)+g_c^{3+j}(t)-F^{3+j}(t),\quad t\in\Gamma,\quad j=\overline{1,5},\tag{26}$$

где

$$K_{3(n-1)+j}\mu(t)=(-1)^j d_{n\lambda}(t)\big\{\mathrm{Re}\big[i^j t'\Theta(\mu_{2\lambda})(t)\big]-i\mathrm{Re}\big(i^{j-1}\big)\Theta\big(\tau'\mu_{2\lambda}\big)(t)\big\}+$$

$$+2DD_{\lambda+n-2}^{1212}(t)\big\{\mathrm{Re}\big[i^{j+1}t'\Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)\big]-i\mathrm{Re}\big(i^j\big)\Theta\big(\tau'\mu_{2\lambda-1}\big)(t)-\mathrm{Re}\big[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)\big]\big\}+$$

$$+\varphi_{c3(n-1)+j}(\mu)(t),\quad n,j=1,2,$$

$$K_3\mu(t)=K_{03}(\mu)(t)-DD_0^{1313}(t)\mathrm{Re}\big[t'\Theta(\mu_5)(t)\big],\quad H_j\rho(t)=H_{0j}\rho(t)+\varphi_{cj}(\rho)(t),\quad j=\overline{1,5},$$

$$g_c^j(z) = (j-1)DD_0^{1313}(c_4 + ic_3)/2 - [f_{c3j-2}(a_c) + if_{c3j-1}(a_c)]/2,$$
$$g_c^{3+j}(t) = -\varphi_{cj}(a_c)(t), \quad g_c^{6+j}(t) = -\varphi_{c3+j}(a_c)(t), \quad j = 1,2,$$
$$g_c^3(z) = -\big(DD_0^{1313}\big)_{\alpha^\lambda} c_{5-\lambda} - f_{c3}(a_c), \quad g_c^6(t) = DD_0^{1313}(t)\big(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds\big),$$
$$a_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}\big(i^j\big)/2, \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}\big(i^{j-1}\big)/(2\pi),$$
$$a_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = -DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}\big(i^{j-1}\big), \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}\big(i^j\big)/\pi,$$
$$k,j,\lambda = 1,2, \quad a_{35}(t) = -DD_0^{1313}(t)/2, \quad a_c = (c_2, c_1, c_5, c_4, c_3), \tag{27}$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j = 1,2$, $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5)), \mu_0 = (\mu_2, \mu_4)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* a)–d). *Тогда*

1) $h_1^j(\rho)$ $\big(j = \overline{1,3}\big)$ — *линейные вполне непрерывные операторы в* $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$ $\big(j = \overline{1,3}\big)$ — *линейные вполне непрерывные операторы из* $C_\nu(\Gamma)$ $\forall \nu \in (0,1)$ *в* $L_p(\Omega)$;

3) $K_j\,\mu$ $\big(j = \overline{1,5}\big)$ — *линейные вполне непрерывные операторы из* $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu \in (0,1)$ *в* $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall \gamma < \alpha$ *и ограниченные операторы из* $C_\nu(\Gamma)$ *в* $C_\alpha(\Gamma)$;

4) $H_j\,\rho$ $(j = \overline{1,5})$ — *линейные вполне непрерывные операторы из* $L_p(\Omega)$ *в* $C_{\alpha'}(\Gamma)$ $\forall\,\alpha' < \alpha$ *и ограниченные операторы из* $L_p(\Omega)$ *в* $C_\alpha(\Gamma)$;

5) *имеют место включения* $f_\chi^j(a)(z)$, $F^j(z)$, $g_c^j(z)$ $\big(j = \overline{1,3}\big) \in L_p(\Omega)$, $\varphi_{\chi j}(a)(t)$, $g_c^{3+n}(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $j,k,n = \overline{1,5}$, $n \neq 3$.

Доказательство. Известно ([14], с. 26–27), что интеграл типа Коши $\theta(f)$ в (24) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\theta'(f)$ — ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1 < q < 2/(1-\alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\theta(f)$ — вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ $\forall p > 1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ $\forall \alpha' < \alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T, S, определенных в (13), (14), используя представления для производных первого порядка обобщенных перемещений в (19) и выражения для операторов $h^j(a)$ в (9), получаем, что утверждения 1), 2) леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau,t) \in C_\beta(\Gamma) \times C_\beta(\Gamma)$ ([15], с. 28–32), $d_{k\lambda}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $d_j^k(z)$, $D_0^{1313}(z)$, $D(z) \in C_\beta(\overline{\Omega})$, то принимая во внимание следствие 4.3 из ([16], с. 124), легко убеждаемся в том, что первые два слагаемых правой части представления для оператора $K_{0j}(\mu_0)$ в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall \nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma < \beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвертое слагаемые этого представления в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma < \beta$. Тогда получаем, что $K_{oj}(\mu_0)$ $(j = 1,2)$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ $\forall\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma < \beta$. Аналогично из представления оператора $K_{03}(\mu)$ в (23) следует, что $K_{03}(\mu)$ — линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu \in (0,1)$.

Далее, первые два слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) преобразуем к виду

$$\frac{(-i)^j}{2} d_{n\lambda}(t) \left\{ \frac{(-1)^j - 1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \frac{\tau' - t'}{\tau - t} d\tau + \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \mathrm{Im}\left(\frac{t'}{\tau - t}\right) d\tau \right\}.$$

Следовательно, с учетом включений $\tau', d_{n\lambda} \in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$\mathrm{Im}[\tau'/(\tau - t)] = k_*(\tau,t)/|\tau - t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau,t) \in C_{\beta/2}(\Gamma) \times C_{\beta/2}(\Gamma)$ ([15], сс. 31–32, 55, 56), а также следствий 4.4, 4.5 из ([16], с. 125) получаем, что первые два слагаемых в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любых $\nu \in (0,1)$ и $\gamma < \beta/2$. Аналогично показываем, что третье и четвертое слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) обладают этим же свойством. Из представления оператора $\varphi_{cj}(a)$ в (11) следует, что $\varphi_{cj}(a)$ — линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall\gamma < \alpha$ и ограниченный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\alpha(\Gamma)$. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ в (27) вытекает справедливость утверждения 3) леммы. Справедливость утверждения 4) следует из представлений операторов $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ в (23) с учетом свойств операторов T, S, интеграла типа Коши и соотношений

$$S(T_\lambda T\rho_0)^+(t) = T\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}T_\lambda T\rho_0\right)(t) - \frac{1}{2}\big(\bar{t}'\big)^2 T_\lambda T\rho_0(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{T_\lambda T\rho_0(\tau)}{\tau - t}d\overline{\tau}, \quad \lambda = 1,2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из ([14], с. 58) и Сохоцкого. Справедливость утверждения 5) леммы непосредственно вытекает из формул (9), (11), (27). □

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве

$$L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma), \quad \alpha' < \alpha.$$

Заметим, что любое решение $(\rho,\mu) \in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (27), вычисляем определитель

$$\det[A(t) - \pi i B(t)] = D^3 D_0^{1313}\delta_1/(32\delta_0)\big(a_1^2 - a_0 a_2\big), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = \overline{0,2},$$

где δ_0, δ_1 определены в (17), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на Γ и для индекса системы (26) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(A - \pi i B)}{\det(A + \pi i B)}\right]_\Gamma = 0$$

(здесь символ $[\arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu) \in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (24), (25) с постоянными $c_j = 0$ $\big(j = \overline{1,6}\big)$ соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые, в свою очередь, по формулам (16), (18) определяют функции w_j $\big(j=\overline{1,3}\big)$, ψ_k $(k=1,2)$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (8) $\big(f_\chi^j - F^j \equiv 0,\ j = \overline{1,3}\big)$ и однородным линейным граничным условиям (10) $\big(\varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0,\ j = \overline{1,5}\big)$. Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (8) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение — на w_3. После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учетом однородных граничных условий (10) получаем, что w_j $\big(j=\overline{1,3}\big)$, ψ_k $(k=1,2)$ удовлетворяют системе

$$w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj}w_3 = 0,\ j=1,2, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12}w_3 = 0,$$

$$\psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda\psi_\lambda = 0, \quad j=1,2, \quad \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda\psi_\lambda = 0, \quad w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0, \quad j=1,2. \qquad (28)$$

Решаем систему (28). Сначала найдем ψ_1, ψ_2. С этой целью четвертое и пятое уравнения в (28) сложим и вычтем друг из друга. Принимая во внимание соотношения (4) для символов

Кристоффеля, получаем

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2} = 0, \quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 0, \quad \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2} = 0. \tag{29}$$

Первые два уравнения в (29) означают, что функция $(\psi_1 + i\psi_2)/\Lambda$ является голоморфной в области Ω. Следовательно, для функций ψ_1, ψ_2 справедливы представления

$$\psi_1 = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)\mathrm{Re}\varphi(z), \quad \psi_2 = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)\mathrm{Im}\varphi(z), \tag{30}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная голоморфная функция в области Ω, принадлежащая пространству $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$.

Выражения (30) функций ψ_1, ψ_2 подставим в третье уравнение системы (29). Тогда относительно голоморфной функции $\varphi(z)$ получим уравнение $\mathrm{Re}[\varphi'(z)+(\ln\Lambda)_z\varphi(z)] = 0$, которое в силу условия b) эквивалентно уравнению

$$\varphi'(z) + (\ln\Lambda)_z\varphi(z) = ic_0, \tag{31}$$

где c_0 — произвольная действительная постоянная.

Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$\varphi(z) = \exp[-\varphi_0(z)/2]\left(c_3 + ic_4 + ic_0\int\limits_{z_0}^{z}\exp[\varphi_0(\zeta)/2]d\zeta\right), \quad z \in \Omega, \tag{32}$$

где $\varphi_0(z)$ — голоморфная функция, определенная соотношением $\mathrm{Re}\varphi_0(z) = \ln\Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$, $z_0 \in \overline{\Omega}$ — произвольно фиксированная точка, c_j — произвольные действительные постоянные.

Подставив выражение (32) для функции $\varphi(z)$ в (30), с учетом соотношения $\psi_{1\alpha^2} = \psi_{2\alpha^1}$, вытекающего из последних двух уравнений в (28), для углов поворота ψ_1, ψ_2 получим представления

$$\psi_j(\alpha^1, \alpha^2) = c_{2+j}\Lambda_1(\alpha^1, \alpha^2) + (-1)^j c_{5-j}\Lambda_2(\alpha^1, \alpha^2),$$
$$\Lambda_j = \Lambda\mathrm{Re}\big[(-i)^{j-1}\exp(-\varphi_0(z)/2)\big], \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

Из последних двух уравнений в (28) для прогиба w_3 будем иметь

$$w_3 = c_3\widetilde{w}_3^1 + c_4\widetilde{w}_3^2 + c_5, \quad \widetilde{w}_3^j = (-1)^j\mathrm{Re}\left[i^{j-1}\int\limits_{z_0}^{z}(\Lambda_1 + i\Lambda_2)d\zeta\right], \quad j = 1, 2, \tag{34}$$

где c_3, c_4, c_5 — произвольные действительные постоянные, функции Λ_j определены в (33).

Перейдем к первым трем уравнениям в (28). Поступая как и выше, их представляем в виде

$$(w_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (w_2/\Lambda)_{\alpha^2} = (B_{11} - B_{22})w_3/\Lambda, \quad (w_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (w_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 2B_{12}w_3/\Lambda,$$
$$w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2} = (B_{11} + B_{22})w_3. \tag{35}$$

Первые два уравнения в (35) при помощи комплексной функции $\widetilde{w} = (w_1 + iw_2)/\Lambda$ можно записать в виде неоднородного уравнения Коши–Римана $\widetilde{w}_{\overline{z}} = g_0(w_3)$, общее решение которого задается формулой

$$\widetilde{w} = \psi(z) + Tg_0(w_3)(z), \quad g_0(w_3) = (B_{11} - B_{22})w_3/(2\Lambda) + iB_{12}w_3/\Lambda, \tag{36}$$

где $\psi(z)$ — произвольная голоморфная функция, оператор T определен в (13).

Выражение (36) для $\widetilde{w}$ подставим в третье уравнение системы (35). Относительно голоморфной функции $\psi(z)$ получим уравнение $\mathrm{Re}[\psi'(z) + (\ln\Lambda)_z \psi(z)] = g_1(w_3)$, которое эквивалентно уравнению

$$\psi'(z) + (\ln\Lambda)_z\psi(z) = g_2(w_3)(z) + ic_0, \quad g_2(w_3) = g_1(w_3) + 2i\mathrm{Im}\int\limits_{z_0}^{z} g_{1\zeta}(w_3)d\zeta,$$

$$g_1(w_3) = (B_{11} + B_{22})w_3/(2\Lambda) - \mathrm{Re}[Sg_0(w_3) + (\ln\Lambda)_z Tg_0(w_3)], \tag{37}$$

где c_0 — произвольная действительная постоянная, операторы T, S определены в (13), (14).

Общее решение уравнения (37) задается формулой

$$\psi(z) = \exp[-\varphi_0(z)/2]\left[c_1 + ic_2 + \int\limits_{z_0}^{z}(g_2(w_3)(\zeta) + ic_0)\exp[\varphi_0(\zeta)/2]d\zeta\right], \tag{38}$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные, голоморфная функция $\varphi_0(z)$ определена в (32).

Итак, тангенциальные перемещения w_1, w_2 задаются формулой (36), в которой голоморфная функция $\psi(z)$ определена при помощи соотношения (38). С учетом выражения (34) прогиба w_3 представления для w_1, w_2 можно записать в виде

$$w_j = \sum_{k=0}^{5} c_k \widetilde{w}_j^k(z), \quad \widetilde{w}_j^0 = (-1)^{j-1}\Lambda\mathrm{Re}\left[i^j\int\limits_{z_0}^{z}\exp[(\varphi_0(\zeta) - \varphi_0(z))/2]d\zeta\right],$$

$$\widetilde{w}_1^j = (-1)^{j-1}\Lambda_j, \quad \widetilde{w}_2^j = \Lambda_{3-j}, \quad \widetilde{w}_3^3 \equiv 1,$$

$$\widetilde{w}_j^{2+k} = \Lambda\mathrm{Re}\left[(-i)^{j-1}\left(\int\limits_{z_0}^{z} g_2(\widetilde{w}_3^k)(\zeta)\exp[(\varphi_0(\zeta) - \varphi_0(z))/2]d\zeta + Tg_0(\widetilde{w}_3^k)(z)\right)\right],$$

$$k = \overline{1,3}, \quad j = 1, 2, \tag{39}$$

где $g_0(\widetilde{w}_3^k)$, $g_2(\widetilde{w}_3^k)$ и $\widetilde{w}_3^k$ определены по формулам в (36), (37) и (34) соответственно.

Так как $\Psi_j(0) = 0$, $j = 1, 2$, $w_3(0) = 0$, то используя представления (33), (34) для $\psi_j(z), w_3$ и формулу

$$\Psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\omega_j^0(t)}{t - z}dt,$$

вытекающую из (16), получаем $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда с учетом представлений (39), (7) находим $\omega_j(z) = 2ic_0 DD_{j-1}^{1212}\Lambda$, $j = 1, 2$, следовательно, из уравнений (12) получим равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0\big(DD_{j-1}^{1212}\Lambda\big)_{\overline{z}}, \quad j = 1, 2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \tag{40}$$

Используя формулы (13), (16), (18), находим $\Phi_k(z)$ $(k = 1, 2)$, $\Psi_j'(z)$ $\big(j = \overline{1,3}\big)$ и подставляя их в (24), получаем

$$\mu_1(t)/t' - c_0\beta_0(t) = F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0 DD_{j-1}^{1212}\Lambda(t) = F_{2j}^-(t), \quad j = 1, 2,$$

$$\mu_{2j-1}(t)/t' = F_{2j-1}^-(t), \quad j = 2, 3,$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности;

$$\beta_0(t) = \varphi_0'(t)\exp[\varphi_0(t)/2]\int\limits_{\overline{z_0}}^{\bar t}\exp[\overline{\varphi_0(\tau)}/2]d\overline{\tau} + (\bar t')^2\Lambda(t) + \varphi_0'(t)\exp[(\varphi_0(t)-\varphi_0(0))/2]/(2\pi i).$$

Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\mathrm{Re}[it' F_j^-(t)] = f_j^-(t)$, $j=\overline{1,5}$, где $f_1^-(t) = c_0\mathrm{Im}(t'\beta_0(t))$, $f_{2j}^-(t) = 2c_0DD_{j-1}^{1212}(t)\Lambda(t)\mathrm{Re}\,t'$, $j=1,2$, $f_{2j-1}^-(t)=0$, $j=2,3$. Используя решение этой задачи ([17], с. 253), для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=1,2,4,\quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=3,5, \tag{41}$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$, c_0, β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Решения (40), (41) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (20) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (22) умножим на действительные функции $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$, проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi_k'(z)$ их выражениями из (24), (25) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^k(z)} - Td_{2\lambda+k-2}[iS_\lambda v] + 2\Theta\big(\tau'\overline{\nu^k}\big)(z) = 0,\quad k=1,2,$$

$$DD_0^{1313}v_3 - \mathrm{Re}\Big\{T^0\big(\widetilde{f}_{cj}^1 v_j\big)(z) + T\big(\widetilde{f}_{cj}^2 v_j\big)(z)/2 + 2iT_\Gamma^0\varphi_1(z) + 2\Theta\big(\tau' DD_0^{1313}\nu_3\big)(z)\Big\}/2 = 0,\quad z\in\Omega,$$

$$\mathrm{Re}\Big\{T\big(d_{2\lambda+k-1}^1 S_\lambda v\big)(t) + (-1)^{\lambda-k}T\big(d_{2\lambda+k-1}^2\overline{S_\lambda v}\big)(t) + 2i\Theta^-\big(\tau'\nu^{k+1}\big)(t)\Big\} = 0,\quad k=0,1,$$

$$\mathrm{Re}\Big\{iT\big(\widetilde{f}_{cj}^{1k}v_j\big)(t) + iT^0\big(\widetilde{f}_{cj}^{3k}v_j\big)(t) + 2\Theta^-\big(\varphi_1^k\big)(t) - 2T_\Gamma^0\varphi_2^k(t)\Big\} = 0,\quad k=1,2,$$

$$\mathrm{Re}\Big\{T^0\big(\widetilde{f}_{cj}^1 v_j\big)(t) + T\big(\widetilde{f}_{cj}^2 v_j\big)(t)/2 + 2iT_\Gamma^0\varphi_1(t) + 2\Theta^-\big(\tau' DD_0^{1313}\nu_3\big)(t)\Big\} = 0,\quad t\in\Gamma;$$

$$v^k = v_{3k-2} + iv_{3k-1},\quad \nu^k = \nu_{3k-2} + i\nu_{3k-1},\quad k=1,2,\quad v^3 = v_3,\quad \nu^3=\nu_3 \tag{42}$$

(по j здесь и ниже суммирование от 1 до 5).

В уравнениях (42) приняты обозначения

$$S_\lambda v(z) = S\big(\widetilde{f}_{cj}^{1\lambda}v_j\big)(z) + \widetilde{f}_{cj}^{2\lambda}v_j(z) - T\big(\widetilde{f}_{cj}^{3\lambda}v_j\big)(z) - 2i\Theta'\big(\varphi_1^\lambda\big)(z) + 2i\Theta\big(\varphi_2^\lambda\big)(z),$$

$$\widetilde{f}_{c3j+k-2}^{\beta\lambda} = f_{c3j+k-2}^{\beta\lambda}/2 + 2(-1)^\beta i^{k+1}\big(DD_{j+\lambda-2}^{1212}\big)_{,\beta},\quad \widetilde{f}_{c3}^{\beta\lambda} = DB_{\delta\mu}d_{s\lambda-1}^{\delta\mu\beta} - 2i(\beta-1)(\lambda-1)DD_0^{1313},$$

$$\widetilde{f}_{c3j+k-2}^{3\lambda} = \big[f_{c3j+k-2}^{3\lambda} + (\lambda-1)(j-1)i^{k+1}DD_0^{1313}\big]/2,$$

$$\widetilde{f}_{c3}^{3\lambda} = DB_{\delta\mu}\big(d_{c\lambda-1}^{\delta\mu2} - id_{c\lambda-1}^{\delta\mu1}\big) - 2i(\lambda-1)\big(DD_0^{1313}\big)_{\overline{z}},$$

$$\widetilde{f}_{c3j+k-2}^{\lambda} = f_{c3j+k-2}^{\lambda}/2 - (\lambda-1)(j-1)i^kDD_0^{1313},\quad \beta,\lambda,j=1,2,\quad k=0,1,$$

$$\widetilde{f}_{c3}^1 = DB_{\lambda\mu}b_{c0}^{\lambda\mu},\quad \widetilde{f}_{c3}^2 = 2i^{\lambda-1}\big(DD_0^{1313}\big)_{\alpha^\lambda},\ f_{,1}\equiv f_{\overline{z}},\quad f_{,2}\equiv f_z,$$

$$f^{k\delta}_{cj+3m}=D\big[d^{j12}_{c\delta+m-1}+(-1)^{k-1}d^{j21}_{c\delta+m-1}-i\big(d^{j11}_{c\delta+m-1}+(-1)^k d^{j22}_{c\delta+m-1}\big)+G^j_{\lambda\mu}d^{\lambda\mu k}_{s\delta+m-1}\big],$$

$$f^{3\delta}_{cj+3m}=\big[D\big(d^{j\lambda 2}_{c\delta+m-1}-id^{j\lambda 1}_{c\delta+m-1}\big)\big]_{\alpha^\lambda}+DG^j_{\lambda\mu}\big(d^{\lambda\mu 2}_{c\delta+m-1}-id^{\lambda\mu 1}_{c\delta+m-1}\big),$$

$$f^1_{cj+3m}=\big(Db^{j\lambda}_{cm}\big)_{\alpha^\lambda}+DG^j_{\lambda\mu}b^{\lambda\mu}_{cm},\quad f^2_{cj+3m}=2Db^{j\lambda}_{cm}i^{\lambda-1},\quad m=0,1,\quad k,j,\delta=1,2,$$

$$\varphi_1(z)=\varphi^2_{c\delta}\nu_\delta+\varphi^2_{c3+\delta}\nu_{3+\delta},\quad \varphi^2_{cj+3k}(z)=D(b^{j1}_{ck}d\alpha^2/ds-b^{j2}_{ck}d\alpha^1/ds,\quad k=0,1,\quad j=1,2,$$

$$\varphi^\lambda_1(z)=-2t'DD^{1212}_{\lambda+\delta-2}\nu^\delta,\quad \varphi^\lambda_2(z)=\varphi^{1\lambda}_{c\delta}\nu_\delta+\varphi^{1\lambda}_{c3+\delta}\nu_{3+\delta}+(\lambda-1)t'DD^{1313}_0\nu_2,\ \lambda=1,2,$$

$$\varphi^{1\delta}_{cj+3(k-1)}=D\big[\big(d^{j12}_{c\delta+k-2}-id^{j11}_{c\delta+k-2}\big)d\alpha^2/ds-\big(d^{j22}_{c\delta+k-2}-id^{j21}_{c\delta+k-2}\big)d\alpha^1/ds\big],\ k=1,2,\ j,\delta=1,2,$$

$$d^{\lambda\mu 1}_{sk}=2D^{\lambda\mu 12}_k+(-1)^\beta iD^{\lambda\mu\beta\beta}_k,\quad d^{\lambda\mu 2}_{sk}=-i\big(D^{\lambda\mu 11}_k+D^{\lambda\mu 22}_k\big),\quad k=0,1,\ \lambda,\mu=1,2,$$

$$d^{\alpha\mu\lambda}_{ck}=-D^{\lambda\mu\nu\beta}_kG^\lambda_{\nu\beta},\quad k=0,1,2,\quad \alpha,\mu,\lambda=1,2;\quad b^{\alpha\mu}_{ck}=-D^{\alpha\mu\nu\lambda}_kB_{\nu\lambda},\quad k=0,1,\quad \alpha,\mu=1,2,$$

$$T^0f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega f(\zeta)\ln\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)d\xi d\eta,\ T^0_\Gamma f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\sigma,$$

$$\Theta'(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)d\tau}{\tau'(\tau-z)^2},\quad v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5),\tag{43}$$

$\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω, операторы $Tf,Sf,d_j[f],\Theta(f)$ определены в (13), (14), (17), (24) соответственно.

Система (42), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (42) под $v\in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, $\nu\in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое ее решение.

Заметим, что операторы T,T^0,T^0_Γ, введенные в (13), (43), определяют функции $Tf(z)$, $T^0f(z)$, $T^0_\Gamma f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (42) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$T\big(d^1_{2\lambda+k-1}S_\lambda v\big)(z)+(-1)^{\lambda-k}T\big(d^2_{2\lambda+k-1}\overline{S_\lambda v}\big)(z)+2i\Theta\big(\tau'\nu^{k+1}\big)(z)=0,\quad k=0,1,$$

$$T^0\big(\widetilde{f}^1_{cj}v_j\big)(z)+T\big(\widetilde{f}^2_{cj}v_j\big)(z)/2+2iT^0_\Gamma\varphi_1(z)+2\Theta\big(\tau'DD^{1313}_0\nu_3\big)(z)=0,$$

$$T\big(\widetilde{f}^{1k}_{cj}v_j\big)(z)+T^0\big(\widetilde{f}^{3k}_{cj}v_j\big)(z)-2i\Theta\big(\varphi^k_1\big)(z)+2iT^0_\Gamma\varphi^k_2(z)=0,\quad k=1,2,\quad z\in\Omega_1\equiv\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega},\tag{44}$$

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Из первых трех равенств в (42) следует, что функции v_j $(j=\overline{1,5})$ принадлежат пространству $W^{(1)}_{q_1}(\Omega)\cap C_\alpha(\overline{\Omega})$, $1<q_1<2/(1-\alpha)$. В них перейдем к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трех равенствах в (44) — извне области Ω и последние прибавим к первым трем соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f\in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t)=-2\nu^j(t),\quad j=1,2,\quad v_3(t)=\nu_3(t),\quad t\in\Gamma.\tag{45}$$

Продифференцируем первые два равенства в (42) по $\overline{z}$. С учетом (14) получим

$$\overline{v^j}_{\overline{z}}=d^1_{j+2\lambda-2}iS_\lambda v+(-1)^{\lambda+j}d^2_{j+2\lambda-2}\overline{iS_\lambda v},\quad j=1,2,\quad z\in\Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $iS_\lambda v$, $\overline{iS_\lambda v}$, $\lambda = 1, 2$, и решая ее, будем иметь

$$iS_\lambda v = D\Big[\big(D^{1111}_{\lambda-1} + D^{1212}_{\lambda-1}\big)v^1_z + \big(D^{1111}_\lambda + D^{1212}_\lambda\big)v^2_z + \big(D^{1111}_{\lambda-1} - D^{1212}_{\lambda-1}\big)\overline{v^1_z} + \big(D^{1111}_\lambda - D^{1212}_\lambda\big)\overline{v^2_z}\Big],$$
$$\lambda = 1, 2. \tag{46}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D^{1212}_j \ \ (j = 0, 1, 2), \quad D^{1313}_0 \in W^{(2)}_p(\Omega). \tag{47}$$

Используя соотношения для $S_\lambda v$ в (43), формулы (14) и $(Sf)_{\overline{z}} = f_z$, находим $(S_\lambda v)_{\overline{z}}$, которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1 < q_1 < 2/(1-\alpha)$. Теперь эти выражения $(S_\lambda v)_{\overline{z}}$ подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по $\overline{z}$ равенств (46). Третье равенство в (42) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных, но достаточно громоздких преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $\widetilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением системы линейных уравнений (8) при нулевой правой части.

Далее, от решения (v, ν) союзной системы уравнений (42) потребуем, чтобы $\nu(t) \in C^1_\alpha(\Gamma)$. Тогда, как нетрудно видеть, $v(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$. Теперь в равенствах (46) переходим к пределу при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $(S_\lambda v)^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $S_\lambda v$ в (43). Затем из них вычитаем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (44) с последующим переходом в них к пределу при $z \to t \in \Gamma$ извне Ω и умножением на мнимую единицу i. Далее, третьи равенства в (42) и (44) продифференцируем по z, в получившихся равенствах перейдем к пределу при $z \to t \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем их сложим. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ, используя соотношения (45), формулы

$$(Sf)^+(t) - (Sf)^-(t) = -f(t)\big(\overline{t}\,'\big)^2, \ \ \theta'^+\big(\tau' f\big)(t) - \theta'^-\big(\tau' f\big)(t) = f_t + f_{\overline{t}}\big(\overline{t}\,'\big)^2, \ \ t \in \Gamma,$$

в которых операторы Sf, $\Theta'(f)$ определены в (14), (43), и считая $t = 0 \in \Gamma$, что не ограничивает общности наших рассуждений, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к тому, что функции $v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5$ удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (10). Таким образом, вектор $\widetilde{v} = (\ v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений в (8), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям в (10). Следовательно, в соответствии с формулами (33), (34), (39) для компонент вектора $\widetilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_j = \sum_{k=0}^{5} c_k \widetilde{w}^k_j(z), \quad j = 1, 2, \quad v_3 = (c_3\widetilde{w}^1_3 + c_4\widetilde{w}^2_3 + c_5)/2,$$
$$v_{3+j} = c_{2+j}\Lambda_1\big(\alpha^1, \alpha^2\big) + (-1)^j c_{5-j}\Lambda_2\big(\alpha^1, \alpha^2\big), \quad j = 1, 2,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (45). Следовательно, решение $(v, \nu)^T$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ союзной системы (42) можно представить в виде $(v, \nu)^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_3\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k10})$ $(k = \overline{1, 6})$ — линейно независимые решения системы (42). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_\Omega \big\{\mathrm{Re}\big[(f^1_\chi + g^1_c - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + \big(f^2_\chi + g^2_c - F^2\big)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)\big] +$$

$$+\big(f_\chi^3+g_c^3-F^3\big)(z)\gamma_{k3}(z)\big\}d\alpha^1 d\alpha^2+\sum_{j=1}^{5}\int\limits_{\Gamma}\big(\varphi_{\chi j}+g_c^{3+j}-F^{3+j}\big)(t)\gamma_{k5+j}(t)ds=0,\quad k=\overline{0,5},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\iint\limits_{\Omega} DR^\lambda \widetilde{w}_\lambda^k d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma} P^\lambda \widetilde{w}_\lambda^k ds=0,\quad k=0,1,2,$$

$$\iint\limits_{\Omega} D\left(R^\lambda \widetilde{w}_\lambda^5+R^3\right)d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}\left(P^\lambda \widetilde{w}_\lambda^5+P^3\right)ds=0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} D\left(R^\lambda \widetilde{w}_\lambda^{2+k}+L^\lambda \widetilde{w}_\lambda^k+R^3\widetilde{w}_3^k\right)d\alpha^1 d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}\left(P^\lambda \widetilde{w}_\lambda^{2+k}+N^\lambda \widetilde{w}_\lambda^k+P^3\widetilde{w}_3^k\right)ds-$$
$$-\iint\limits_{\Omega} DT^{\lambda\mu}(\gamma)w_{3\alpha^\lambda}\widetilde{w}_{3\alpha^\mu}^k d\alpha^1 d\alpha^2=0,\quad k=1,2,\tag{48}$$

где по λ,μ суммирование от 1 до 2, $R^j,\ P^j\ \big(j=\overline{1,3}\big),\ L^k,\ N^k\ (k=1,2)$ — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный вектор деформации, функции $\widetilde{w}_j^k\ \big(k=\overline{0,5}\big)$, $\widetilde{w}_3^j,\ j=1,2$, определены в (39), (33), (34), w_3 — произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (48) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$(\rho,\mu)=(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)+(\rho_*,\mu_*)+(\rho_F,\mu_F),$$
$$(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)=\Re f_\chi(a),\quad (\rho_*,\mu_*)=\Re g_c+(\widetilde{\rho},\widetilde{\mu}),\ (\rho_F,\mu_F)=-\Re F,\tag{49}$$

где $f_\chi(a)=\big(f_\chi^1,f_\chi^2,f_\chi^3,\varphi_{\chi1},\ldots,\varphi_{\chi5}\big),\ g_c=\big(g_c^1,\ldots,g_c^8\big),\ F=\big(F^1,\ldots,F^8\big),\ \ \Re=(\Re_1,\ldots,\Re_8)$, $\Re_j\ \big(j=\overline{1,3}\big)$ и $\Re_k\ \big(k=\overline{4,8}\big)$ — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно, функции $\widetilde{\rho}=\big(\widetilde{\rho}_1,\widetilde{\rho}_2,\widetilde{\rho}_3\big),\ \widetilde{\mu}=\big(\widetilde{\mu}_1,\ldots,\widetilde{\mu}_5\big)$ определены формулами (40), (41), а $f_\chi^j,\ \varphi_{\chi k},g_c^n,F^n$ — формулами в (9), (11), (27).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (49) подставить в соотношения (24), (25), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z)=(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z)=\Phi_\chi(a)(z)+\Phi_*(z)+\Phi_F(z),\quad z\in\Omega,$$
$$\Phi_\chi(a)(z)=\Phi(\mu_\chi(a))(z),\quad \Phi_F(z)=\Phi(\mu_F)(z),\quad \Phi_*(z)=\Phi(\Re g_c)(z)+\widetilde{\Phi}(z),$$
$$\widetilde{\Phi}(z)=\big(\widetilde{\Phi}_1,\widetilde{\Phi}_2,\widetilde{\Psi}_1,0,0\big),\ \widetilde{\Phi}_k(z)=2ic_0\Theta\big(t'D\Lambda D_{k-1}^{1212}\big)(z),\quad k=1,2,$$
$$\widetilde{\Psi}_1(z)=\sum_{j=0}^{2}c_j\Theta\big[t'\big(\widetilde{w}_2^j+i\widetilde{w}_1^j\big)\big](z),\tag{50}$$

функция $\Theta(f)(z)$ определена в (24), c_j — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (49) и голоморфных функций из (50) подставим в (16), (18). Тогда задача (1), (2) сведется к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$, которую представим как операторное уравнение

$$a-G(a)=a_*+a_F,\tag{51}$$

где

$$G=(G_1,\ldots,G_5),\ a_*=(w_{1*},w_{2*},w_{3*},\psi_{1*},\psi_{2*}),\quad a_F=(w_{1F},w_{2F},\ w_{3F},\ \psi_{1F},\psi_{2F}),$$
$$w_{2*}+iw_{1*}=\omega_{1*}^0,\quad \psi_{2*}+i\psi_{1*}=\omega_{2*}^0,\quad w_{2F}+iw_{1F}=\omega_{1F}^0,\quad \psi_{2F}+i\psi_{1F}=\omega_{2F}^0,$$
$$G_{3(n-1)+j}(a)=-\mathrm{Re}\big[i^j\omega_{n\chi}^0(a)\big],\quad n,j=1,2,\quad G_3(a)=w_{3\chi}(a),\quad w_{3\chi}(a)=w_3\big(\Psi_{3\chi}(a);\rho_\chi^3(a)\big),$$

$$\omega^0_{j\chi}(a)=\omega^0_j\big(\Psi_{j\chi}(a);\omega_{j\chi}(a)\big),\ \omega_\chi(a)=(\omega_{1\chi},\omega_{2\chi}),\ \ \omega_{j\chi}(a)=\omega_j\big(\Phi_{j\chi}(a);\rho^j_\chi(a)\big),\ \ j=1,2,\ (52)$$

$\omega^0_{j*},\ \omega^0_{jF},\ w_{3*},\ \omega_{j*},\ \omega_{jF},\ w_{3F}$ определяются аналогично, операторы $\omega_j\big(\Phi_j;\rho^j\big),\ \omega^0_j(\Psi_j;\omega_j)$ и $w_3(\Psi_3;\rho^3)$ определены в (13), (16), (18) соответственно.

Отметим, что функции $\omega^0_{j*}(z),w_{3*}(z)$ и $\omega^0_{jF}(z),w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $w_{j*}(z)$ $\big(j=\overline{1,3}\big)$, $\psi_{j*}(z)$ $(j=1,2)$ имеют место представления (33), (34), (39).

Исследуем разрешимость операторного уравнения (51) в пространстве $W^{(2)}_p(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* a)–d). *Тогда*

1) $G(a)$ — *нелинейный ограниченный оператор в* $W^{(2)}_p(\Omega)$, *причем для любых* $a^j=\big(w^j_1,w^j_2,w^j_3,\psi^j_1,\psi^j_2\big)$ $(j=1,2)$ *справедлива оценка*

$$\big\|G(a^1)-G(a^2)\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}\le c_*\Big(\big\|a^1\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\big\|a^2\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\big\|w^1_3\big\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}+$$
$$+\big\|w^2_3\big\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}\Big)\big\|a^1-a^2\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)},\tag{53}$$

где c_* — *известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки*;

2) $a_*,\ a_F\in W^{(2)}_p(\Omega)$.

Доказательство. Из представлений для $f^j_\chi(a)$ в (9), $\varphi_{\chi j}(a)$ в (11) следует, что $f^j_\chi(a)$ и $\varphi_{\chi j}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно, при этом для $f^3_\chi(a),\varphi_{\chi 3}(a)$ справедливы оценки вида (53), а для $f^j_\chi(a),\varphi_{\chi j}(a)$ $(j=1,2)$ — оценки вида

$$\big\|f^j_\chi(a^1)-f^j_\chi(a^2)\big\|_{L_p(\Omega)},\ \big\|\varphi_{\chi j}(a^1)-\varphi_{\chi j}(a^2)\big\|_{C_\alpha(\Gamma)}\le c\Big(\big\|w^1_3\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}+$$
$$+\big\|w^2_3\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}\Big)\big\|a^1-a^2\big\|_{W^{(2)}_p(\Omega)},\quad j=1,2.\tag{54}$$

Тогда из (49) с учетом ограниченности операторов $\mathfrak{R}_j$ получим, что $\rho^j_\chi(a)$ и $\mu_{k\chi}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно и для $\rho^j_\chi(a),\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки вида (53). Следовательно, с учетом свойств интеграла типа Коши из (50) будем иметь, что $\Phi_{k\chi}(a),\ \Psi'_{j\chi}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и для них справедливы оценки вида (53).

Исследуем свойства операторов

$$\Phi'_{k\chi}(a)=\Theta'\big(\mu_{2k\chi}(a)\big),\quad k=1,2,\quad \Psi''_{j\chi}(a)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta'\big(\mu_{2j-1\chi}(a)\big),\quad j=\overline{1,3},\tag{55}$$

где оператор $\Theta'(f)$ определен в (43).

Заметим, что функции $\rho^j_\chi(a)(z),\ \mu_{k\chi}(a)(t)$, определенные в (49), являются решениями системы (26) с правой частью $f^j_\chi(a)(z)$ $\big(j=\overline{1,3}\big)$, $\varphi_{\chi k}(a)(t)$ $\big(k=\overline{1,5}\big)$. Поэтому $\mu_\chi=(\mu_{1\chi},\dots,\mu_{5\chi})$ можно представить в виде

$$\mu_\chi(a)(t)=A^{-1}(t)\left[\varphi_\chi(a)(t)-B(t)\int\limits_\Gamma\frac{\mu_\chi(a)(\tau)}{\tau-t}d\tau-K\mu_\chi(a)(t)-H\rho_\chi(a)(t)\right],\tag{56}$$

где $A^{-1}(t)\in C_\beta(\Gamma)$ — матрица, обратная матрице $A(t),\ \varphi_\chi=(\varphi_{\chi 1},\dots,\varphi_{\chi 5}),\ K=(K_1,\dots,K_5),$ $H=(H_1,\dots,H_5),\ \rho_\chi=\big(\rho^1_\chi,\rho^2_\chi,\rho^3_\chi\big)$.

Если выражение (56) для $\mu_\chi(a)(t)$ подставить в (55), после этого переставить порядок интегрирования в повторных интегралах и использовать указанные выше свойства интеграла типа Коши, операторов T, S, соотношений (4.7), (4.9) из ([14], с. 28–29) и лемму 1, после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим, что операторы $\Phi'_{k\chi}(a)$ $(k=1,2)$, $\Psi''_{j\chi}(a)$ $\left(j=\overline{1,3}\right)$ суть нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и для них справедливы оценки вида (53). Теперь, если использовать соотношения (15), (16), (19), (52) и оценки (54), то утверждение леммы становится очевидным. □

Используя лемму 2, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j=1,2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\left\|G(a^1)-G(a^2)\right\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \le q_*\left\|a^1-a^2\right\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_*=2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара, внешние силы и вектор a_* таковы, что выполняются неравенства

$$q_*<1,\ \|a_*+a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1-q_*)r. \tag{57}$$

Тогда к уравнению (51) можно применить принцип сжатых отображений ([18], с. 146), согласно которому уравнение (51) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a=\mathbb{R}(a_*+a_F)\in W_p^{(2)}(\Omega)$, которое можно представить в виде

$$a=a_0+a^*, \quad a_0=\mathfrak{R}_*(a_*+a_F)-\mathfrak{R}_*(a_*), \quad a^*=\mathfrak{R}_*(a_*), \tag{58}$$

где $\mathbb{R}_*$ — резольвента оператора G.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, т.е. $a_F=0$, то $a_0=0$. В этом случае $a=a^*$. Если вектор $a=a^*$ обращает в нуль компоненты деформации $\gamma^n_{jk},\ j,k=\overline{1,3},\ n=0,1$, то $a=a^*$ представляет собой вектор "жестких смещений " оболочки. Необходимо отметить, что эти "жесткие смещения" отличаются от реальных жестких перемещений оболочки как абсолютно твердого тела. Решая систему $\gamma^n_{jk}=0,\ j,k=\overline{1,3},\ n=0,1$, для "жестких смещений" оболочки можно получить явные выражения.

Вектор a_0 определяется внешними силами, действующими на оболочку, вектором a_* и удовлетворяет неравенству ([18], с. 149)

$$\frac{\|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}}{1+q_*} \le \|a_0\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \le \frac{\|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}}{1-q_*}.$$

Вернемся к условиям разрешимости (48), в которых под $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)\in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение (58) задачи (1), (2). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что последние два условия в (48) тождественно выполняются.Следовательно, условия разрешимости задачи (1), (2) примут вид

$$\iint\limits_{\Omega} DR^\lambda \widetilde{w}^k_\lambda d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} P^\lambda \widetilde{w}^k_\lambda ds = 0, \quad k=0,1,2,$$

$$\iint\limits_{\Omega} D\left(R^\lambda \widetilde{w}^5_\lambda + R^3\right) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma}\left(P^\lambda \widetilde{w}^5_\lambda + P^3\right) ds = 0. \tag{59}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* a)–d), (47) *и неравенства* (57). *Тогда для разрешимости задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (59). *В случае их выполнения задача* (1), (2) *имеет обобщенное решение*

$$a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad 2 < p < 4/(2-\beta)$$

вида (58).

Литература

[1] Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек* (Наука, М., 1989).

[2] Морозов Н.Ф. *Избранные двумерные задачи теории упругости* (Изд-во ЛГУ, Л., 1978).

[3] Карчевский М.М. *Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакрепленной оболочки*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. физ.-мат. науки **155** (3), 105–110 (2013).

[4] Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Badriev I.B. *Consistent equations of nonlinear multilayer shells theory in the quadratic approximation*, Lobachevskii J. Math. **40** (3), 349–363 (2019).

[5] Тимергалиев С.Н. *Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2011).

[6] Тимергалиев С.Н. *К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Дифференц. уравнения **51** (3), 373–386 (2015).

[7] Тимергалиев С.Н. *Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Изв. вузов. Матем. (4), 59–75 (2017).

[8] Тимергалиев С.Н. *К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко*, Прикл. матем. и механ. **82** (1), 98–113 (2018).

[9] Timergaliev S.N. *Method of Integral Equations for Studying the Solvability of Boundary Value Problems for the System of Nonlinear Differential Equations of the Theory of Timoshenko Type Shallow Inhomogeneous Shells*, Diff. Equat. **55** (2), 243–259 (2019).

[10] Тимергалиев С.Н. *О существовании решений нелинейных задач равновесия пологих неоднородных анизотропных оболочек типа Тимошенко*, Изв. вузов. Матем. (8), 45–61 (2019).

[11] Тимергалиев С.Н. *К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Изв. вузов. Матем. (4), 90–107 (2021).

[12] Тимергалиев С.Н. *О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями*, Дифференц. уравнения **57** (4), 507–525 (2021).

[13] Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1975).

[14] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).

[15] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике* (Наука, М., 1962).

[16] Пресдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений* (Мир, М., 1979).

[17] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи,* 2-е изд. (Физматгиз, М., 1963).

[18] Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений* (Гостехиздат, М., 1956).

Самат Низаметдинович Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

e-mail: Samat_tim@mail.ru

S.N. Timergaliev

On the problem of solvability of nonlinear boundary value problems for shallow isotropic shells of Timoshenko type in isometric coordinates

Abstract. The solvability of a boundary value problem for a system, which describes the equilibrium state of elastic shallow inhomogeneous isotropic shells with loose edges referred to isometric coordinates in the Timoshenko shear model and consists of five non-linear second-order partial differential equations under given non-linear boundary conditions, is studied. The boundary value problem is reduced to a nonlinear operator equation for generalized displacements in Sobolev space, the solvability of this equation is established with the help of the contraction mapping principle.

Keywords: shallow isotropic inhomogeneous shell of Timoshenko type, isometric coordinates, non-linear boundary value problem, generalized solution, integral representation, holomorphic function, operator equation, existence theorem.

Samat Nizametdinovich Timergaliev

Kazan State University of Architecture and Engineering,
1 Zelenaya str., Kazan, 420043 Russia,

e-mail: Samat_tim@mail.ru